



ڈاکٹر ذاکر حسین لائبریری

DR. ZAKIR HUSAIN LIBRARY

JAMIA MILLIA ISLAMIA
JAMIA NAGAR

NEW DELHI

Please examine the book before
taking it out. You will be res-
ponsible for damages to the book
discovered while returning it.

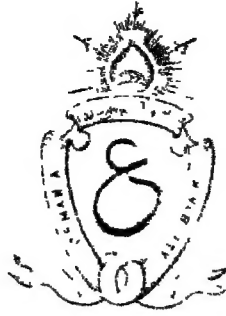
Rare

Acc. No. 11442

16862

Late Fine Ordinary books 25p. per day, Text Book
Re 1 per day, Over night book Re 1 per day.

[illegible]



تصانیف علامہ محمد علی عثمانیہ

سکونیاتِ اعلیٰ

تصنیف

پروفیسر ایل۔ لونی ایم۔ اے

ترجمہ

مولوی شیخ برکت علی صاحب ایم۔ اے (عثمانیہ)

پروفیسر ریاضی کینیڈا جامعہ عثمانیہ حیدرآباد دکن

۱۳۵۱ھ - ۱۳۵۱ھ - ۱۹۳۲ء

علامہ محمد علی عثمانیہ صاحب مدظلہ العالی

فہرست مضامین

سکونیات اعلیٰ

مضمون

صفحہ

پہلا باب

- ۱ تہید۔ ایک نقطہ پر عمل کرنیوالی قوتوں کی ترکیب و تحلیل
۲۲ ایک ذرہ کا تعادل ایک چمکتے منہ پر

دوسرا باب

- ۲۷ متوازی قوتیں۔ معیار افزہ جنت

تیسرا باب

- ۵۳ ہم مستوی قوتوں کے زیر عمل استوار جسم کا توازن
۷۴ اچھل توازن

چوتھا باب

صفحہ	مضمون
۸۰	مرکز
۹۰	ایک ذرہ کا توازن ایک کھردرے منحنی پر
	پانچواں باب
۱۱۶	کام۔ موہوم کام
۱۳۲	موہوم کام کے اصول کا ثبوت ایک ہمستوی نظام کے لئے
	چھٹا باب
۱۴۶	ترسیلی حل
	ساتواں باب
۱۸۰	جزی زور اور جھکاؤ کے معیار آخر کے لئے
۱۹۷	ترسیلی حل جھکاؤ کے معیار آخر کے لئے
	آٹھواں باب
۲۰۳	مرکز ثقل
۲۱۷	کسی قوس کا مرکز ثقل
۲۲۲	کسی مستوی رقبہ کا مرکز ثقل
۲۳۲	کسی گردشی سطح یا گردشی مجسم کا مرکز ثقل
۲۳۸	کسی حجم کا مرکز ثقل
۲۴۵	کسی گردشی مثلث کا مرکز ثقل
۲۴۷	پے پس کے مسئلے
	نواں باب

صفحہ	مضمون
۲۵۰	قائم اور غیر قائم تعادل
	دسواں باب
۲۷۳	تین ابعاد میں قوتیں
۲۷۷	تعادل کی عام شرطیں
۲۹۶	مہم کام کے اصول کا ثبوت قوتوں کے کسی نظام کے لئے
۳۰۳	کام کا تفاعل
۳۰۷	قائم اور غیر قائم تعادل
	گیارہواں باب
۳۱۶	تین ابعاد میں قوتیں (مسلسل)
۳۱۶	پائین سو کا مرکزی محور
۳۲۷	دو معلوم رنجوں کا حاصل رنج
۳۳۳	اسطوانہ نما
۳۴۲	مشکانی بیج
۳۴۳	صغریٰ خطوط اور صغریٰ مستوی سطحیں
	بارہواں باب
۳۵۲	مشینیں
۳۵۴	ہیرم
۳۵۱	چرخیاں
۳۶۵	چرخ اور محور
۳۷۱	معمولی جہاز
۳۷۵	تک

صفحہ	مضمون
۳۷۸	تیز
۳۸۳	خانہ
۳۸۵	مشین کی استعداد
۳۸۹	مشین کا کلیہ
تیرہواں باب	
۳۹۳	رسیوں اور زنجیروں کا تقادل
۳۹۴	سادہ زنجیرہ
۴۱۰	مطلق لمبوں کا قطع مکانی
۴۱۵	ایک رسی کے تقادل کی عام شرطیں
۴۱۶	یکساں طاقت کا زنجیرہ
۴۱۸	چمکنی سطحوں اور مخنیوں پر رسیاں
۴۲۷	کھردرے مخنیوں پر رسیاں
۴۳۴	مرکزی قوتوں کے زیرِ عمل رسیاں
۴۴۰	قابل کشنچاؤ رسیاں
چودھواں باب	
۴۶۱	کشنش اور قوتہ
۴۶۲	ایک پتلی سلاخ کی کشش
۴۶۸	مستدیر تختی
۴۶۹	ایک پتلی کشش کرینوالی سطح میں سے گزرنے پر کشش کی تبدیلی
۴۷۷	پتلے گردی خول اور ٹھوس کرہ
۴۸۳	سطح مرتفع پر جاذبہ ارض کی قوت
۴۸۴	تجاذب کے مستقل کی قوت

صفحہ	مضمون
۴۹۲	توہ
۴۹۷	ایک ٹیلی سلاخ کا توہ
۵۰۳	پتلے کردی خول اور ٹھوس کرہ
	پندرھواں باب
۵۲۲	کشش اور توہ (مسلل)
۵۲۲	عامادی کشش کا سطحی تکرار
۵۲۶	لاپلاس اور پوائنٹن ہوکی مساواتیں
۵۳۳	سادہ توہ منطقیں
۵۳۶	قوت کے خطوط اور نلیاں
۵۴۰	ایک جاذب بالذات نظام کا کام
۵۴۷	ایک دسے ہوئے توہ کے لئے مادہ کی تقسیم
۵۵۰	مماثل تہیں
	سولھواں باب
۵۵۶	کم بچک واسے مشہدیں کا تعادل
۵۶۵	تین معیار اثر دں کی کلاپی ردن کی مساوات
۵۷۲	ایک خمیدہ سلاخ کے تعادل کی عام شرطیں
۵۷۹	ایک سلاخ کو جھکانے میں کام
۵۸۳	بلے ستونوں کا جھکاؤ
۵۸۵	دھروں کی محوری گردش
۵۸۹	ستون کا جھکاؤ اپنے ہی وزن کے زیر عمل

سکونیات علی

پہلا باب

تمہید۔ ایک نقطہ پر عمل کرنے والی قوتوں کی ترکیب و تحلیل

۱۔ جسم مادہ کا ایک ایسا حصہ ہے جو ہر طرف سے محدود ہو۔
قوت کہہ رہے جو کسی جسم کی حالت سکون کو یا یکساں حرکت کو بدل دے یا بدلنے کی قابلیت رکھے۔

کسی جسم کو ساکن اس وقت کہتے ہیں جب وہ اپنی گرد و پیش کی چیزوں کے لحاظ سے اپنا مقام نہ بدلے۔

سکونیات وہ علم ہے جس میں جسموں پر قوتوں کے عمل کے متعلق بحث کی جاتی ہے جبکہ ان قوتوں کی ترتیب ایسی ہو کہ اجسام مذکور ساکن رہیں۔

وہ علم جس میں قوتوں کے زیر عمل حرکت کرنے والے اجسام پر بحث ہو حرکیات کہلاتا ہے۔

۲۔ ذرہ مادہ کا ایک حصہ ہے جو لحاظ مقدار کے لا انتہا چھوٹا ہو یا ہماری تحقیقات کی اغراض کے لحاظ سے اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کے مختلف حصوں کے درمیانی فاصلوں کو نظر انداز کر سکیں۔

کسی جسم کو ہم لا انتہا چھوٹے اجزاء کی لا انتہا تعداد کا مجموعہ یا لا انتہا ذروں کا مجتمعہ گروہ تصور کر سکتے ہیں۔

ایک استوار جسم سے ایسا جسم مراد ہوتا ہے جس کے اجزاء ایک دوسرے

کے لحاظ سے اپنا اضافی محل نہ بدلیں۔
استوار جسم کا تصور بھی ذرہ کے تصور کی طرح خیالی ہے کائنات میں کوئی جسم کامل طور پر استوار نہیں۔ ہر جسم میں قوت کے عمل سے کچھ نہ کچھ تغیر ضرور پیدا ہوتا ہے خواہ یہ تغیر کتنا ہی ضعیف ہو۔ اگر لکڑی کی ایک سیڑی لی جائے اور اس کے ایک سرے کو مضبوط باندھ دیا جائے اور دوسرے کو کھینچا جائے تو لکڑی کچھ نہ کچھ کمزور کھنچ جائیگی۔ اگر سیڑی کو بے کی ہو تو طول کا تغیر مقابلہ بہت کم واقع ہوگا۔

ہم اپنی تحقیقات کو سہیلی بنانے کے لئے یہ مان لیں گے کہ وہ تمام اجسام جو زمین پر ہیں مکمل طور پر استوار ہیں اور جہاں کہیں یہ بات نہ ہو اس کو بیاں کر دیا جائے گا۔

۳۔ مساوی قوتیں۔ دو ایسی قوتیں مساوی کہلاتی ہیں جو اگر ایک ذرہ پر متقابل سمتوں میں عمل کریں تو ذرہ حالت سکون میں رہے۔

۴۔ کیت کسی جسم میں جس قدر مادہ ہوا ہے جسم کی کیت کہتے ہیں۔ کیت کی اکائی جو انگلستان میں مستعمل ہے ایک پونڈ ہے، پونڈ سے پلاٹینم کے ایک خاص ٹکڑے کی کیت مادہ ہے جو انگلستان کے دفتر فینانس میں محفوظ ہے فرانس اور دیگر ممالک میں کیت کی جو نظری اکائی مستعمل ہے وہ

ایک گرام ہے جو تقریباً ۲۸۳۲ ۱۵ گرین کے مساوی ہے۔ عملی اکائی ایک کلو گرام (= ۱۰۰۰ گرام) ہے جو تقریباً ۲۰۴۶ پونڈ کے مساوی ہے۔ وزن۔ وزن کے تصور سے ہر ایک شخص بخوبی واقف ہے۔ ہم سب جانتے ہیں کہ کسی جسم کو زمین پر گرنے سے روکنے کے لئے کچھ نہ کچھ زور لگانا پڑتا ہے۔ زمین ہر ایک جسم کو جس قوت سے اپنی طرف کھینچتی ہے اس کو اس جسم کا وزن کہتے ہیں۔

۵۔ قوت کی پیمائش۔ سیکونیاں میں ہم ایک پونڈ کے وزن کو قوت کی اکائی مقرر کریں گے۔ پس قوت کی اکائی اس قوت کے مساوی ہے جو آزادانہ لٹکے ہوئے ایک پونڈ کی کیت میں سہا رکھے۔

علم حرکت میں یہ معلوم ہو گا کہ سطح زمین کے مختلف مقامات پر پونڈ کا وزن بالکل وہی نہیں رہتا مگر چونکہ سکونیات میں سطح زمین کے مختلف مقامات پر قوتوں کے مقابلہ کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی اس لئے پونڈ کے وزن کے تغیرات مسلسل اہمیت نہیں رکھتے۔ اس لئے ہم ان تغیرات کو نظر انداز کر چٹکے اور پونڈ کے وزن کو مستقل مان لیں گے۔

عملی طور پر براے اختصار ایک پونڈ کے وزن کی بجائے ہم سکونیات میں "ایک پونڈ" کہیں گے۔ اس سے طالب علم سمجھ جائیگا کہ "۱۰ پونڈ کی قوت" کے معنی ۱۰ پونڈ کے وزن کے مساوی قوت ہے۔

۶۔ قوتوں کو خطوط مستقیم سے تعبیر کرنا۔ کوئی قوت پورے طور پر معلوم ہو جائے گی جب ہمیں (۱) اس کی مقدار (۲) اس کی سمت اور (۳) اس کا نقطہ عمل معلوم ہو جائے جس کا وہ نقطہ جس پر یہ عمل کرتی ہے۔

اس لئے ہم قوت کو نہایت آسانی سے ایک خط مستقیم کے ذریعے تعبیر کر سکتے ہیں جو اس کے نقطہ عمل میں سے کھینچا جائے کیونکہ خط مستقیم میں مقدار اور سمت دونوں چیزیں باقی جاتی ہیں۔

۷۔ قوت کی قسمیں۔ جب قوت کسی کتبہ پر عمل کر رہی ہو تو یہ تین مختلف فکٹوں میں ظاہر ہو سکتی ہے :-

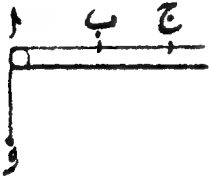
(۱) کشش (۲) تناؤ (۳) تعال

۸۔ کشش۔ کشش سے مراد وہ قوت ہوتی ہے جو ایک جسم کسی دوسرے جسم پر بغیر کسی مرنی واسطہ کی موجودگی کے اور بغیر ان اجسام کے لازمی طور پر ایک دوسرے سے متصل ہونے کے لگاتا ہے۔

اس کی نہایت عام مثال وہ کشش ہے جو زمین ہر ایک چیز پر لگاتی ہے اس کشش کو شے مذکور کا (وزن) وزن کہتے ہیں۔

۹۔ تناؤ۔ اگر ہم ایک رسی کا ایک سر کسی جسم کے ساتھ باندھ دیں اور رسی کے دوسرے سرے کو کھینچیں تو ہم جسم پر قوت لگائیں گے۔ ایسی قوت جو کسی رسی یا سلاح کے توسط سے لگائی جائے تناؤ کہلاتی ہے۔

اگر رسی ہلکی ہو (یعنی اس کا وزن اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو نظر انداز کر سکیں) تو جو قوت رسی لگاتی ہے وہ اس کے تمام

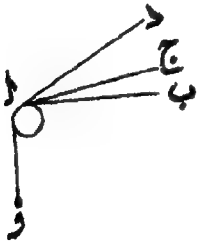


طول پر یکساں ہوتی ہے۔ مثلاً اگر ایک وزن و کو ایک ہلکی

رسی کے ذریعہ سہارا جائے جو ایک مینر کے چکنے کنارے پر سے گزرتی ہو تو یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ قوت خواہ رسی کے کسی

نقطہ (ا، ب یا ج) پر لگائی جائے اس کی مقدار ہر صورت میں وہی ہوگی۔ اب وزن کو سہارنے کے لئے اگر جو قوت لگانی پڑتی ہے وہ ہر صورت میں وہی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ اگر اس کا اثر وہی رہتا ہے خواہ تناؤ رسی کے کسی نقطہ پر لگایا جائے۔ لہذا رسی کا تناؤ اس کے تمام طول پر وہی رہتا ہے۔

نیز اگر وزن و کو ایک ہلکی رسی سے سہارا جائے جو ایک چکنی کھونٹی پر سے گزرتی ہو تو یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ رسی کے دوسرے سرے پر وہی قوت لگانی پڑے گی خواہ رسی کو کسی سمت (ا، ب، ج یا د) میں کھینچا جائے اور یہ قوت وزن و کے مساوی ہوگی۔



(یہ قوت رسی کے آزاد سرے کو کمانی دار قوازد کے ساتھ باندھ دینے سے ناپنی جاسکتی ہے)

لہذا اگر ایک ہلکی رسی ایک چکنی

کھونٹی پر سے گزرتی ہو تو اس کا تناؤ اس کے طول کے تمام نقطوں پر وہی ہوتا ہے۔

(۱۴) اگر رد یا زیادہ رسیاں ایک دوسرے کے ساتھ بانڈ دی جائیں تو ضروری نہیں کہ سب رسیوں کے تناؤ باہم مساوی ہوں۔

۱۰۔ تعادل۔ اگر ایک جسم دوسرے جسم پر ٹھکا ہو یا دوسرے جسم کو دبا رہا ہو تو ہر ایک جسم نقطہ تماس پر قوت محسوس کرتا ہے۔ اس قسم کی قوت کو تعادل کہتے ہیں۔

ایک جسم دوسرے جسم پر جو قوت لگاتا ہے (یا عمل کرتا ہے) وہ اس قوت (یا عمل) کے متضاد ہوتی ہے جو دوسرا جسم پہلے جسم پر لگاتا ہے۔

۱۱۔ اصول نیوٹن کے تیسرے کلیہ حرکت میں پایا جاتا ہے۔ لچک دار رسیوں کے تناؤ۔ تمام رسیاں کھینچ سکتی ہیں اگرچہ بہت رسیوں میں کھینچ سکنے کی استعداد نہایت کم ہوتی ہے اور عملی طور پر نظر انداز ہو سکتی ہے۔ جب رسی کے کھینچنے کی استعداد کو نظر انداز نہ کیا جاسکے تو تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ رسی کے تناؤ کو اس کے کھینچاؤ کی مقدار کے ساتھ جو ربط ہوتا ہے اس کے لئے ایک سادہ کلیہ ہے جس کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے۔

لچک دار رسی کا تناؤ رسی کے قدرتی طول سے زائد کھینچاؤ کے متناسب ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ قدرتی حالت میں ایک رسی کا طول ایک فٹ ہے، تب اس کے اُس تناؤ کو جبکہ اس کا طول ۱۳ انچ ہو اُس تناؤ کے ساتھ جبکہ اس کا طول ۱۵ انچ ہو یہ نسبت ہوگی

۱۳ - ۱۲ : ۱۵ - ۱۴ یعنی نسبت ۳ : ۱

اس گھبہ کی جذبیہ خچر یوں تصدیق ہو سکتی ہے۔ کوئی پیچہ ارکامنی یا ایک ریڈ کی نلی اور اس کے ایک سرے کو ایک ثابت نقطہ سے جوست کر دو اور پھر اس کے دوسرے سرے پر وزن لگا دو اور دیکھو کہ ان وزنوں سے کس قدر کھینچاؤ پیدا ہوتا ہے تب معلوم ہو گا کہ یہ کھینچاؤ تقریباً وزنوں کے متناسب ہیں۔ اس امر کی احتیاط رکھی جائے کہ جو وزن استعمال کئے جائیں وہ کمائی یا ریڈ کی نلی کی طاقت کے مطابق ہوں اور

زیادہ سے زیادہ وزن اتنا نہیں ہونا چاہیے جو کمائی یا تلی کو مستحضر کر دے یا اس کی شباہت کو مستقلاً بدل دے۔

مندرجہ بالا کلیہ کو ایک صاحب (۱۶۳۵ یا ۱۶۴۰ء) نے ۱۶۷۷ء میں مشہور کیا اور اسے ان الفاظ میں پیش کیا۔ ”جیسی قوت ویسا استداد“ اس سے کسی صورت میں تناؤ معلوم کرنے کا ضابطہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ بغیر کھینچے رسی کا طول ۱۰ ہے، اور جب اس کا طول کھینچ کر ۱۵ ہو گیا ہے تو تناؤ ۵ ہے۔ تب کھینچاؤ ۵۔ ۱۰ ہے اور کلیہ مذکور کی رو سے $ت = \frac{د - لا}{و}$ ۔ اس کو عام طور پر اس شکل میں بیان کرتے ہیں:-

$$ت = \frac{د - لا}{و}$$

مقدار ۱۰ رسی کے مادہ پر اور نیز اس کی موٹائی پر منحصر ہوتی ہے، اس کو رسی کی لچک کا مقیاس کہتے ہیں، اور یہ مقیاس اس قوت کے مساوی ہوتا ہے جو افقی میز پر رکھی ہوئی کسی لچکدار رسی کے طول کو دگنا کر دینے کے لئے کافی ہو کیونکہ جب $لا = ۱۰$ و $ت = ۱$ ، لیکن ظاہر ہے کہ کوئی لچک دار رسی غیر محدود حد تک کھینچ کر ان کو برداشت نہیں کر سکتی، جب کوئی رسی بوجھ کھینچاؤ ٹوٹنے کے عین قریب ہو تو اس وقت اس کے تناؤ کو توڑ تناؤ کہتے ہیں۔

ایک کا کلیہ فولادی اور نیز دیگر سلاخوں پر بھی صادق آتا ہے لیکن جن کھینچاؤں کے لئے یہ درست ہے ان کی حدود بہت تنگ ہیں۔ ہم کسی سلاخ کو کھینچ کر اس کے طول کو دو چند نہیں کر سکتے لیکن ۱۰ اس قوت کے ... اٹھانے کے مساوی ہوگا جو اس کے قدرتی طول میں اس کے $\frac{۱}{۱۰}$ کا اضافہ کر دے کیونکہ اگر $لا = ۱۰$ و $ت = ۱$ تو $د = ۱۱$ ۔

ت کی قیمت سلاخ کی موٹائی پر بھی منحصر ہوگی۔ سلاخ عام طور پر ایک مربع انچ عمودی تراش کی لی جاتی ہے۔ چنانچہ ایک فولادی سلاخ کی لچک کا مقیاس تقریباً (۱۳۵۰۰) فن فی مربع انچ کے مساوی ہوتا ہے۔

۱۲۔ تقادول۔ جب دو یا زیادہ قوتیں ایک جسم پر عمل کرتی ہوں اور

اُن کو اس طرح ترتیب دیا جائے کہ اگر کسی جسم سے دو متوازن قوتیں ہوں تو متبادل قوتیں کہتے ہیں۔
 ہم فرض کر لیں گے کہ اگر ہم کسی استوار جسم کے ایک ہی نقطہ پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگائیں تو ان سے جسم کے متبادل پر کوئی اثر نہیں پڑتا نیز اسی طرح سے اگر کسی جسم کے ایک ہی نقطہ پر دو مساوی اور متقابل قوتیں عمل کر رہی ہوں تو ان کو خارج کر سکتے ہیں۔

۱۳۔ قوتوں کے انتقال کا اصول۔ اگر کوئی قوت ایک استوار جسم کے کسی نقطہ پر عمل کرے تو ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ یہ اپنے خط عمل کے کسی اور نقطہ پر عمل کرتی ہے۔ بشرطیکہ موخر الذکر نقطہ جسم کے ساتھ استوار طور پر مربوط ہو۔

۴۔ ی ب فی ق ۲

فرض کرو کہ ایک قوت ق کسی جسم کے نقطہ ۱ پر ۱ کی سمت میں عمل کرتی ہے ۱ لا پر کوئی اور نقطہ ب ۲ اور ب پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جنہیں سے ہر ایک قوت ق کے برابر ہو اور جو بالترتیب ب ۱ اور ب ۲ کی سمتوں میں عمل کریں۔ ان سے جسم کے توازن پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔
 قوت ق جو ۱ پر ۱ کی سمت میں عمل کرتی ہے اور قوت ق جو ب پر ۱ کی سمت میں عمل کرتی ہے یہ دونوں مساوی اور متقابل ہیں، ہم یہ فرض کر لیں گے کہ یہ ایک دوسرے کو ختم کر دیتی ہیں اور اس لئے ان کو خارج کیا جاسکتا ہے۔ اس کے لئے سے ہمارے پاس صرف ایک قوت ق رہ جاتی ہے جو ب پر ۱ کی سمت میں عمل کرتی ہے اور اس کا اثر کلیتہً وہی ہے جو ۱ پر عمل کرنے والی ابتدائی قوت ق کا ہے۔ جسم مذکورہ بالا میں خوردنی قوتیں قوت ق کے ۱ یا ب پر عمل کرنے کی صورت میں مختلف ہونگی۔

۱۴۔ چکنے اجسام لکڑی کا ایک صاف اور چکنا ٹکڑا لو جس کا ایک رخ مستوی ہو، اس کو اس رخ کے بل ایک میز پر رکھو جس کی سطح اتنی چکنی ہو جتنی کہ ممکن ہو سکے۔ اب اگر ہم لکڑی کے ٹکڑے کو میز پر پھسلانے کی کوشش کریں تو ہمیں کچھ نہ کچھ مزاحمت محسوس ہوگی۔ لکڑی اور میز کی سطح کے درمیان کچھ نہ کچھ قوت ہمیشہ ہوتی ہے۔ اگر اجسام کا کیتھ چکنے ہوتے تو ٹکڑے اور میز کی سطح کے متوازی قوت بالکل معدوم ہوتی اور ان کے درمیان جو قوت عمل کرتی وہ صرف میز پر عود دار ہوتی۔ جب دو جسم جو ایک دوسرے سے مس کرتے ہوں بالکل چکنے ہوں تو وہ قوت یا قائل جوان دونوں کے درمیان عمل کرتا ہے ان کے نقطہ تماس پر کی مشترک ماسی سطح پر عود دار ہوتا ہے۔

پس معمولی سطح کی صورت میں یہ سمت اس عماد کی سمت ہوتی ہے جو نقطہ تماس میں سے کھینچا جائے اور ظاہر ہے کہ یہ ایک قطعی طور پر یقین سمت ہے۔ اگر ایک جسم ایک پٹنے باریک تار کی شکل کا ہو یا کوئی پتلا کنارہ ہو تو اس پر کے کسی نقطہ ن میں سے لانا تھا خطوط ایسے کھینچ سکتے ہیں جو اس کی سطح پر عود دار ہوں، کیونکہ ن میں سے گزرنے والے جہ خطوط جو ماسی خط پر عود می سطح مستوی میں واقع ہوں گے اس بشرط کہ پورا کریں گے، لیکن اگر دو کنارے ایک دوسرے سے مس کرتے ہوں تو مشترک عمود کی سمت میں ہو جائے گی کیونکہ اسے دونوں کناروں پر عود دار ہونا چاہیے اور بناء علیہ اس سطح پر عود دار ہونا چاہیے جو دونوں کناروں میں سے گزرتی ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ اس کی سمت وہ عماد ہے جو دونوں کناروں میں سے گزرنے والی سطح مستوی پر ان کے نقطہ تماس میں سے کھینچا جائے۔

قوتوں کی ترکیب و تحلیل

(۷)

۱۵۔ فرض کرد کہ لکڑی کا ایک چبٹا ٹکڑا ایک چکنے میز پر پڑا ہے اور اس کو تین رسیوں کے ذریعے کھینچا گیا ہے جو اس کے کناروں پر بندھی ہیں انیسویں کے ذریعے جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ سب کی سب افقی ہیں۔ اگر رسیوں کے تناؤں

کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہو کہ کُلڑی ساکن رہے تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قوتیں باہم متوازن ہیں۔ اس لئے ان قوتوں میں سے دو قوتیں باہم ملکر اتنی قوت لگاتی ہیں جو بلحاظ آخر کے تیسری قوت کے مساوی اور متقابل ہوتی ہیں۔ اس قوت کو جو تیسری قوت کے مساوی اور متقابل ہوتی ہے پہلی دو قوتوں کا حاصل کہتے ہیں۔

حاصل - تعریف - اگر دو یا زیادہ قوتیں ف، ا، ق، س، ایک استوار جسم پر عمل کریں اور اگر ایک واحد قوت ح ایسی معلوم ہو سکے جس کا اثر جسم مذکور پر وہی ہو جو ان قوتوں ف، ا، ق، س، کا ہے تو اس واحد قوت ح کو باقی قوتوں کا حاصل کہتے ہیں اور قوتوں ف، ا، ق، س، کو ح کے اجزائے ترکیبی سے موسوم کرتے ہیں۔

تعریف بالا کی مد سے ظاہر ہے کہ اگر جسم مذکور پر ایک قوت ایسی لگائی جائے جو قوت ح کے مساوی اور متقابل ہو تو جسم پر عمل کرنے والی قوتیں متوازن میں ہونگی اور جسم متوازن ہوگا برعکس اس کے اگر جسم پر عمل کرنے والی قوتیں متوازن میں ہوں تو ان میں سے کوئی ایک قوت باقی قوتوں کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگی۔

۱۶ - اگر ایک جسم پر دو قوتیں ایک ہی سمت میں عمل کریں تو ان کا حاصل متوائجہ مجموعہ کے مساوی ہوگا اور بڑی قوت کی سمت میں عمل کرے گا۔

جب دو قوتیں ایک جسم پر مختلف سمتوں میں عمل کریں تو ان کا حاصل ذیل کے مسئلہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

مسئلہ - قوتوں کا متوازی الاضلاع - اگر دو قوتوں کو جو ایک نقطہ پر عمل کرتی ہوں بلحاظ مقدار اور سمت کے ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے تعبیر کیا جائے جو اس کے ایک راس میں سے

ان کو ایک میز پر ٹا دو اور سینوں کے ذریعے ثابت کر دو۔ تب ہم رسیوں کے تناؤں ف، ق، ا، سا کو ترازوں پر پڑھ کر معلوم کر سکتے ہیں اور حسب سابق قوتوں کے متوازی الاضلاع کے مسئلہ کی صداقت کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

حرکیاتی ثبوت۔ مسئلہ بالا کا ثبوت اسراع کے متوازی الاضلاع اور نیوٹن کے قوانین حرکت سے بھی مستنبط کیا جاسکتا ہے۔

اگر ایک ذرہ کی کمیت م ہو اور اس کے اسراع ف، اور فہ بلحاظ مقدار اور سمت کے دو خطوط مستقیم و ا اور و ب سے تعبیر ہوں تو اس کا حاصل اسراع فہ متوازی الاضلاع و ا ج ب کے درج سے تعبیر ہوگا۔

چونکہ ذرہ کا اسراع و ا کی سمت میں ف ہے اس لئے اس سمت میں قوت ق (دک ف) عمل کرتی ہے اور اسی طرح سے ایک قوت ق (دک ف) و ب کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ ان قوتوں کو بلحاظ مقدار اور سمت کے و ا اور و ب سے تعبیر کر دو۔

$$ج = \frac{و ا}{و ب} = \frac{ق}{ق} = \frac{ف}{ف}$$

متوازی الاضلاع و ا ج ب کی تکمیل کر دو، کتب معمولی ہندسہ سے ثابت ہو سکتا ہے کہ و ج، ج ایک خط مستقیم ہیں اور

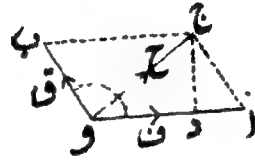
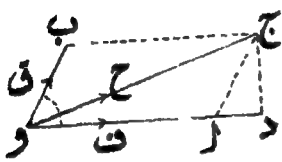
$$\frac{و ج}{و ا} = \frac{ج}{و ب}$$

اس لئے و ج سے وہ قوت تعبیر ہوتی ہے جو اسراع و ج پیدا کرتی ہے اور اس لئے وہ قوت سے جو و ا اور و ب کے حاصل کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۸۔ اگر دو قوتیں ف اور ق اس طرح عمل کرتی ہوں کہ ان کے خطوط عمل کے درمیان زاویہ م بنتا ہو تو ان کا حاصل ح بلحاظ مقدار اور سمت کے آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

ا فرض کر دو کہ مذکورہ بالا قوتیں ف اور قی خطوط مستقیم و ا اور و ب سے تعبیر ہوتی ہیں جن کے درمیان زاویہ م بنتا ہے۔ متوازی الاضلاع و ا ج ب

کی تحلیل کر داج د' وا (مکدودہ بشرط ضرورت) پر نمود کھینچو
تب ود = وا + اج جم داج = ف + ق جم ب ود = ف + ق جم ع
(اگر د، وار ا کے درمیان واقع ہو تو (شکل ۲)
دو = وا - اج جم داج = ف - ق جم (۱۸۰ - ع) = ف + ق جم ع ا



تیردج = اج ب داج = ق جم ع

ح = وج = ود + ج د = ف + ق + ف + ق جم ع (۱)

اور مس ج ود = ح ج = ق جم ع (۱۱)

ان دو مساواتوں سے مطلوبہ حاصل کی مقدار اور سمت دونوں معلوم ہو جائیں
نتیجہ صریح۔ اگر قوتیں علی القوائم ہوں تو ع = ۹۰ اس لئے

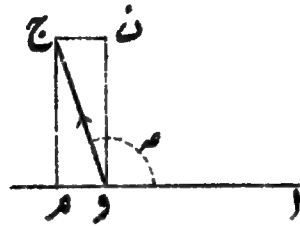
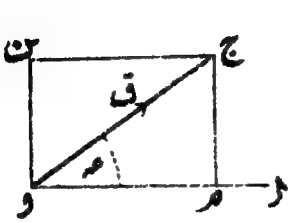
$$ح = ۹۰ = ف + ق + ق + ف اور مس ج ود = \frac{ق}{ف}$$

۱۹۔ ہم ایک قوت کو دو اجزائے ترکیبی میں لا متناہی طریقوں سے تحلیل کر سکتے ہیں
کیونکہ ظاہر ہے کہ ایسے لا انتہا متوازی الاضلاع کھینچ سکتے ہیں جن کا تروج ہو۔
ان میں سے ہر ایک متوازی الاضلاع کے دو متصل ضلع قوت کے اجزائے ترکیبی
کو تعبیر کریں گے۔

سب سے ضروری صورت اس وقت واقع ہوتی ہے جب ہم کسی قوت
کو ایسے دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کریں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں۔
فرض کر دو کہ ہم ایک قوت قی کو جوج سے تعبیر ہوتی ہے دو ایسے اجزائے
ترکیبی میں تحلیل کرنا چاہتے ہیں جن میں سے ایک واک کی سمت میں جو اور دوسری واک

پر عمود ہو۔

ج ہر دو پر عمود مینچو اور متوازی الاضلاع و م ج ن کی تکمیل کرو۔ تب جو قوتیں و م اور و ن سے تعمیر ہوتی ہیں وہی مطلوبہ اجزائے ترکیبی ہیں۔



فرض کرو کہ زاویہ ا و ج = ع

تب و م = و ج جم = قی جم = اور و ن = و ج جب = قی جب =
[اگر نقطہ م را و ممدودہ پر واقع ہو جیسا کہ شکل دوم میں قوت کا جزو ترکیبی و ا کی سمت میں

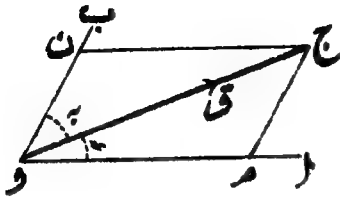
= و م = و ج جم = و م = و ج جم = قی جم =
نیز و ا پر عمود دار جزو ترکیبی = و ن = و ج = و ج جب = و م = قی جب =
پس ہر صورت میں مطلوبہ اجزائے ترکیبی ہیں

قی جم = اور قی جب =
م کسی دی ہوئی قوت کی دی ہوئی سمت میں جزو تحلیل سے وہ جزو ترکیبی مراد ہے
کہ اگر اس کو سمت مذکورہ کی عمودی سمت میں عمل کرنے والے ایک اور جزو ترکیبی
کے ساتھ ترکیب دیا جائے تو وہی ہوئی قوت حاصل ہو۔

مثلاً قوت قی کا جزو تحلیل و ا کی سمت میں قی جم = ہے۔

پس ایک دی ہوئی قوت کا جزو تحلیل معلوم قوت کو اس کی سمت اور دی ہوئی سمت
کے دو میانی زاویہ کی جیب التمام سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۰۔ کسی قوت کو دی ہوئی دو سمتوں میں عمل کرنے والے دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔



فرض کر دو کہ ایک قوت ق ہے جو وج کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ اس کے اجزائے ترکیبی سمتوں و اور ب میں نکالنا مقصود ہے جو ق کی سمت کے ساتھ بالترتیب زاوے α اور β بناتے ہیں۔ ج ہر و ب کے متوازی کھینچو جو

و سے ہر پر ملے اور متوازی الاضلاع ورج بن کی تکمیل کرو، تب و ہر اور وج مطلوبہ اجزائے ترکیبی ہیں۔ چونکہ مثلث ورج کے اضلاع مقابل کے زاویوں کی جیوب کے متناسب ہیں اس لئے

$$\frac{\text{وج}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{و}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ق}}{\text{ج ب (و + ب)}}$$

پس مطلوبہ اجزائے ترکیبی $\frac{\text{ق}}{\text{ج ب (و + ب)}}$ اور $\frac{\text{و}}{\text{ج ب (و + ب)}}$ ہیں۔

طالب علم کو بتور سمجھ لینا چاہیے کہ کسی قوت کے جزو ترکیبی اور جزو تحلیل ایک ہی سمت میں مساوی نہیں ہوتے۔ مثلاً ہم دفعہ ۱۹ میں دیکھ چکے ہیں کہ ق کا جزو تحلیل و کی سمت میں ق جم ہے۔

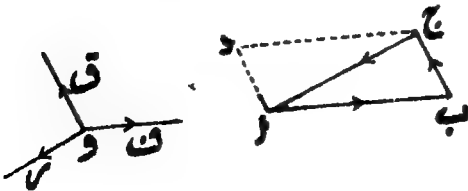
۳۱۔ قوتوں کا مثلث۔ اگر تین متراکض قوتوں کو بلحاظ مقدار اور سمت دونوں کے ایک مثلث کے اضلاع سے بالترتیب ظاہر کیا جائے تو قوتیں متوازن میں ہوتی ہیں فرض کر دو کہ قوتیں و، ب اور ج جو ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں بلحاظ مقدار اور سمت کے ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع ا ب، ب ج، ج ا سے تعبیر

ہوتی ہیں۔ متوازی

الاضلاع

ا ب ج د کی مکمل

کر۔



ب ج اور ڈ د سے وہی قوتیں تعبیر ہوتی ہیں کہ ب ج اور ڈ د مساوی اور متوازی ہیں۔

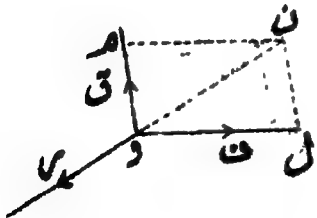
اب قوتوں ڈ ب اور ڈ د کا حاصل قوتوں کے متوازی الاضلاع کی بجائے ا ج سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس لئے ڈ ب ، ب ج اور ج ڈ کا حاصل ج ا کے برابر ہے اور اس لئے صفر ہے۔

پس تین قوتیں ف ، قی ، و متبادل میں ہیں۔

نتیجہ صریح۔ چونکہ قوتیں جو ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں اور ڈ ب ، ب ج اور ج ڈ سے تعبیر ہوتی ہیں متبادل ہوتی ہیں اور نیز جب تین قوتیں متبادل میں ہوں تو ہر ایک قوت باقی دو کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوتی ہے اس لئے یہ نتیجہ صحت سے کہ ڈ ب اور ب ج کا حاصل ج ڈ کے مساوی اور متقابل ہے یسہی ان کا حاصل ج ہے۔

پس اگر دو قوتیں ایک ہی نقطہ پر عمل کریں اور ایک مثلث کے اضلاع ڈ ب اور ب ج سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل مثلث مذکور کے تیسرے ضلع ج ا سے تعبیر ہوگا۔

۲۲۔ قوتوں کے مثلث کا عکس بھی درست ہے یعنی اگر تین متراکز قوتیں ف ،



ق اور د جو ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں باہم متبادل ہوں تو ان کو بھانپ مقدار اور سمت کے ایک مثلث کے اضلاع سے تعبیر کیا جاسکتا ہے جس کے اضلاع بالترتیب قوتوں کی سمتوں کے متوازی ہوں۔

ف اور ق کی سمتوں پر متوازی دل ، دم نا پو جو بالترتیب ان قوتوں کو تعبیر کریں۔ متوازی الاضلاع دل ن ہر کی بھیج کر اور دھن کو ملاؤ۔

چونکہ تین قوتیں ف ، قی ، و متبادل ہیں اس لئے متبادل ف ا ہ

ق کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگا، اس لئے یہ ن و سے تقسیم ہوگا۔
اس لئے یہ تین قوتیں مثلث ول ن کے اضلاع ول ن اور ن و کے
متوازی اور متناسب ہیں۔

اگر کوئی اور ایسا مثلث کھینچا جائے جس کے اضلاع مثلث ول ن
کے اضلاع کے متوازی ہوں تو اس کے اضلاع مثلث ول ن کے اضلاع
کے متناسب اور اسلئے قوتوں کے متناسب ہوں گے۔ نیز اگر کوئی اور مثلث کھینچا جائے جس کے اضلاع
مثلث ول ن کے اضلاع پر نمود ہوں تو اس کے اضلاع مثلث ول ن
کے اضلاع کے متناسب اور بناؤ علیہ قوتوں کے متناسب ہوں گے۔

اس لئے اگر تین قوتیں متعادل ہوں اور ان کی مقداریں معلوم ہوں تو
ہم ان قوتوں کی اصفائی سمتوں کو بذریعہ عمل قسیم نہایت آسانی سے متعین کر سکتے
ہیں۔ اس کے لئے ہمیں صرف ایک مثلث بنالینا چاہیئے جس کے اضلاع قوتوں
کے متناسب ہوں اور مثلث ہمیشہ بنایا جاسکتا ہے تا وقتیکہ دو قوتوں کا مجموعہ
تیسری قوت سے بڑا نہ ہو۔

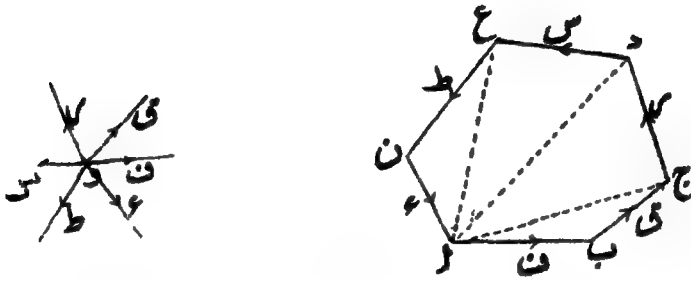
۲۳۔ لامی کا مسئلہ۔ اگر تین قوتیں ایک ذرہ پر عمل کریں اور ذرہ
متعادل رہے تو ہر ایک قوت باقی دو قوتوں کے درمیانی زاویہ کی
جیب کے متناسب ہوگی۔

کیونکہ کسی مثلث میں اس کے اضلاع متقابل کے رادیوں کی جیب کے
متناسب ہوتے ہیں اور گزشتہ دفعہ میں ثابت ہو چکا ہے کہ تین اضلاع کے
متناسب ہوتی ہیں اس لئے

$$\frac{\text{ول}}{\text{جبل ول ن}} = \frac{\text{ن و}}{\text{جبل ول ن}} = \frac{\text{ول}}{\text{جبل ول ن}}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{ف}}{\text{جبل ف و}} = \frac{\text{ن و}}{\text{جبل ف و}} = \frac{\text{ول}}{\text{جبل ف و}}$$

۲۴۔ قوتوں کا کثیر الاضلاع۔ اگر متعدد قوتیں ایک ذرہ پر عمل کریں اور بلحاظ سمت اور مقدار کے ایک کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے بالترتیب تعبیر ہو سکیں تو قوتیں متبادل میں ہوں گی۔



فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کے ضلعے اب، ب، ج، د، ع، ح، ز اور ن بالترتیب و پر عمل کرنے والی قوتوں کو بلحاظ مقدار اور سمت کے تعبیر کرتے ہیں۔ ا، ج، د، ا، ج کو ملاؤ۔

دفعہ ۲۱ کے نتیجہ صریح کی رو سے اب اور ب ج کا حاصل ا، ج سے تعبیر ہوتا ہے۔ اسی طرح سے ا، ج اور ج د کا حاصل ا، د سے تعبیر ہوتا ہے، ا، د اور د ع کا حاصل ا، ع سے تعبیر ہوتا ہے، اور علیٰ ہذا تقیاس ا، ع اور ع ن کا حاصل ا، ن سے تعبیر ہوتا ہے۔

لہذا سب قوتوں کا حاصل ا، ن اور ن ا کے حاصل کے مساوی ہے گویا حاصل معدوم ہو جاتا ہے اور اس لئے قوتیں متبادل ہیں۔

قوتوں کی تعداد خواہ کچھ ہی ہو یہی استدلال ہر صورت پر صادق آئے گا ثبوت سے یہ بھی ظاہر ہے کہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں کا ایک ہی سطح مستوی میں ہونا ضروری نہیں۔

قوتوں کے کثیر الاضلاع کا عکس درست نہیں کیونکہ اگر ہمیں اس کے

اضلاع کی سمتیں معلوم ہوں تو ان سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی نسبتیں متعین نہیں ہو سکتیں مثلاً اوپر کی شکل میں ا ب ہر کوئی نقطہ ا لو اور ا ک کے متوازی ا ک کے کینچو جوع ک سے ک پر ملے، تب نئے کثیر الاضلاع ا ب ج د ع ک کے اضلاع کثیر الاضلاع ا ب ج د ع ک کے اضلاع کے بالترتیب متوازی ہیں لیکن اضلاع صریحاً متناسب نہیں ہیں۔

۲۵۔ دو قوتیں نقطہ و پروا اور و ب کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں اور مقدار میں لہ \times وا اور مہ \times و ب سے تعبیر ہوتی ہیں، تب اُن کا حاصل (لہ + مہ) \times وج سے تعبیر ہوگا۔ جہاں ج، ا ب پر کا ایسا نقطہ ہے کہ لہ \times ج لہ = مہ \times ج ب

کیونکہ دفعہ ۲۱ کے نتیجہ صریح کی رو سے قوت لہ \times وا اُن دو قوتوں کے مساوی ہے جو لہ \times وج اور لہ \times ج لہ سے تعبیر ہوتی ہیں اور اسی طرح سے قوت مہ \times وج قوتوں مہ \times وج اور مہ \times ج ب کے مساوی ہے۔ پس معلومہ قوتیں دونوں مل کر قوت (لہ + مہ) \times وج اور نیز قوتوں لہ \times ج لہ اور مہ \times ج ب کے مساوی ہیں، اب موخر الذکر ایک دوسرے کی تبدیل کرتی ہیں۔

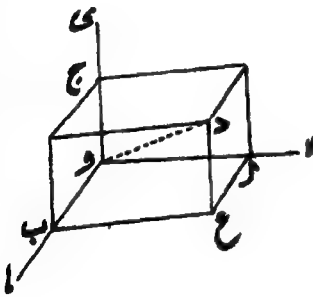
نتیجہ صریح۔ وا اور و ب سے جو قوتیں تعبیر ہوتی ہیں اُن کا حاصل ۲ \times وج ہے جہاں ج، ا ب کا وسطی نقطہ ہے۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ وج اُس متوازی الاضلاع کے وتر و د کا نصف ہے جو متصل اضلاع وا، و ب سے جتا ہے۔

ناقص کے مرکز پر دو مساوی اور مستقل قوتیں سن اور ن س کے متوازی عمل کرتی ہیں۔ ثابت کر دو کہ اس خط مستقیم کا سرا جو ان کے حاصل کو تعبیر کرتا ہے، ایک دائرہ پر واقع ہوتا ہے جو ج میں سے گزرتا ہے۔

(۸) اس امر کی تشریح کر دو کہ کس طرح ایک بادبانی کشتی کو ہوا کی تقریباً مخالف سمت میں چلانا ممکن ہے۔ اگر اس کے بادبان کو ایک استوار سطح مستوی فرض کیا جائے تو بتاؤ کہ کشتی کو آگے بڑانے میں جو قوت عمل کرتی ہے وہ بڑی سے بڑی اس وقت ہو سکیگی جب کشتی کو اس طرح چلا جاوے کہ بادبان اس نادیدہ کی تنصیف کرے جو کشتی کے پینڈے اور ہوا کی ظاہری سمت کے درمیان ہے۔

قوتوں کا متوازی اسطوح تین قوتیں ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں اور بالترتیب و د، و ب، و ج سے تعبیر ہوتی ہیں اب ان کا حاصل اس متوازی اسطوح کے وترود سے تعبیر ہوگا جس کے اضلاع و د، و ب، و ج ہیں۔

کیونکہ دو قوتیں و د، و ب ایک قوت و ع کے مساوی ہیں جہاں و ب و ع متوازی الاضلاع ہے نیز قوتیں و ع اور و ج ایک قوت و د کے مساوی ہیں کیونکہ و ع و ج متوازی الاضلاع ہے۔



اگر متوازی اسطوح مستطیلی ہو

یعنی و د، و ب، و ج قائم محوروں پر لے جا سکیں اور اگر قوتیں و د، و ب، و ج بالترتیب لا ما، اے ہوں تو حاصل ح = م لا + ما + مے اور اس خط پر عمل کرتا ہے جس کے سمتی بیوب التمام جم ا و د، جم ب و د اور جم ج و د ہیں

$$\text{یعنی } \frac{و د}{و د}, \frac{و ب}{و د}, \frac{و ج}{و د} \text{ یعنی } \frac{لا}{ح}, \frac{ما}{ح}, \frac{مے}{ح}$$

برعکس اس کے اگر ایک قوت ح سبدا و پر عمل کرے اور اس کے خط عمل کے سمتی جوب اتمام ل، م، ن ہوں تو اس کے اجزائے ترکیبی محوروں پر لا (ل ح)، ما (م ح)، اور ے (= ن ح) ہونگے۔

۲۷۔ کسی دی ہوئی سمت میں دو قوتوں کے اجزائے تحلیل کا مجموعہ اسی سمت میں ان قوتوں کے حاصل کے جزو تحلیل کے مساوی ہوتا ہے۔

کیونکہ یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر و ا، و ب دو قوتوں کو تعبیر کریں اور و ا ج ب متوازی الاضلاع ہو تو و ا، و ب کے غلوں کا مجموعہ کسی خط و لا پر و ا اور ا ج کے غلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور اس لئے اسی خط پر و ج کے غل کے مساوی ہوتا ہے، لہذا نتیجہ بالا حاصل ہوا۔

۲۸۔ اگر متعدد قوتیں ایک معلومہ نقطہ و پر عمل کرتی ہوں تو ان کے متعادل ہونے کی شرطیں اور ان کا حاصل معلوم کرو۔

کوئی تین باہم عمود وار محور و لا، و ما، و ی لو جو کو میں سے گزریں۔ اور فرض کر کہ دی ہوئی قوتیں ج، ح، وغیرہ ہیں جن کی سمتی جوب اتمام بالترتیب

(ل، م، ن)، (ل، م، ن)، وغیرہ ہیں تب دفعہ ۲۶ کی روشنی ج ان محوروں کے متوازی اپنے اجزائے ترکیبی ل ح، م ح، ن ح کے مساوی ہے

اور ج، اپنے اجزائے ترکیبی ل ح، م ح، ن ح کے مساوی ہے، علیٰ ہذا القیاس اب اگر محوروں کے متوازی کل اجزائے ترکیبی لا، ما، ے ہوں تو

$$لا = ل ح + ل م ح + ل ن ح + \dots$$

$$ما = م ح + م ل ح + م ن ح + \dots$$

$$مے = ح + ن + ح + ن + ح + +$$

$$\text{لہذا دفعہ ۲۶ کی رو سے حاصل قوت } ح = لا + ما + مے$$

$$\text{اور اس کے حاصل کی سمتی جوب اتمام ہیں } \frac{لا}{ح}, \frac{ما}{ح}, \frac{مے}{ح}$$

اگر قوتیں متعادل ہوں تو حاصل ح کو صفر ہونا چاہیئے

$$\text{لہذا } لا + ما + مے = ۰$$

$$لا = ۰, ما = ۰, مے = ۰$$

پس اگر ایک نقطہ پر عمل کرنے والی قوتیں تعادل میں ہوں تو تین علی القویم سمتوں میں ان کے اجزائے ترکیبی کا جبر یہ مجموعہ علیحدہ علیحدہ صفر ہونا چاہیئے۔
برعکس اس کے اگر تین جدا گانہ علی القویم سمتوں میں قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہو تو قوتیں تعادل میں ہونگی۔

اگر گزشتہ دفعہ کی قوتیں ہم سمتی ہوں تو ہمیں ان قوتوں کو ان کے سمتی میں صرف دو سمتوں میں تحلیل کرنا کافی ہے۔

اگر صرف تین ہم سمتی قوتیں ایک نقطہ پر عمل کریں تو تعادل کی شرائط بالعموم لامی کے مسئلے سے نہایت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں (دفعہ ۲۳)

۲۶۔ ایک ذرہ ایک چکنے مادی سخنی یا سطح پر ساکن ہے۔ اس کے

تعادل کی شرائط معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سخنی کے جس نقطہ پر ذرہ ساکن ہے اس کے محدود (لامی) میں اور قوتوں کا طول جو ایک ثابت نقطہ سے ناپا گیا ہے اس ہے۔

سخنی کے تماس کی سمتی جوب اتمام ہیں

$$\frac{فری}{فرس}, \frac{فرا}{فرس}, \frac{فری}{فرس}$$

اور یہ معلوم ہو سکتے ہیں اگر مخنی کی شکل معلوم ہو۔
چونکہ مخنی لچکنا ہے اس لئے قوتوں کا عمل نقطہ تماس پر صرف مخنی کے
عماد کی سمت میں ہو سکتا ہے یعنی مخنی کے تماس کی سمت میں حاصل قوت لازماً
معدوم ہونی چاہیئے اس لئے اگر محوروں کے متوازی وزہ پر عمل کرنے والی
قوتوں کے اجزاء ترکیبی لا، ما، اے ہوں تو

$$لا \frac{فرلا}{فرس} + ما \frac{فرما}{فرس} + اے \frac{فری}{فرس} = ۰$$

اگر مخنی ایک سطح مستوی میں ہو تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$لا \frac{فرلا}{فرس} + ما \frac{فرما}{فرس} = ۰ \quad \text{یعنی لا} + ما \frac{فرما}{فرلا} = ۰$$

اگر وزہ ایک چکنی سطح (لا، ما، اے) کے نقطہ ن پر ساکن ہو تو ن پر
کے کسی ماسی خط میں حاصل ح صریحاً معدوم ہونا چاہیئے۔ پس اجزاء ترکیبی
لا، ما، اے کی حاصل قوت کو جو اس خط پر عمل کرتی ہے جس کی سمتی
جیوب التمام لا، ما، اے کے متناسب ہیں (ن پر کے عماد پر مطبق ہونا
چاہیئے اور ہم جانتے ہیں کہ ن پر کے عماد کی سمتی جیوب التمام ہیں

$$\frac{فرلا}{فرلا}، \frac{فرما}{فرما}، \frac{فری}{فری}$$

$$\frac{فرلا}{لا} = \frac{فرما}{ما} = \frac{فری}{اے}$$

اس لئے

نیز سطح پکلا دی تناسب حاصل قوت

$$لا + ما + اے$$

۳۔ ایک چکنے تار کو ایک ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کی شکل میں بٹا گیا ہے

اس تار پر ایک منگہ ہے جس پر دو قوتیں لانا، ممان بالترتیب محوروں کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ منگہ کے تقادل کا مقام معلوم کرو اور اس صورت پر غور کرو
جبکہ ن = ۱

مقام تعادل ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{L}{L_0} = \frac{F}{F_0} = \frac{L_0}{L} \quad (1) \text{ ناقص کی مساوات ہے}$$

$\frac{1}{(200)^2} + \frac{1}{(200)^2} = \frac{2}{(200)^2}$
 جس سے تعادل کا نقطہ حاصل ہوتا ہے

اگر $n = 1$ تو متبادل کی مساوات (۱) ذیل کی مساوات میں تعویل ہو جاتی ہے

اور اس لئے اگر یہ بشرط پوری ہو تو ذرہ مذکور منحنی کے ہر مقام پر متبادل ہو گا۔ پس اگر نقطہ
لاماہرہ محروم کے متوازی عمل کرنے والی قوتیں $\frac{1}{10}$ اور $\frac{1}{10}$ کے متناسب ہوں
تو ذرہ ہر مقام پر متبادل ہو گا۔

مشق ۲۔ ایک ذرہ ن پر دو قوتیں $\frac{1}{r^2}$ اور $\frac{1}{r^3}$ دو توت کے مرکبوں ۱ اور ۲ کی طرف سے بالترتیب عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ذرہ کسی چکنے منحنی پر ساکن رہ سکتا ہے جس کی مساوات اس شکل کی ہو

$${}^2J_{mm} = (J_m - 1)(J_m)$$

جہاں ان = ر، بان = ہ اور ج کوئی مستقل ہے۔

اگر مطلوبہ چکنے منحنی کی قوس پر کے کسی نقطہ سے قوس وین کا طول میں ہوا
ن پر کا ماس ن تا جو تو قوس کو ن تا کی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$\frac{1}{2} \text{ جم ان ت } + \frac{1}{2} \text{ جم بن ت } =$$

یعنی $\frac{1}{r} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} + \frac{r_2}{r_1 + r_2}$

لہذا مکمل کرنے سے

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \text{مستقل} = \frac{1}{f}$$

$$(r - r') (r + r') = (r + r')^2 = r^2 + r'^2$$

مثالیں

(۱) ایک چمٹا منکھ ایک چکنے ناقص کی شکل کے تار پر پھیل سکتا ہے۔ یہ دو ماسکوں میں اور ہر طرف دو قوتوں سے کھینچتا ہے جو بالترتیب r و r' اور r و r' کے متناسب ہیں۔ تقابلاً کا مقام معلوم کرو۔

(۲) ایک ذرہ r پر دو قوتیں r اور r' دو ثابت نقطوں r اور r' کی طرف عمل کرتی ہیں، ثابت کرو کہ یہ ایک چکنی نالی کے ہر مقام پر ساکن رہ سکتا ہے جس کی مساوات $r = r'$ مستقل ہے جہاں

$$r = r' \quad \text{اور} \quad r = r'$$

اگر اس پر انہی دو نقطوں کی طرف دو مستقل قوتیں r اور r' عمل کریں تو اس کے متناظر نالی کی مساوات $r = r' + r' = r'$ مستقل ہوگی۔

(۳) ایک ذرہ r پر کشش جاذبہ r اور r' ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے اور قوت اندفاع r ایک اور ثابت نقطہ r' سے عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ r

کے ایسے طریق کی مساوات جسکے ہر نقطہ پر پوری کشش صرف ماس کی سمت میں ہے $r = r'$ جم r ۔ جم r ۔ مستقل ہوگی۔ r اور r' دو زاوے ہیں جو r اور r' بالترتیب r و r' کے ساتھ بناتے ہیں۔

اگر قوتیں r اور r' ہوں تو ثابت کرو کہ منحنی کی مساوات $r = r'$ مستقل ہوگی یعنی ایک دائرہ کی قوس ہوگی۔

(۴) ایک عملی مکانی کی شکل کی ہے۔ اس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انحصاری ہے اور اس نیچے کی طرف ہے، ایک وزنی ذرہ کو اس کے اندر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ معین کی سمت میں باہر کی طرف عمل کرنے والی ایسی قوت کے زیر عمل متعادل رہ سکتا ہے جو معین کے طول کی طرح بدے۔ نیز ثابت کرو کہ مٹی کا متناظر تسامع مکانی کے ماسک سے اس کے فاصلہ کے جذر کے متناسب ہوتا ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ چکنی سطح $\frac{3}{11} + \frac{3}{11} + \frac{3}{11} = 1$ پر کا وہ نقطہ جس پر مبداء کی طرف عمل کرنے والی قوت کے زیر عمل کوئی ذرہ ساکن رہ سکتا ہے اس مسافات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$$

(۶) ایک ڈھانچہ آٹھ مساوی ہلکی سلاخوں سے بنا ہوا ہے جن کو اس طرح جوڑا گیا ہے کہ اس سے منظم ہشت سطحی کے نصف کی شکل بنتی ہے۔ اس کو اس کی مربع سطح کے بل افقی سطح پر رکھا گیا ہے اگر اس کے پاس سے ایک وزن و لکھایا جائے تو ثابت کرو کہ ترجیحی سلاخوں پر دباؤ $\frac{1}{16}$ و $\frac{1}{16}$ ہوگا اور افقی سلاخوں پر $\frac{1}{16}$ ہوگا۔

(۷) بارہ مساوی ہلکی سلاخوں کو وصل کرنے سے ایک منظم ہشت سطحی بنایا گیا ہے اس کے ایک کونہ کو ساکن کر کے ڈھانچہ کو ہلکے لٹکا یا لٹکایا گیا ہے اور اس کو وزن کے سوائے باقی سب کوزوں کے ساتھ مساوی وزن بند ہے جس۔ ثابت کرو کہ نیچے کی سلاخوں اور اوپر کی سلاخوں کے تناؤ بالترتیب نسبت ۱:۳:۵ میں ہیں۔

(۸) تین گھبے ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ۹ فٹ ہے، ان میں سے ہر ایک کے ایک ایک سرے کو ایک جگہ جوڑنے سے ایک تہائی بنائی گئی ہے گھبوں کے نیچے کے سرے ایک ایسی گھردری افقی سطح پر قائم ہیں کہ پھسلنا ممکن نہیں۔ ان کے بائیں سے جو مثلث بنتا ہے اس کے اضلاع ۵، ۵، ۹ فٹ ہیں اس کے پاس سے ایک وزن و لکھایا گیا ہے اگر گھبوں پر تناؤ (ت) (ت) (ت) ہوں تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{11} = \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$

$$\frac{1}{11} = \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$$

دوسرا باب

متوازی قوتیں - معیار اثر - جفت

۳۔ ایک استوار جسم پر دو متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ان کا حاصل معلوم کرنا۔

صورت اول - فرض کر دو قوتیں موافق ہیں یعنی ایک ہی سمت میں عمل کرتی ہیں۔

فرض کر دو قوتیں F اور f ہیں جو جسم کے دو نقطوں A اور B پر عمل کرتی ہیں اور بالترتیب خطوں AB اور BC کے ساتھ تعمیر ہوتی ہیں۔

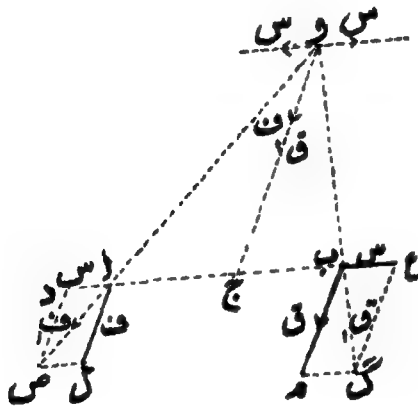
A اور B پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک F کے مساوی ہو اور بالترتیب B اور A کی سمتوں میں عمل کریں اور A اور B سے تعمیر ہوں۔ یہ دو قوتیں ایک دوسرے کی تبدیل کرتی ہیں اور جسم کے توازن پر کچھ اثر نہیں ڈالتیں۔

متوازی الاضلاع $ABCD$ میں AD اور BC کی تکمیل کرو اور AC سے A تک ہلکے بڑاؤ حتیٰ کہ یہ BC میں E کے متوازی کھینچو جو AB سے جا پڑے۔

E پر جو دو قوتیں F اور f عمل کرتی ہیں ان کا حاصل F ہے جو A سے تعمیر ہوتا ہے۔ اس کے نقطہ عمل کو E پر منتقل کر دو۔

اسی طرح B پر عمل کرنے والی قوتیں f اور F کا حاصل f ہے جو B سے تعمیر ہوتا ہے۔ اس کے نقطہ عمل کو B پر لیجا دو۔

اب وہ عمل کرنے والی قوت ف کہ دو قوتوں میں تحلیل کیا جاسکتا ہے جن میں سے ایک قوت س، ا د کے متوازی ہے اور دوسری ف، ا و ج کے متوازی ہے اسی طرح سے قوت ق، کو جو وہ عمل کرتی ہے دو قوتوں میں تحلیل کیا جاسکتا ہے ایک قوت س میں جو ب، ع کے متوازی ہے اور دوسری قوت ق، جو و ج کے متوازی ہے۔ پس ابتدائی قوتیں ف اور ق، ایک قوت (ف + ق) کے مساوی ہیں جو و ج کی سمت میں عمل کرتی ہے یعنی نقطہ ج برابر ابتدائی قوتوں کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ (۲۱)



عمل سے ظاہر ہے کہ و ج، ا اور ا ل ص متشابہ مثلث ہیں

$$\frac{\text{و ج}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{ل ص}} = \frac{\text{ف}}{\text{س}} \text{ یعنی ف} \times \text{ج} = \text{س} \times \text{و ج} \dots (۱)$$

اسی طرح چونکہ مثلث و ج ب اور ب م گ متشابہ ہیں۔ اس لئے

$$\text{ق} \times \text{ج} = \text{ب} = \text{س} \times \text{و ج} \dots (۲)$$

$$\text{اس لئے ف} \times \text{ج} = \text{ا} = \text{ق} \times \text{ج} \text{ یعنی ج} \times \frac{\text{ا}}{\text{ج}} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}}$$

۳۲۔ گزشتہ عمل کے ناممکن ہونے کی صورت۔

۳۴۔ ستوازی قوتیں Q_1, Q_2, Q_3, \dots نقاط A, B, C, \dots پر عمل کرتی ہیں جن کے محدد (A, B, C) اور (A, B, C) ، (A, B, C) ہیں۔ وہ نقطہ معلوم کرو جس پر ان قوتوں کا حاصل عمل کرتا ہے خواہ قوتیں

کسی سمت میں عمل کریں۔
 دفعہ اس کی رو سے آ، اور لم پر عمل کرنے والی قوتوں کا حاصل لم، (کو نقطہ ش) پر قطع کرتا ہے جہاں

$$\frac{ق_۱ - ق_۲}{ق_۱ + ق_۲} = \frac{ش_۱ - ش_۲}{ش_۱ + ش_۲}$$

جہاں ش عمود ہے سطح مستوی لاوا پر۔

$$\frac{ق_۱ + ق_۲}{ق_۱ - ق_۲} = \frac{ش_۱ + ش_۲}{ش_۱ - ش_۲}$$

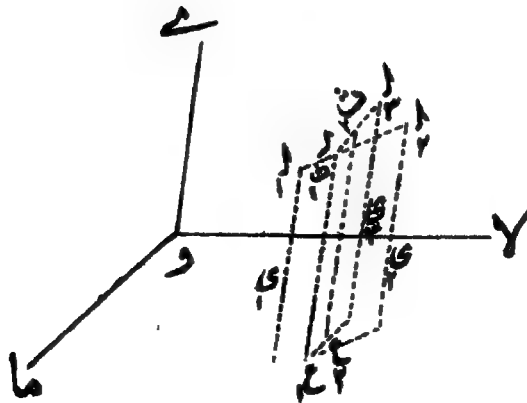
قوت (ق + ق) جو ش پر عمل کرتی ہے اور قوت ق جو لم پر عمل کرتی

ہے ان کا حاصل ش لم کو ش پر قطع کرتا ہے جہاں

$$\frac{ق_۱ + ق_۲}{ق_۱ - ق_۲} = \frac{ش_۱ + ش_۲}{ش_۱ - ش_۲}$$

$$\frac{ق_۱ + ق_۲}{ق_۱ - ق_۲} = \frac{ش_۱ + ش_۲}{ش_۱ - ش_۲} \quad \text{جس سے ش عم} = \frac{(ق_۱ + ق_۲) ش_۱ + ق_۱ ش_۲ + ق_۲ ش_۱ + ق_۲ ش_۲}{ق_۱ + ق_۲}$$

اور علیٰ ہذا القیاس خواہ قوتوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔

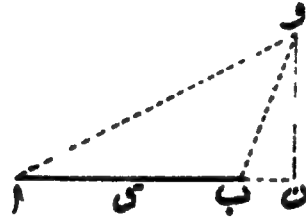
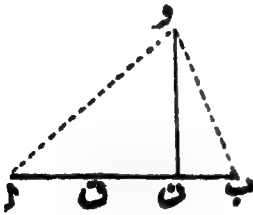


سے وہ مقدار مراد ہے جو قوت مذکور اور اس کے خط عمل سے نقطہ معلومہ کے عمودی فاصلے کو ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثلاً ایک قوت ق کا معیار اثر کسی نقطہ معلومہ و کے گرد ق × ون ہے جہاں ون نقطہ و سے ق کے خط عمل پر عمود ہے۔

یہ بات قابل غور ہے کہ کسی قوت ق کا معیار اثر کسی نقطہ و کے گرد صفر نہیں ہو سکتا تا وقتیکہ قوت صفر نہ ہو یا قوت نقطہ معلومہ میں سے نہ گزرے جس کے گرد معیار اثر لیا گیا ہے۔

فرض کر دو قوت ق کو مقدار سمت اور خط عمل کے لحاظ خط اب سے تعبیر کیا گیا



و اور وب کو ملاؤ

تب قوت ق کا معیار اثر و کے گرد ق × ون یعنی اب × ون ہے۔
لیکن اب × ون مثلث اب و کے رقبہ کا دو چند ہے۔

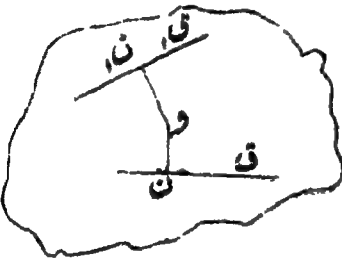
پس قوت ق کا معیار اثر کسی نقطہ کے گرد ہندسی طور پر اس مثلث کے رقبہ کے دو چند سے تعبیر ہوتا ہے جس کا قاعدہ قوت مذکور کو تعبیر کرنے والا خط ہو اور جس کا رأس وہ نقطہ ہو جس کے گرد معیار اثر لیا گیا ہے۔

۳۶۔ ایک نقطہ کے گرد کسی قوت کے معیار اثر کے طبعی معنی۔

فرض کرو کہ جسم ایک مستوی پتہ پر ہے جو ایک چکنے منیر پر راس ہے اور جسم کا نقطہ و ثابت کر دیا گیا ہے، تب قوتِ عامل قی کا اثر یہ ہوگا کہ جسم مرکز و کے گرد گھومے اور یہ اگر صفر نہیں ہوگا تا وقتیکہ (۱) قوت قی صفر نہ ہو یا (۲) قوت قی نقطہ و میں سے نہ گزرے جس صورت میں عمود و قی صفر ہوگا۔

لہذا حاصل ضرب قی \times و قی سے قوت قی کے زیر اثر نقطہ و کے گرد جسم کے سیکڑا کا بہترین معیار معلوم ہوتا ہے جس کی عملی طور پر ذیل کی طرح تصدیق ہو سکتی ہے۔
فرض کرو کہ پتہ درسیوں کے زیر عمل ساکن ہے جن کے تناؤ قی اور قی ہیں اور جو پتہ کے ثابت نقطوں کے ساتھ بندی ہیں اور جن کے خطوط عمل پتہ کے

سطح مستوی ہیں۔ فرض کرو کہ و قی اور و قی ثابت نقطہ و سے قوتوں قی اور قی کے خطوط عمل پر عمود نکالے گئے ہیں۔



اگر ہم طول و قی اور و قی کو نیز قوتوں قی اور قی کو ناپیں تو ہمیں معلوم ہوگا کہ حاصل ضرب قی \times و قی ہمیشہ حاصل ضرب قی \times و قی کے مساوی ہے اس لئے

قوتیں قی اور قی جسم کو نقطہ و کے گرد گھمانے کی مساوی مگر متقابل قابلیت رکھیں گی اگر ان کے معیار دفر نقطہ و کے گرد مساوی ہوں۔

ان قوتوں قی اور قی کو اس طرح ناپ سکتے ہیں کہ رسیوں کو ہلکی چکنی برنجیوں پر سے گزارا جائے اور ان کے ر دہ پر اس قدر اوزان لٹکا دئے جائیں کہ متبادل پیدا ہو جائے۔ یہ اوزان رسیوں کے تناؤ قی کے ناپ ہونے پر رسیوں کو کمانی دار خزانوں کے کندوں سے باندھا جائے اور ان ترازوں کو مشعل دفعہ اس کے پڑھ لیا جائے۔

۴۔ مثبت اور منفی معیار اثر۔ دفعہ ما قبل میں اگر صرف ایک ہی قوت قی پتہ پر

پر عمل کرے تو جسم کو گھڑی کی سوئیوں کے مخالف سمت میں گھمایلی جبکہ گھڑی میز پر اس طرح رکھی ہے کہ اس کا رخ اوپر کو ہے۔ برعکس اس کے اگر صرف قوت فیہ چترے پر عمل کرے تو وہ جسم کو اسی سمت میں گھمائے گی جس سمت میں گھڑی کی سوئیاں حرکت کرتی ہیں نقطہ د کے گرد ق کے معیار اثر کو جو سمت میں ہے مثبت معیار اثر کہتے ہیں اور ق کے معیار اثر کو جو سمت میں ہے منفی معیار کہتے ہیں۔

(۲۶)

ایک نقطہ کے گرد متعدد قوتوں کے معیار اثروں کے جبری مجموعہ سے ان قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ مراد ہوتا ہے جبکہ ہر معیار اثر کو اس کی مناسب علامت کے ساتھ لیا جائے۔

۳۸۔ کسی دو قوتوں کے معیاروں کا جبری مجموعہ جو ان کی سطح مستوی کے کسی نقطہ د کے گرد لیا گیا ہے اسی نقطہ کے گرد ان کے حاصل کے معیار اثر کے مساوی ہوتا ہے۔

صورت اول۔ فرض کر دو قوتیں F اور Q ایک دوسرے سے نقطہ A پر ملتی ہیں۔

و سے خارج قوت کی سمت کے متوازی کمیونج تاکہ Q کے خط عمل سے باہر لے۔

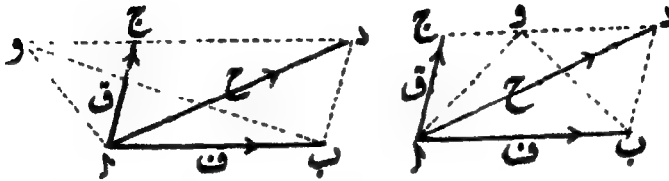
فرض کر کہ A قوت کی مقدار کو تعبیر کرتا ہے اسی پیمانہ پر قوت F کو اب سے تعبیر کر۔

متوازی الاضلاع $ABAC$ کی تکمیل کر دو AB و AC کو ملاؤ۔ تب BC قوتوں F اور Q کے حاصل R کو تعبیر کرے گا۔

(۳) اگر دو اید A کے باہر ہو جیسا کہ شکل اول میں دکھایا گیا ہے تو ہمیں ثابت کرنا چاہیے کہ

$$r \Delta AB + r \Delta AC = r \Delta BC$$

کیونکہ ف اور ق کے معیار اثر نقطہ و کے گرد ایک ہی سمت میں ہیں۔



چونکہ اب اور و د متوازی ہیں اس لئے $\Delta \text{و اب} = \Delta \text{د اب}$
 $\Delta \text{د اب} = \Delta \text{ج د}$

$\therefore \Delta \text{و اب} + \Delta \text{و ج} = \Delta \text{د اب} + \Delta \text{د ج} = \Delta \text{و ج} + \Delta \text{و د}$
 (بہ) اگر و زاویہ ج د کے اندر واقع ہو جیسا کہ شکل دوم میں دکھایا گیا ہے تو ہمیں ثابت کرنا چاہیے کہ $\Delta \text{و اب} - \Delta \text{و ج} = \Delta \text{و د}$

(کیونکہ ف اور ق کے معیار اثر و کے گرد مخالف سمتوں میں ہیں حسب سابق)
 $\Delta \text{و اب} = \Delta \text{د اب} = \Delta \text{ج د}$

اس لئے $\Delta \text{و اب} - \Delta \text{و ج} = \Delta \text{و ج} - \Delta \text{و ج} = \Delta \text{و د}$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ قوتیں ف اور ق متوازی ہیں۔
 و سے واجب با قوتوں اور ان کے حاصل ج $(= ف + ق)$ پر عمل دیکھیں جو تاکہ ان سے بالترتیب ا ب اور ج پر لے۔

دفعہ ۳ کی رو سے $ف \times ج = ق \times ج$ ب ۔ ۔ ۔ ۔ (۱)

اس لئے ف اور ق کے معیار اثر وں کا مجموعہ نقطہ و کے گرد

$$= ق \times و ب + ف \times و ا = ق (و ج + ج ب) + ف (و ج - ج ب)$$

$$= (ف + ق) \times و ج ، مساوات (۱) سے$$

$$= حاصل کا معیار اثر و کے گرد۔$$

ان صورتوں میں جبکہ نقطہ و کا کوئی اور مقام ہو، تو قوتیں متوازن ہوں اور مخالفہ ہوں اس مسئلہ کا ثبوت طالب علم بہ آسانی فراہم کر سکتا ہے۔

۳۹۔ اگر نقطہ و جس کے گرد معیار اثر لئے گئے ہیں حاصل قوت کے خط عمل پر واقع ہو تو حاصل کا معیار اثر اس نقطہ کے گرد صریحاً صفر ہوگا۔ لہذا اس صورت میں نقطہ مذکور کے گرد ترکیبی قوتوں کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ صفر ہو جاتا ہے پس دو قوتوں کے معیار اثر ان کے حاصل کے خط عمل پر کے کسی نقطہ کے گرد مساوی اور مختلف العلامت ہوتے ہیں۔

۴۰۔ معیار اثروں کا عام مسئلہ۔ اگر متعدد قوتیں ف، ا، ق، ب، ا، س۔

ایک ہی مستوی میں ایک استوار جسم پر عمل کریں تو ان کے مستوی میں کسی نقطہ و کے گرد ان کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ اس نقطہ کے گرد ان کے حاصل کے معیار اثر کے مساوی ہوگا۔

فرض کرو کہ ف حاصل ہے ف اور ق کا

اور ف حاصل ہے ف اور س کا

اور ف حاصل ہے ف اور ا کا

علیٰ ذہن قیاس یہاں تک کہ آخری حاصل لجا ئے۔

تب ف کا معیار اثر و کے گرد = ف اور ق کے معیار اثروں کے مجموعہ کے

(صفحہ ۱۳۸)

نیز ف کا معیار اثر و کے گرد = ف اور س کے معیار اثروں کے مجموعہ کے

= فن اور قی اور فن کے معیار اثروں کے مجموعہ کے
اسی طرح سے فن کا معیار اثر و کے گرد = فن اور قی کے معیار اثروں کے مجموعہ کے
= فن / قی، سما اور مس کے معیار اثروں کا مجموعہ
علیٰ ہذا قیاس یہاں تک کہ سب قوتیں محسوب کر لی جائیں۔

پس آخری حاصل کا معیار اثر

= ترکیبی قوتوں کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ۔
۴۱۔ دفعہ ۳۹ کی مانند یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ قوتوں کی کسی تعداد
کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ ان کے حاصل کے خط عمل پر کے کسی نقطہ کے گرد
صفر ہوتا ہے اور برعکس اس کے اگر قوتوں کی کسی تعداد کے معیار اثروں کا جبری
مجموعہ کسی نقطہ کے گرد صفر ہو تو ان کا حاصل اس نقطہ میں سے گزرے گا جس کے
گرد معیار اثر لگے گئے ہیں، یا ان کا حاصل صفر ہو گا اور اس صورت میں قوتیں
متعادل ہونگی۔

(۲۸)

پس اسی طرح ہم قوتوں کے نظام کے حاصل کے خط عمل پر متعدد نقطہ معلوم
کر سکتے ہیں۔ کیونکہ ہمیں صرف ایک ایسا نقطہ معلوم کرنا پڑیگا جس کے گرد قوتوں کے
معیار اثروں کا جبری مجموعہ صفر ہو جائے۔ تب حاصل کو اس خط میں سے گزرنے والا لازم
ہو گا۔

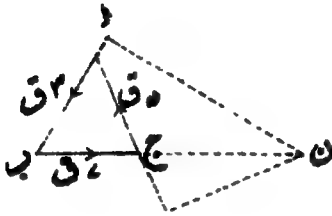
اگر ہمارے پاس متوازی قوتوں کا ایک نظام ہو تو حاصل قوت مقدار اور سمت
دونوں کے لحاظ سے متعین ہو جاتی ہے جبکہ ان کے حاصل کے خط عمل کا ایک
نقطہ معلوم ہو جائے۔

مثال۔ تین قوتیں جو ۳، ۴، ۵ کے مساوی ہیں متساوی الامتلاء
خلت اب ج کے امتلاء اب، ب ج، ج ج کی سمتوں میں مل کر تی رہا ان کے
حاصل کی سمت اور خط عمل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ خلث کا ہر متعلق ہے، نیز فرض کرو کہ حاصل قوت متعلق ب ج سے ہے
پر ملتی ہے، تب قوتوں کے معیار اثروں کے گرد معدوم ہو جائے گی۔

$$۳ ق \times (۳ ج + ۱ ج) = ۶۰ = ۵ ق \times ج ج جب ۶$$

$$\text{ج} = \frac{۱۳}{۲}$$



ج کے عمود درست میں قوتوں کے
اجزائے ترکیبی کا مجموعہ

$۵ ق جب ۹۰ - ۳ ق جب ۹۰ = ۱۳ ق$
نیز ج کی سمت میں قوتوں
کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ

$$۵ ق - ۳ ق جب ۹۰ - ۳ ق جب ۹۰ = ۳ ق$$

پس حاصل قوت $= ۳ ق$ اور ج کے ساتھ زاویہ $\frac{۱۳}{۳}$ یعنی ۲۰ بنائی
ہے اور ن میں سے گزرتی ہے جہاں $ج = \frac{۱۳}{۲}$ ج

مثالیں

- (۱) ایک مثلث ج کے اندر کی سمتوں میں قوتیں جو بالترتیب د، ب، ج
ج کے متناسب میں عمل کرتی ہیں، ثابت کرو کہ ان کا حاصل لمبا خط مقدار اور سمت کے
ج سے تغیر ہوگا۔ اور اس کا خط عمل ج سے نقطہ لا پرے گا جہاں ج کا ج
- (۲) د، ب، ج ایک مثلث ہے اور د، ع، ف اس کے اضلاع کے وسطی نقطے
ہیں۔ قوتیں جو بالترتیب د، ب، ج اور ج، ف سے تغیر ہوتی ہیں اور د اور ب کے
کے نقطہ تقاطع پر عمل کرتی ہیں، ثابت کرو کہ ان کا حاصل لمبا خط مقدار اور سمت کے
ج سے تغیر ہوتا ہے اور اس کا خط عمل ج کو نسبت ۱:۲ سے تقسیم کرتا ہے۔
- (۳) تین قوتیں ایک مثلث کے اضلاع کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر
دو قوتوں کا مجموعہ تیسری قوت کے سادسی لمبا خط مقدار اور مقابل لمبا خط سمت ہو تو ان تین
قوتوں کا حاصل مثلث کے افرونی دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔
- (۴) ایک برقی تار بجلی کے کھمبے کے گرد ہو کر گزرتا ہے تار افقی کے متوازی ہے اور کھمبے کے
گرد پلٹھوئے سرے ایک دوسرے سے ۹۰ کا زاویہ بناتے ہیں کھمبا ایک تار کے

سہارے قائم ہے جو اس کے وسطی نقطہ سے بندھا ہے اور افق سے ۹۰ کا زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس تار کا تناؤ برقی تار کے تناؤ کا ۴/۳ حصہ گنا ہے۔

(۵)۔ ایک رسی ہے جس کا طول دیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ اس کے ایک سرے کو ایک ستون کے قاعدے سے کھینچ کر بلندی پر باندھا جائے کہ زمین پر کھڑا ہو ایک شخص ایک دی ہوئی قوت سے اس کے دوسرے سرے کو کھینچے تو ستون الٹ سکنے کا بڑے سے بڑا میلان رکھے۔

(۶)۔ ایک قوت کی مقدار معلوم ہے اور اس کے معیار اثر دو دئے ہوئے نقطوں اور اس کے گرد معلوم ہیں۔ ہندسی عمل سے اس کا خط عمل معلوم کرو۔

(۷)۔ بلحاظ مقدار درست دو قوتیں دی ہوئی ہیں۔ ستوی کے ان تمام نقطوں کا طریق معلوم کرو جس کے گرد ان قوتوں کا معیار اثر مقدار درست میں ایک ہی ہے۔

(۸)۔ اے ب ایک : اے ب کا نظریہ اور ب ا اور ب ق اور ب ق ایک دوسرے پر عملی اتقواؤں دو دو ہیں۔ ثابت کرو کہ ان قوتوں کے معیار اثر جو ب ق اور ب ق سے تیسرے ہوتی ہیں اس کے گرد مساوی ہیں۔

(۹)۔ ایک شخص اپنے کندھے پر ایک چھڑی رکھے ہے اور چھڑی کے ایک سرے پر ایک گھٹیا اٹھائے جا رہا ہے اگر اس کے ہاتھ اور کندھے کے درمیانی فاصلہ کو بدلا جائے تو ہاتھ کو اس سے اس کے کندھے پر کے ہاتھ میں کیا تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

(۱۰)۔ ایک سائیکل سواری کا وزن ۱۵۰ پونڈ ہے، وہ اپنا تمام وزن سائیکل کے ایک ہائے وزن پر ڈال دیتا ہے جبکہ پائے وان افقی ہے اور سائیکل کو آگے بڑھنے سے کسی طرح مدد نہ کیا گیا ہے۔ لہذا بغیر کا تناؤ معلوم کرو جبکہ کرینک کا طول ۶ انچ ہو اور زنجیر کے پتے کا نصف قطر ۲ انچ ہو۔

(۱۱)۔ ایک خط توڑنے کی حراد ایک قائم الزاویہ متساوی اساقین مثلث اے ب ج کی شکل کے یکساں پترے پر مشتمل ہے جس کا وزن ۴ اونس ہے اس کو اس کے زاویہ قائمہ ج سے ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے جس کے ساتھ ایک خافوقی فڈری بھی لٹکائی ہوئی ہے اس کے متعلق اے ب پر ایک پابند مقوش ہے جس پر نشان ۱ اونس ۲ انہی وغیرہ ہیں۔ کسی خط کا وزن معلوم کرنے کے لئے اس کو اس کے سرے پر پھلانگتے

ہیں اور جس مقام پر بنا قوی ڈوری پائندہ کو قطع کرتی ہے اس کو پائندہ میں پڑھ لیتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اسے نشانات کے فاصلہ سلسلہ موسیقی میں ہیں۔

(۱۲) پتوں کا ایک تاش میز پر رکھا گیا ہے جس کا ہر پتہ اپنے سے پہلے پتہ سے طول کے رخ باہر نکلا ہوا ہے۔ اگر ہر پتہ اتنا باہر نکلا ہوا ہو جتنا کہ ممکن ہے تو ثابت کرو کہ یکے بعد دیگرے پتوں کے سروں کے درمیانی فاصلے ایک سلسلہ موسیقی بناتے ہیں۔

(۱۳) ایک اسطوانہ کا طول ب ہے اور اس کے قاعدہ کا قطر ج ہے اسطوانہ کا منہ کھلا ہے اور اسطوانہ ایک افقی سطح پر رکھا ہوا ہے۔ ایک یکساں سلاح جزر اسطوانہ کے اندر ہے اور اس کے اوپر کے اور نیچے کے کناروں کو مس کرتی ہے۔ اگر اسطوانہ کا وزن سلاح کے وزن کا ن گنا ہو تو سلاح کا طول معلوم کرو جبکہ اسطوانہ الٹنے کے عین قریب ہو۔ (۱۴)

جنت

۴۲۔ تعریف۔ دو مساوی مگر مخالف توازی قوتیں جن کے خطوط عمل ایک ہی نہیں ہیں جنت بناتی ہیں۔ بعض مصنف جنت کی بجائے اصطلاح چھیدگی استعمال کرتے ہیں اور اس اصطلاح جنت سے جنت کے معیار اثر کو تعبیر کرتے ہیں۔ جنت کی مثال کے لئے ملاحظہ ہوں وہ قوتیں جو ایک ہیج شکنجہ کے دست پر لگائی جاتی ہیں یا گھڑیال کو چابی دیتے وقت چابی پر جو قوتیں لگائی جاتی ہیں یا دروازے کو کھولنے کے لئے اس کے دست پر ہاتھ سے جو قوت لگائی جاتی ہے۔ جنت کے بازو سے وہ عمودی فاصلہ مراد ہوتا ہے جو اس کی دو قوتوں کے خطوط عمل کے درمیان ہو۔

جنت کے معیار اثر سے جنت کی ایک قوت اور جنت کے بازو کا حاصل ضرب مراد ہوتا ہے مثلاً جنت (ق) کا بازو (ب) ہے اور اس کا معیار اثر (ق) × (ب) ہے۔

جنت کی سطح مستوی میں کسی نقطہ و سے جنت کی قوتوں کے خطوط عمل پر ایک عمودی خط (ب) کھینچو جو ان قوتوں سے (ا) اور (ب) پر ملے۔

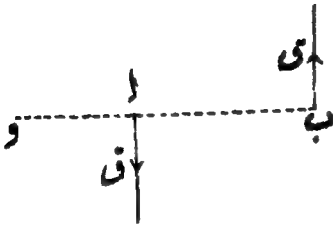
تب و کے گرد قوتوں کے معیار افردوں کا جبری مجموعہ

$$= ق \times و ب - ق \times و ا$$

$$= ق \times ا ب$$

= جنت کا معیار اف

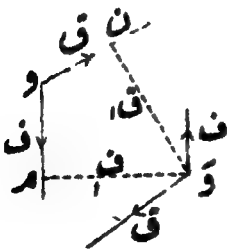
اس سے ظاہر ہے کہ خواہ نقطہ
و کہیں لیا جائے اس کے گرد معیار
اف ہمیشہ وہی رہتا ہے۔



۴۳۔ اگر دو جنت ایک استوار جسم پر ایک ہی مستوی میں عمل کریں اور
ان کے معیار اثر مساوی اور مخالف ہوں تو وہ ایک دوسرے کا توازن
کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک جنت کی دو قوتیں (ف، ف) ہیں جو بازو ف کے
سروں پر عمل کرتی ہیں اور دوسرے جنت کی قوتیں (ق، ق) ہیں جو بازو ق کے
سروں پر عمل کرتی ہیں۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ ایک قوت ف ایک قوت ق سے کسی نقطہ و پر
ملتی ہے اور دوسری دو قوتیں، و اور
ملتی ہیں۔



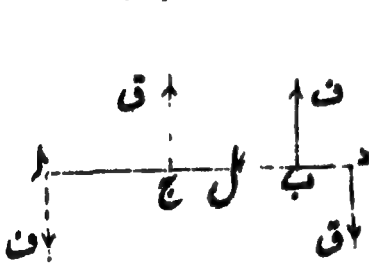
خسے ان قوتوں پر جو و میں سے ہیں
گزرتیں عمود و قہر اور و قہر کینچروان
عمودوں کے طول صریحاً ف اور ق
ہوں گے۔

چونکہ جنوں کے معیار اثر مقدار
میں مساوی ہیں اس لئے

$$ف ف = ق ق$$

لہذا دفعہ ۴ کی رو سے نقطہ و قوتوں ف اور ق کے (جو میں سے گزرتی ہیں) حاصل پر واقع ہوگا اس لئے دو حاصل کا خط عمل ہے۔
 اسی طرح سے ف اور ق (جو میں سے گزرتے ہیں) کے حاصل کا خط عمل دو ہے۔
 نیز یہ دونوں حاصل مقدار میں مساوی ہیں کیونکہ وہ پر عمل کرنے والی قوتیں کو بہ عمل کرنے والی قوتوں کے بالترتیب مساوی ہیں اور نیز اسی نادیہ پر عمل کرتی ہیں۔
 صورت دوم۔ فرض کر دو کہ جتنوں کو بنانے والی قوتیں سب متوازی ہیں اور کوئی خط مستقیم چاہی سمستوں پر عمود طار ہے ان سے نقاط ا، ب، ج، د، پر ملتا ہے پس یہ دونوں حاصل ایک دوسرے کو معدوم کرتے ہیں اور اس لئے وہ چار قوتیں جن سے دو جنت بنتے ہیں۔ توازن میں ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اب چونکہ معیار اثر مساوی ہیں اس لئے

ف × اب = ق × ج د (۱)



فرض کر دو کہ ج پر عمل کرنے والی قوت ق اور ب پر عمل کرنے والی قوت ف کے حاصل کا نقطہ عمل ل ہے۔ لہذا

ف × ب ل = ق × ج کی (۲)

..... (۲) وضاحت

(۲) کو (۱) میں سے تفریق کرنے سے

$$ف \times ل = ق \times ل د$$

پس ل پر عمل کرنے والی قوت ف اور د پر عمل کرنے والی قوت ق کے حاصل کا نقطہ عمل بھی ل ہے۔

لیکن ان دونوں حاصلوں کی مقدار ف + ق ہے اور ان کی سمتیں متقابل ہیں اس لئے یہ متبادل میں ہیں۔ لہذا یہ دو جنت جن چار قوتوں پر مشتمل ہیں وہ باہم متوازن ہیں۔

۴۴۔ چونکہ ایک ہی سطح مستوی کے دو جنت جن کے معیار اثر مساوی اور مخالف ہوں ایک دوسرے کا متبادل کرتے ہیں اس لئے اگر ہم ان جنتوں میں

سے ایک جنت کی قوتوں کی سمتوں کو بدل دیں تو ظاہر ہے کہ ایک ہی مستوی میں مساوی معیار اثروں والے دو جنت ایک دوسرے کے معادل ہوتے ہیں۔

۴۵۔ اگر ایک استوار جسم پر ایک ہی سطح مستوی میں متعدد جنت عمل کریں تو یہ سب مل کر ایک جنت کے مساوی ہوتے ہیں جس کا معیار اثر جنتوں کے معیار اثروں کے جبر یہ مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کر کہ جنت ذیل کی قوتوں پر مشتمل ہیں، قوتوں (ف، ا، ف) کا جنت جس کا بازو ف، قوتوں (ق، ا، ق) کا جنت جس کا بازو ق ہے، قوتوں (س، ا، س) کا جنت جس کا بازو س ہے، وغیرہ وغیرہ۔ جنت (ق، ا، ق) کی بجائے ایک اور جنت لگاؤ جس کے اجزائے ترکیبی کا خط عمل وہی ہو جو قوتوں (ف، ا، ف) کا ہے۔ اگر اندر جنت کی ہر ایک قوت کی مقدار لا ہوگی جہاں لا \times ف = ق \times ق (دفعہ ۳۳) لیا

$$لا = ق \times \frac{ق}{ف}$$

اسی طرح جنت (س، ا، س) کو نکال کر اس کی بجائے جنت (س، ا، س) رکھو جس کی قوتیں اسی خط میں عمل کرتی ہیں جس میں قوتیں (ف، ا، ف) عمل کرتی ہیں۔ اسی طرح دوسرے جنتوں کے لئے۔

پس سب جنت مل کر ایک ایسے جنت کے مساوی ہیں جس کی ہر ایک قوت

$$ف + ق \times \frac{ق}{ف} + س \times \frac{س}{ف} + \dots$$

اس جنت کا معیار اثر ہے

$$ف + ق + س + \dots$$

پس ابتدائی تمام جنت مل کر ایک جنت کے مساوی ہیں جس کا معیار اثران کے معیار اثروں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اگر سب ترکیبی جنتوں کی علامت ایک ہی نہ ہو تو بھی وہی ثبوت صادق آئیگا۔

۴۶۔ کسی جنت کا اثر ایک استوار جسم پر وہی رہیگا اگر اس کو اس کی سطح مستوی کے متوازی کسی دوسری سطح مستوی میں منتقل کر دیا جائے اور اس کا بازو اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہے۔

فرض کرو کہ جنت دو قوتوں (ق، ق) پر مشتمل ہے جس کا بازو اب ہے اور قوتوں کے خط عمل ا ج اور ب د ہیں۔

فرض کرو کہ اب کوئی خط ہے جو اب کے متوازی اور مساوی ہے۔ ا ج اور ب د بالترتیب ا ج اور ب د کے مساوی اور متوازی کھینچو۔

ا پر دو مساوی اور متقابل قوتیں ہر ایک ق کے مساوی لگاؤ جو ا ج کی سمت میں اور اس کے مقابل سمت ا ج میں عمل کریں۔

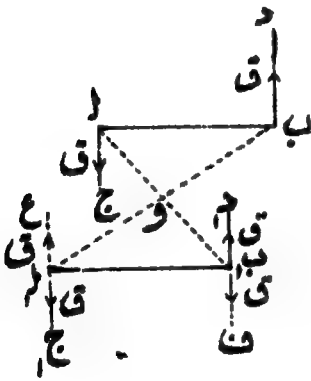
اسی طرح ب پر دو مساوی اور متقابل قوتیں ہر ایک ق کے مساوی لگاؤ

جو ب د کی سمت میں اور اس کے متقابل سمت ب د میں عمل کریں۔

ان قوتوں کے داخل کرنے سے جسم کے توازن پر کوئی اثر نہیں پڑیگا۔

اب ا اور ب کو لگاؤ اور فرض کرو کہ وہ دہر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب د، ا ب اور ا ب کا وسطی نقطہ ہوگا۔

اب ایک قوت ق، ا پر عمل کرتی ہے اور ایک قوت ق، ب پر



سمت کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ اس لئے ان کا حاصل ۲ فی نقطہ و ہراج کے متوازی عمل کرتا ہے۔
اسی طرح ایک قوت ق نقطہ ب پر عمل کرتی ہے اور ایک اور قوت ق
ا پر ہراج کی سمت میں عمل کرتی ہے، ان دونوں کا حاصل ۲ ق، دو پر ب د کے
متوازی عمل کرتا ہے۔

یہ دونوں حاصل مساوی اور متقابل ہیں اور اس لئے ایک دوسرے کا موازنہ
کرتے ہیں اب چارے پاس صرف دو قوتیں بچتی ہیں، ایک قوت ق جو ا پر ہراج
کی سمت میں عمل کرتی ہے اور ایک قوت ق ب پر ب د کی سمت میں عمل کرتی
ہے۔ یہ قوتیں صرف ایک جنت بناتی ہیں جس کا بازو اور قوتیں ابتدائی جنت کے
بازو اور قوتوں کے مساوی اور متوازی ہیں۔

نیز ا ج اور ب د کی سطح مستوی ا ج اور ب د کی سطح مستوی کے متوازی
ہے اس لئے مسئلہ ثابت ہوا۔

نتیجہ صریح۔ دفعہ ۴م کے مسئلہ کی مدد سے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ کسی جنت کی
جائے ہم کوئی اور جنت رکھ سکتے ہیں جو اول الذکر جنت کی سطح مستوی کے متوازی
کسی سطح مستوی میں عمل کرے بشرطیکہ دونوں جنتوں کے معیار اخ مساوی ہوں۔
۴م۔ جنت کے محور سے ایک ایسا خط دھنا مراد ہوتا ہے جو جنت کی سطح مستوی
کے کسی نقطہ و میں سے اس سطح مستوی پر عمود وار کھینچا جائے اور جس کا طول جنت
نہ کر کے معیار اثر کے متناسب ہو۔ اب یہ معلوم کرنے کے لئے کہ و میں سے خط
ون کس سمت میں کھینچنا چاہیے یعنی و ق کی سمت متعین کرنے کے لئے ذیل
کی قرارداد یاد رکھنا چاہیے۔

فرض کرو کہ جنت کی سطح مستوی میں ایک گھڑی پڑی ہے۔ اگر جنت کی وجہ سے
جسم کی گردش گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں ہو تو محور کو گھڑی کے
بالائی رخ سے اوپر وار کھینچنا چاہیے لیکن اگر جنت کی باعث جسم کی

حرکت سویوں کی سمت کے مخالف ہو تو محور گھڑی کی پشت میں سے نیچے وار کھینچا جا رہی ہے۔

دفعہ ۲۲ کی شکل میں وہ محور جو ولا کی مثبت سمت میں کھینچا جائے گا ماسے کے مستوی میں اس جنت کو تعبیر کرے گا جو جسم کو دھاتے دے کی سمت میں گھمائے۔ برعکس ازاں وہ محور جو ولا و محدود کی سمت میں کھینچا جائے گا ماسے کے مستوی میں اس جنت کو تعبیر کرے گا جو جسم کو دے سے دھاتے کی سمت میں گھمائے۔

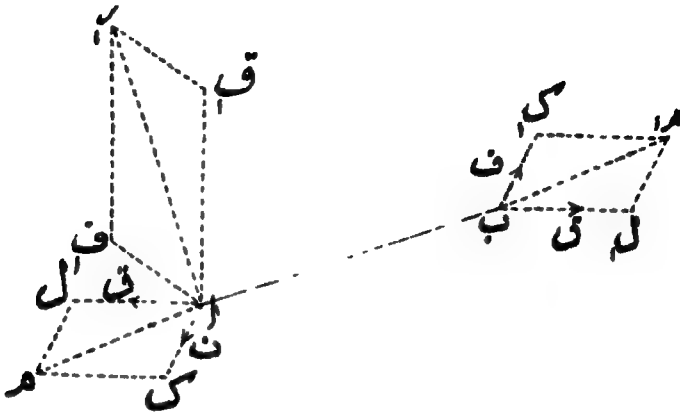
پس محاور ولا، دھاتے دے کے گردش جنتوں کی گردش کی سمتیں گردش فی ترتیب مانتے ہیں۔

دفعہ ۲۳ سے ظاہر ہے کہ اگر کسی جنت کا معیار از اور اس کی سطح مستوی معلوم ہو تو اس کا اثر معلوم ہو سکتا ہے۔ یعنی جب کسی جنت کا معیار از اور اس کی سطح پر عماد کی سمت معلوم ہو یا جب کسی جنت کا محور بلحاظ مقدار اور سمت کے معلوم ہو تو جنت کا اثر معلوم ہو سکتا ہے۔

۴۸۔۔۔ دو ایسے جنتوں کا حاصل معلوم کرو جن کے مستوی متوازی نہیں ہیں۔

فرض کرو کہ ان جنتوں کے مستوی خط اب پر ملتے ہیں۔
اب اگر ان جنتوں میں سے ہر دو کا بازو اب نہ ہو تو دونوں جنتوں کو ان کے مستویوں میں اس طرح تبدیل کرو کہ ہر ایک کا بازو اب ہو جائے لیکن ان کے معیار ازوں میں فرق نہ آئے (دیکھو دفعہ ۴۵)۔

فرض کرو کہ اس بازو کے ساتھ پہلے جنت کی قوتیں اک اور ب یک ہیں جن میں سے ہر ایک ف کے مساوی ہے اور دوسرے جنت کی قوتیں اک اور ب یک ہیں جن میں سے ہر ایک ق کے مساوی ہے، متوازی الاضلاع اک مرل اور ب یک مرل کی تکمیل کرو۔ تب ظاہر ہے کہ ا پر قوتیں ف اور ق ترکیب پا کر ایک قوت کے مساوی ہو جاتی ہیں جو ا دھاتے



تعبیر ہوتی ہے اور ب پر کی تو قیں ف اور ق ایک قوت ب مہر ہو جاتی ہیں جو اہم
کے مساوی متوازی اور متقابل ہے۔

پس دو جنت مل کر ایک جنت بن جاتے ہیں۔
سطوح مستوی ک اب ک اور ل اب ل پر عمود اور اف اف
کینچ جو جنتوں کے محوروں کو تعبیر کریں، تب

$$\frac{\text{اف}}{\text{اق}} = \frac{\text{جنت (ف، ن) کا معیار اثر}}{\text{جنت (ق، ا) کا معیار اثر}} = \frac{\text{ف} \times \text{اب}}{\text{ق} \times \text{اب}} = \frac{\text{اک}}{\text{ال}}$$

پس اف اور اق بالترتیب اک اور ال پر عمود دار ہیں اور ان کے
متناسب ہیں۔ اس لئے اگر ہم متوازی الاضلاع اق مہر اف کی تشکیل کریں تو
ا مہر پر عمود ہوگا اور اس کے متناسب ہوگا۔ ب

جنت (ف، ن) کا معیار اثر = جنت (ق، ا) کا معیار اثر = جنت (ا مہر ب مہر) کا معیار اثر
پس ا مہر حاصل جنت کا محور ہے۔

لہذا دو معلوم جنتوں کی ترکیب سے ایک جنت حاصل ہوتا ہے جس کا محور
معلوم جنتوں کے محور کو متوازی الاضلاع کے قانون کے مطابق ترکیب دینے

مر = مر + مر + = (م) محروم کے گرد،

اور ن = ن + ن + = (ن) محرومی کے گرد

یہ جنت ترکیب پاکر ایک واحد جنت بن جاتے ہیں جس کا معیار اثر

گ = مال + مر + ن |

ہے اس اس کے مور کی سستی جو بہ التمام ل، م، ن ہیں۔

۵۔ اگر ایک واحد قوت اور ایک جنت کسی استوار جسم بہ ایک ہی سطح مستوی میں عمل کریں تو ان سے توازن پیدا نہیں ہو سکتا بلکہ یہ دونوں ایک ایک واحد قوت کے معادل ہوتے ہیں جس کا خط عمل ابتدائی قوت کے خط عمل کے متوازی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ جنت دو مساوی قوتوں (ف، ف) پر مشتمل ہے جس کے خط عمل وہ اور ج ہیں۔ نیز واحد قوت ق ہے۔

اگر ق جنت کی قوت کے متوازی نہ ہو تو اس کے خط عمل کو بڑھاؤ حتیٰ کہ یہ جنت کی ایک قوت سے دہر جائے۔ تب ف اور ق جو دہر عمل کرتے ہیں ایک واحد قوت کے معادل ہیں جو د اور وہا کے درمیان ایک سمت دل میں عمل کرتی ہے۔

اب لی کو (اگر ضرورت ہو تو پیچھے کی طرف) اتنا خارج کرو کہ یہ جنت کی دوسری قوت سے دہر جائے۔ اب اس کے نقطہ عمل کو دہر منتقل کرو اور وہا کے متوازی کیجیو۔

تب قوت اس کو دو قوتوں ق اور ف میں تحلیل کیا جاسکتا ہے جن میں سے پہلی د کی سمت میں عمل کرتی ہے اور دوسری ج کی مخالفت میں۔
موازنہ قوت ف جنت کی دوسری قوت ف کے ساتھ مل کر جو ج کی سمت

میں عمل کرتی ہے متعادل ہو جاتی ہے

پس ہمارے پاس ہمارے

نظام کے حاصل کے طور پر

صرف ایک قوت قی بجتی ہے

جوابی ابتدائی سمت دیا گئے

متوازی و ا کی سمت میں

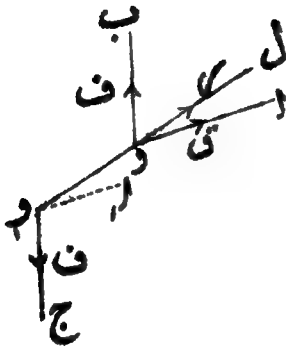
عمل کرتی ہے۔

اگر قی جنت کی قوتوں ف

کے متوازی ہو تو دفعہ ۳ کی رو سے

ظاہر ہے کہ ان کا حاصل ف کے

متوازی اور قی کے مساوی ہوگا۔



۵۲۔ اگر تین قوتیں ایک استواء جسم پر عمل کریں اور لمبایا مقدار سمت اور خط عمل

بالترتیب ایک مثلث کے اضلاع سے تعبیر ہو سکیں تو وہ باہم مل کر ایک جنت کے

مساوی ہوتی ہیں جس کا معیار اثر مثلث کے رقبہ کا دو چند ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج ہے اور قوتیں ف م ا قی ہں بالترتیب مثلث

کے اضلاع ب ج ج ب ج ا ب سے تعبیر ہوتی ہیں۔

ب میں سے ضلع ا ج کے متوازی خط ل ب م کیچو اور ب پر ق

کے مساوی اور متقابل دو قوتیں ب ل ا م ب م کی سمت میں لگاؤ۔ تب

قوتوں کے مثلث کی رو سے (دفعہ ۲) قوتیں ف م ا اور قی (جو خط مستقیم

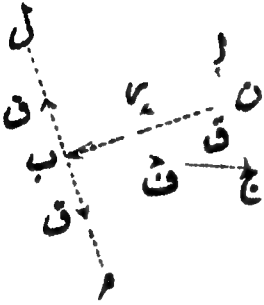
ب ل میں عمل کرتی ہے) متعادل ہیں۔

پس ہمارے پاس صرف دو قوتیں بچتی ہں جن میں سے ہر ایک قی کے

مساوی ہے اور جن میں سے ایک ج ا کی سمت میں عمل کرتی ہے اور دوسری ب م

کی سمت میں ظاہر ہے کہ ان سے ایک جنت جتا ہے جس کا معیار اثر قی ب م

ہے جو ج (x) ب ب کے یعنی
ثلث (ب ج کے رقبہ کے
دو چند کے مساوی ہے۔
نتیجہ صریح۔ اسی طرح سے ہم دیکھ
سکتے ہیں کہ اگر ایک استوار جسم پر
ایک سطح مستوی میں عمل کرنے والی
قوتیں بچانا مقدار سمت اور خط عمل
کے ایک کثیر الاضلاع کے ضلعوں
سے تعبیر ہو سکیں تو وہ ایک جنت کے
معادل ہو گئی جس کا معیار اثر مذکورہ
کثیر الاضلاع کے رقبہ کا دو چند ہوگا۔



۵۳۔ ایک جنت اور ایک قوت جو اس کی سطح مستوی میں واقع ہو تواادل پیدا نہیں کر سکتے
فرض کر دو کہ قوت α جنت کی سطح مستوی سے وپر لیتی ہے۔ اگر ضرورت
ہو تو حسب دفعہ (۴۴) جنت کو ایک ایسے معادل جنت میں تبدیل کرو جس کی
ایک قوت ω میں سے گزرتی ہو۔ تب α اور یہ قوت ω ل کر ایک قوت
بن جائیگی جو وپر عمل کرے گی اور جنت کی دوسری قوت ω سے کہیں نہیں
ملے گی، گویا تواادل پیدا نہیں ہوگا۔

تیسرا باب

ہم مستوی قوتوں کے زیر عمل استوار جسم کا توازن

۵۴۔ باب ہذا میں ہم اسے استوار جسم کے تعادل پر بحث کریں گے جس پر قوتیں ایک ہی مستوی میں عمل کرتی ہیں۔ ذیل کے مسئلہ کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر قوتیں تین ہوں تو جسم کے توازن کی شرائط واحد ذریعہ کے توازن کی شرائط میں تحول ہو جاتی ہیں۔ اگر تین ہم مستوی قوتوں کے زیر عمل کوئی استوار جسم تعادل میں ہے تو تین قوتیں لازمی طور پر ایک دوسرے سے ایک نقطہ پر ملتی یا یا ہم توازی ہوں گی۔ اگر سب قوتیں متوازی نہ ہوں تو ان میں سے کم از کم دو ایک نقطہ پر ملیں گی اور ان کا حاصل ایک قوت ہوگی جو وہیں سے گزرے گی۔ لیکن چونکہ قوتیں 'ف' 'ق' 'ر' تعادل میں ہیں اس لئے ان کا حاصل رکے ساتھ متوازن ہوگا۔ نیز دو قوتیں متوازن نہیں ہو سکتیں جب تک کہ ان کا خط عمل ایک نہ ہو۔

اس لئے کہ کا خط عمل لازمی طور پر وہیں سے گزرے گا۔ مسئلہ باقی کی مدد سے ہم مستوی قوتوں کے تعادل کی شرطیں آسانی سے حاصل ہو سکتی ہیں۔ کیونکہ اس صورت میں لازمی طور پر تین قوتیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں۔ اس لئے لامی کا مسئلہ استعمال کرنے سے یا قوتوں کو دو عمودی قوتوں میں تحلیل کرنے سے یا کسی عمل سے ہم مطلوبہ شرائط حاصل کر سکتے ہیں۔

۵۵۔ مثلثی مسئلے۔ علم مثلث کے دو مسئلے ایسے ہیں جو سکونیا

کے سوالوں کو حل کرنے میں اکثر اوقات بہت مفید ثابت ہوتے ہیں۔
یہ مسئلے سب ذیل ہیں:-

اگر ایک مثلث Δ ج کے قاعدہ Δ ب پر کوئی نقطہ Γ ہو
اور اگر Γ ج Δ کو دو حصوں Δ ج میں اور زاویہ Γ ج کو دو حصوں
ع Δ اور ج Δ میں تقسیم کرے اور اگر زاویہ Γ ج Δ ہو تو

$$(\Delta + \Gamma) = \Delta = \Delta - \Delta - \Delta \dots \dots (1)$$

$$(\Delta + \Gamma) = \Delta = \Delta - \Delta - \Delta \dots \dots (2)$$

$$\text{کیونکہ } \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} \times \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} \text{ جب } \Delta \text{ ج}$$

$$\Delta \text{ ج } \Delta \text{ ج} = \frac{\Delta \text{ ج } \Delta}{\Delta \text{ ج } \Delta} \times \frac{\Delta \text{ ج } \Delta}{\Delta \text{ ج } \Delta} = \frac{\Delta \text{ ج } \Delta}{\Delta \text{ ج } \Delta} = \frac{\Delta \text{ ج } \Delta}{\Delta \text{ ج } \Delta}$$

$$\Delta \text{ ج } \Delta - \Delta \text{ ج } \Delta = \Delta \text{ ج } \Delta = (\Delta + \Gamma) \Delta$$

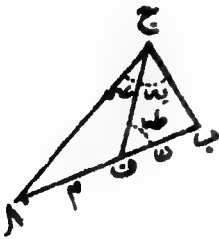
$$\text{نیز } \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta \text{ ج } \Delta}{\Delta \text{ ج } \Delta} \times \frac{\Delta \text{ ج } \Delta}{\Delta \text{ ج } \Delta} = \frac{\Delta \text{ ج } \Delta}{\Delta \text{ ج } \Delta}$$

$$= \frac{\Delta \text{ ج } \Delta}{\Delta \text{ ج } \Delta} = \frac{\Delta \text{ ج } \Delta}{\Delta \text{ ج } \Delta}$$

$$= \frac{\Delta \text{ ج } \Delta}{\Delta \text{ ج } \Delta} = \frac{\Delta \text{ ج } \Delta}{\Delta \text{ ج } \Delta}$$

$$= (\Delta + \Gamma) \Delta$$

$$= \Delta \text{ ج } \Delta - \Delta \text{ ج } \Delta$$



۵۶۔ مثال ۱۔ ایک شہر کو اس کا مرکز ثقل دو حصوں
میں تقسیم کرتا ہے۔ شہر ایک

کرہ کے اندر رکھا گیا ہے، ثابت کرو کہ اگر تعادل کے عمل میں اس کا میلان افق کے ساتھ طما ہو اور اس کے محاذی کرہ کے مرکز پر ۲ عما زاویہ بنے

$$\text{تو مس طما} = \frac{\text{بب} - \text{ا}'}{\text{بب} + \text{ا}'} \text{مس عما}$$

اس صورت میں شہتیر کے سروں پر کے دونوں تعادل ہر اہس کرہ کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔ اسلئے

سلاخ کا مرکز نقل ث، لہ کے انتصاباً نیچے واضح ہوگا۔ فرض کرو مرث، ا میں سے گزرنیوالے افقی خط سے ن پر ملتا ہے۔ مرد، ا ب پر عمود کھینچو۔

$$\text{تب د ا مرد} = \text{د ب مرد} = \text{عما}$$

$$\text{اور د مرث} = ۹۰ - \text{د د ث م}$$

$$= \text{د د ا ن} = \text{طما}$$

تب دفعہ ۵۵ کے دوسرے ربط کی رو سے

$$\text{ا} + \text{ب م م مرث ب} = \text{ب م م ا ب} - \text{ا م م م ب ا}$$

$$\text{یعنی (ا + ب) مس طما} = (\text{بب} - \text{ا}') \text{مس عما}$$

نیز لاصحی کے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب م م مرث}} = \frac{\text{س}}{\text{ب م م ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب م م ا}}$$

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب م م مرث}} = \frac{\text{س}}{\text{ب م م ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب م م ا}}$$

اس سے تعادل معلوم ہو پڑے ہیں۔

مشق ۲۔ ایک وزنی یحسان سلاخ جس کا طول ۲ ا ہے ایک ثابت پکے نصف گردی پیالہ کے اندر اس طرح ساکن ہے کہ اس کا کچھ حصہ

پیالہ گئے باہر ہے پیالہ کا نصف قطر ہے۔ پیالہ کا کنارہ متوازی الافق ہے اور صلاح کا ایک نقطہ کنارہ کو مس کرتا ہے، اگر صلاح کا میلان افق کے ساتھ طے ہو تو ثابت کرو کہ

۲ رجم ۲ طہ = رجم طہ
 شکل میں نصف کرہ کی وہ انتصابی تراش دکھائی گئی ہے جو سلاخ میں سے گزرتی ہے اور اب سلاخ ہے اور اس کا مرکز ثقل ہے اور

ج وہ نقطہ ہے جہاں

سلاخ میاں کے کنارے

تے ملتی ہے اور

۱۔ یہ کا تعامل کرہ کے

مرکزہ میں سے گزرتا ہے

کہو تم کو اس مری ایسا

خطے جو اس سے گزرتا

میں اور سالہ کی سطر عمود کے

نیز جہاں تعاملِ صلاح پر عمود دار ہے۔ کیونکہ یہی ایک سمت ہے جو صلاح اور مالہ کے کنارے دونوں پر عمود دار ہے۔

یہ دونوں تعالٰیٰ ایک دوسرے سے نقطہ دیر ملتے ہیں حواسِ مہدی

کہ یہ واقع ہے جس کا ایک جزو نہ پرکھٹ یا لہ ہے۔ اس لئے ملاخ کے

وہی نقطہ جس سے گزرنے والا انتصابی خط لازماً دس سے زیادہ

اس سے ۱۷۰۰ کے قریب کے متوازی کھنڈے حادث سے ۱۷۰۰

میں نے اس کو دیکھا ہے

تب > م ا ج = > م ج ا = > ج ا ع = ط ا

$$= \text{رجم ط} = \text{ع} = \text{اد ج م ط} = \text{رجم ط} = \text{رجم ط}$$

نیز لاهی کے مسئلہ کی رو سے اگر کسی اور میں بالترتیب اور

جبریت کے تعامل میں

$$\begin{aligned} \text{تو} \quad \frac{\text{س}}{\text{ج}} &= \frac{\text{س}}{\text{ج}} = \frac{\text{س}}{\text{ج}} \\ \text{یعنی} \quad \frac{\text{س}}{\text{ج}} &= \frac{\text{س}}{\text{ج}} = \frac{\text{س}}{\text{ج}} \end{aligned}$$

مثالیں

۱۔ ایک بیوف کرہ سے جس کا نصف قطر ۱ ہے ایک پیرا بنا یا گیا ہے اور پیرا کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ کرہ کا ہر نصف قطر جو پیرا کے کنارہ تک کھینچا جائے سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ صفا بناتا ہے، نیز مرکز کو پیرا کے کسی نقطہ کے ساتھ ملانے والا نصف قطر سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ صفا بناتا ہے۔ اگر ایک چکنی یکساں سلاخ اس طرح متبادل رہے کہ اس کا ایک سر اے پر ہو اور سلاخ پر کا ایک نقطہ پیرا کے کنارہ سے مس کرے تو ثابت کر دو کہ سلاخ کا طول ہے

$$۲ \text{ جب صفا قط } ۱ \text{ ہے۔}$$

۲۔ ایک اسطوانہ کا نصف قطر ۱ ہے اور اس کے محور کو افق کے متوازی اس طرح ثابت کر دیا ہے کہ اس کا ایک ٹکڑی خط ایک انتصابی دیوار سے تماس رکھتا ہے۔ ایک چٹا یکساں شہتیر جس کا طول ۲ اور وزن ۱ ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سر دیوار کے ساتھ لگا ہوا ہے اور دوسرا اسطوانہ ہے، اگر شہتیر سمت انتصابی کے ساتھ ۲۵ کا زاویہ بنائے اور رگڑ نہ ہو تو

$$\begin{aligned} \text{ثابت کر دو کہ} \quad \frac{۱}{۲} &= \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \\ \text{تعالیٰ} \quad \frac{۱}{۲} &= \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

۳۔ نصف قطر کا ایک نصف کرہی پیالہ ایک چکنی افقی میسر پر پڑا ہے
پیالہ کے اندر ایک سلاخ ہے جسکا کچھ حصہ پیالہ سے باہر ہے اگر اس کا وزن پیالہ
کے وزن کے مساوی اور طول ۲ ل ہو تو ثابت کرو کہ تعادل کا عمل مساوات
ذیل سے حاصل ہوتا ہے

ل جب (عما + ببا) = ر جب عما = ۲ ل جم (عما + ۲ ببا)
جہاں افق کے ساتھ نصف کرہ کے قاعدہ کا میلان عما سے اور سلاخ
کے آٹھ حصہ کے محاذی جو پیالہ کے اندر ہے نصف کرہ کے مرکز پر زاویہ
۲ ببا بنتا ہے۔

۴۔ ایک چکنی سلاخ کا طول ۲ ل ہے، اس کا ایک سر ایک سطح بال
پر ٹکا ہوا ہے جو افق کے ساتھ زاویہ عما بناتی ہے۔ سلاخ کو دوسری جانب
ایک افقی میٹر سہارا سے ہوئے ہے جو سطح بال کے متوازی ہے اور اس
سے فاصلہ ج پر ہے، ثابت کرو کہ سلاخ اور سطح بال کا درمیانی زاویہ طما ذیل
کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

ج جب عما = ل جب طما جم (طما - عما)
۵۔ ایک مخروط کا ارتفاع ف ہے اور نصف راسی زاویہ عما
ہے، اس کو ایک چکنی انتصابی دیوار کے ساتھ اس طرح لگا کر رکھا گیا ہے کہ
اس کا مستوی قاعدہ دیوار کو مس کرتا ہے۔ اسے ایک ڈوری سہارا سے ہوئے
ہے جس کا ایک سر مخروط کے راس کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا دیوار کے
کسی نقطہ کے ساتھ ثابت کرو کہ ڈوری کا طول زیادہ سے زیادہ $۱ + \frac{۱۶}{۴}$ مس عدا

ہو سکتا ہے۔

۶۔ ایک مخروط کا ارتفاع ف ہے اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہے
اس کو ایک رسی کے ذریعے جس کا ایک سر اس کے راس کے ساتھ اور
دوسرا سر اس کے قاعدہ کے کسی نقطہ کے ساتھ بندھا ہے ایک چکنی
کھنٹی پر رکھا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ اگر حالت تعادل میں مخروط کا محور متوازی الافق ہو تو اس کا

طول $\frac{1}{2} \pi$ ہونا چاہئے۔

۷۔ دو مساوی مستدیر قمریں ہیں جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر r ہے۔ ان کو دو ایسی انتہائی سطوح مستوی کے اندر جن کا درمیانی زاویہ 2α ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کے چمٹے رخ سطوح مذکور کے کونہ کے عمادی ہیں اور یہ ایک دوسرے سے اس نقطہ پر شمس کرتے ہیں جو سطوح مستوی کے درمیانی زاویہ کے ناصف پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اس چمٹے سے چھوٹے قمر کا نصف قطر جو مذکورہ بالا قمروں کو ملحدہ کئے بغیر ان کے اندر لگایا جاسکتا ہے (قطب α) ہے۔

۸۔ ایک تصویر کی چوکھٹ مستطیل شکل کی ہے، اسے ایک چمینی انتہائی دیوار کے ساتھ دو متوازی دوریوں کے ذریعہ جو اس کی پشت کے بالاترین کونہ پر کے دو نقطوں کے ساتھ اور دوسری طرف دیوار کے دو نقطوں کے ساتھ بندھی ہیں لٹکایا گیا ہے۔ رسیوں کا طول چوکھٹ کے ارتفاع کے مساوی ہے۔ اگر چوکھٹ کا مرکز ثقل تصویر کے مرکز ثقل پر مطبق ہو تو تصویر حالت تعادل میں دیوار کے ساتھ مستقر $\frac{1}{2} \pi$ زاویہ بنائے گی جہاں $\frac{1}{2} \pi$ تصویر کا ارتفاع ہے اور $\frac{1}{2} \pi$ اس کی موٹائی ہے۔

۹۔ ایک تصویر کو ایک دیوار کے ساتھ اس طرح لٹکانا مقصود ہے کہ یہ دیوار کے ساتھ کوئی خاص زاویہ α بنائے اور ہمارے والی دوری دیوار کے ایک ایسے نقطہ کے ساتھ بندھی ہو جو تصویر کے خط پائیں سے $\frac{1}{2} \pi$ بلند پر ہے۔ ہندسی عمل سے دریافت کرو کہ دوری کو تصویر کی پشت پر کے کس نقطہ پر باندھنا چاہئے۔ نیز دوری کا طول معلوم کرو۔

۱۰۔ اگر ایک استوار جسم پر ایک مستوی سطح میں قوتوں کا ایک نظام

عمل کرے تو یہ سب قوتیں ایک واحد قوت میں یا ایک واحدت میں تحول ہو جاتی ہیں۔

قوتوں کے متوازی الاضلاع کی رو سے کوئی دو قوتیں جن کے خط عمل ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں ایک واحد قوت میں ترکیب پاسکتی ہیں، نیز دفعہ ۳۱ کی رو سے دو متوازی قوتیں ایک واحد قوت میں ترکیب پاسکتی ہیں بشرطیکہ یہ مساوی اور غیر موافق نہ ہوں۔

پہلے نظام معلومہ کی تمام متوازی قوتوں کو یا متوازی قوتوں کے مختلف جڑوں کو ترکیب دیکر قوتیں بنا لو اب اس مائل شدہ نظام میں کوئی دو قوتیں جو جو جفت نہ بنائی ہوں اور ان کا مائل مہم معلوم کرو، پھر مہم اور باقی ماندہ قوتوں میں سے کسی مناسب قوت کا مائل مہم معلوم کرو۔ پھر مہم اور کسی اور قوت کا مائل معلوم کرو، علیٰ ہذا لقیاس تا وقتیکہ سب قوتیں ختم ہو جائیں۔

بالآخر ہمارے پاس ایک واحد قوت رہ جائے گی یا دو مساوی متوازی غیر موافق قوتیں بچیں گی جو ایک جفت بنائیں گی۔

۵۸۔ اگر قوتوں کا ایک نظام ایک استوار جسم پر ایک سطح مستوی

میں عمل کرے اور ان کے معیار اثر دں کا جبر یہ مجموعہ سطح مستوی پر کے تین نقطوں میں سے ہر نقطہ کے گرد (جو ایک خط مستقیم میں واقع

نہ ہوں) جدا گانہ صفر ہو تو قوتوں کا یہ نظام توازن میں ہوگا۔

دفعہ ماقبل کی رو سے ایک سطح مستوی میں عمل کرنے والی قوتوں کو ترکیب دینے پر وہ واحد قوت یا ایک جفت میں تحول ہو جاتی ہیں۔

موجودہ صورت میں قوتوں کا مائل جفت نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر جفت ہو تو قوتوں کے معیار اثر دں کا مجموعہ سطح پر کے کسی نقطہ کے گرد

دفعہ ۳۶ کی رو سے کوئی مستقل (جو صفر نہ ہو) ہونا چاہئے اور یہ ہمارے

مفروضہ کے خلاف ہے۔
پس نظام زیر بحث ایک جفت میں تحویل نہیں ہو سکتا۔ اس لئے
یا تو یہ نظام تعادل میں ہوگا اور یا ایک واحد قوت ف میں تحویل ہو سیکے گا
اب فرض کرو کہ وہ نقطے جن کے گرد معیار اثر لگے گئے ہیں (ا، ب، ج) ہیں، چونکہ دفعہ ۴۰ سے قوتوں کے کسی نظام کے معیار اثروں کا جبری
مجموعہ ان کے مائل کے معیار اثر کے مساوی ہوتا ہے اس لئے مائل
قوت ف کو یا صفر ہونا چاہئے یا ا میں سے گزرنا چاہئے۔

اسی طرح چونکہ ف کا معیار اثر ب کے گرد بھی صفر ہے اس لئے
ف صفر ہے یا ب میں سے گزرتا ہے۔ گویا ف صفر ہے یا خا یا ب
پر عمل کرتا ہے۔

بالآخر چونکہ ف کا معیار اثر ج کے گرد بھی صفر ہے اس لئے ف
صفر ہے یا ج میں سے گزرتا ہے۔

لیکن چونکہ (ا، ب، ج) ایک خط مستقیم میں واقع نہیں ہیں اس لئے
یہ ناممکن ہے کہ ف، خط ا ب میں عمل کرے اور ج میں سے
بھی گزرے۔

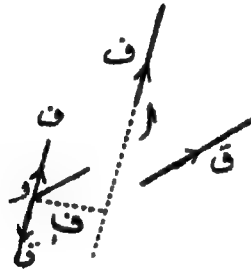
اس لئے امکان صرف یہی رہ جاتا ہے کہ ف صفر ہے یعنی قوتیں
تعادل میں ہیں۔

نظام اس صورت میں بھی تعادل میں ہوگا اگر (۱) معیار اثروں کا مجموعہ
دو نقطوں (ا) اور ب میں سے ہر ایک کے گرد صفر ہو اور اگر (۲) (ا، ب) کی
سمت میں قوتوں کے اجزائے تحلیل کا مجموعہ صفر ہو۔ ظاہر ہے کہ شرط (۱)،
پوری ہو تو مائل دفعہ مائل کی رو سے یا صفر ہوگا یا (ا، ب) میں سے گزریگا
نیز شرط (۲) کے پورا ہونے کی وجہ سے (ا، ب) کی سمت میں کوئی مائل عمل
نہیں کرتا۔ پس مائل قوت صفر ہے۔ نیز دفعہ مائل کے مطابق اس نظام کا
مائل جفت بھی نہیں ہے اس لئے نظام توازن میں ہے۔

۵۹۔ ایک استوار جسم پر مستوی سطح میں عمل کرنے والی قوتوں کا

نظام جسم کے کسی اختیاری نقطہ پر عمل کرنیوالی ایک قوت اور ایک جفت کے معادل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ نظام کی کوئی قوت F ہے جو جسم کے کسی نقطہ A پر عمل کرتی ہے اور کوئی اختیاری نقطہ ہے۔ وپر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک F کے مساوی ہو اور فرض کرو کہ ان کا خط عمل F کے خط عمل کے متوازی ہے۔ ان سے جسم کی حالت متبادل ہو کر کوئی اثر نہیں پڑتا۔



اگر ایک قوت F اور
وہر کی متوازی اور متقابل
قوت F مل کر ایک
جفت بناتی ہیں جس کا معیار
 F ہے۔

جہاں F عمود ہے
وہی ابتدائی قوت F
کے خط عمل پر۔

پس اگر عمل کرنے والی قوت F مائل ہے وپر اس سمت
میں عمل کرنے والی ایک قوت F کے مع ایک جفت کے جس کا
معیار اثر F ہے۔

اسی طرح سے F پر عمل کرنے والی ایک اور قوت Q مساوی
ہے وپر اسی سمت میں عمل کرنے والی ایک قوت Q کے مع ایک
جفت کے جس کا معیار اثر Q ہے جہاں Q نقطہ Q سے Q کے
خط عمل پر عمود ہے۔

اسی طرح ہر ایک قوت کے لئے
پس قوتوں کا ابتدائی نظام قوتوں F ، Q ، Q ، Q ، Q ، Q کے مساوی ہے۔

گزرتی ہوں -

۶۱ - یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ گذشتہ دفعہ میں دی ہوئی شرطیں قوتوں کے کسی نظام کے

تبادل کے لئے کافی ہیں، اب ثابت کیا جائیگا کہ یہ شرطیں ضروری بھی ہیں۔
فرض کرو کہ ہمیں صرف یہ معلوم ہو کہ پہلی دو شرطیں پوری ہوتی ہیں۔ تب
ممکن ہے کہ قوتوں کا نظام ایک جفت میں تحول ہوتا ہو کیونکہ جفت کی قوتیں
مساوی اور متوازی و متقابل ہونے کی وجہ سے ہر سمت میں ان کا اثر و تکلیلی
مضمر ہو گا۔ اس لئے کسی تیسری سمت میں تحلیل کرنے سے ہمیں کوئی نئی شرط
نہیں ملے گی۔ اس صورت میں قوتیں متبادل نہیں ہونگی تا وقتیکہ معیار اثر کے
بارے میں تیسری شرط بھی پوری نہ ہو۔

اب فرض کرو کہ ہمیں صرف یہ معلوم ہے کہ قوتوں کے اجزاء ترکیبی کا
مجموعہ ایک خاص سمت میں معدوم ہو جانا ہے اور نیز ایک معلوم نقطہ کے
گرد قوتوں کا معیار اثر صفر ہے۔ اس صورت میں ممکن ہے کہ نظام ایک
واحد قوت میں تحول ہو جائے جسکی سمت دئے ہوئے نقطہ میں سے دے ہوئے
خط پر عمود وار ہو کیونکہ ایسی قوت دونوں شرائط کو پورا کرے گی۔ پس ہم
دیکھتے ہیں کہ کسی دوسرے خط کی سمت میں قوتوں کے اجزاء ترکیبی کے
مجموعہ کا مضمر ہونا بھی کیوں لازمی ہے۔

۶۲ - کسی سکونی مسئلہ کو حل کر نیکے لئے طالب علم کو حسب ذیل عمل کرنا چاہئے

(۱) حسب شرائط مشکل کی پیروی

(۲) جسم یا اجسام پر جو قوتیں عمل کر رہی ہوں ان سب پر نشان لگاؤ
نیز اسس امر کا بھی خیال رکھو کہ جب ایک جسم دوسرے کو مس کر رہا ہو تو
تاسلمو تعامل کو فرض کیا جائے اور ہر بہار نے دلی رتھی کے تناؤ پر بھی نشان
لگایا جائے نیز جب ایک جسم کسی دوسرے جسم کے ساتھ یا کسی ثابت نقطہ کے ساتھ

وصل کیا ہوا ہو تو نامعلوم تعادل فرض کیا جائے۔

(۳) سوال کے ہر ایک جسم یا اجسام کے جثہ پر جو قوتیں عمل کر رہی ہیں

ان کو دو آسان علیٰ القوائیم سمتوں میں تحلیل کر کے اجزائے تحلیل کے مجموعوں

کو صفر رکھو۔ عموماً افقی اور انحصالی سمتوں میں تحلیل کرنا سہولت بخش ہوتا ہے۔

(۴) نیز کسی محوروں نقطہ کے گرد قوتوں کے معیار اثروں کو صفر رکھو۔

(۵) شکل میں طولوں اور زاویوں کے درمیان جو روابط ہوں ان کو لکھ لو۔

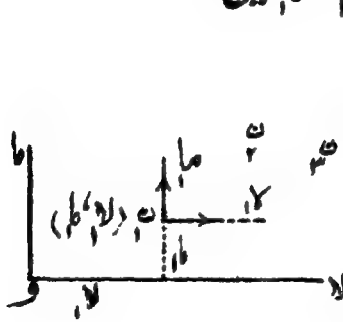
۶۳۔ کسی اساسی نقطہ کے لحاظ سے ہم مستوی قوتوں کے

ایک نظام کی حاصل قوت اور جفت کا دریافت کرنا۔

و میں سے کوئی دو علیٰ القوائیم محور ولا اور و ما جینجو۔

فرض کرو کہ نقطہ ن (لا، ما) پر ایک قوت ف عمل کرتی ہے جس کے

اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما ہیں۔



تب قوت لا، جو

ن پر عمل کرتی ہے معادل

ہے و پر عمل کرنے والی متوازی

قوت لا کے مع ایک

جفت لا، ما کے۔

اسی طرح ن پر عمل

کرنے والی قوت ما، سا

ہے و پر عمل کرنے والی

متوازی قوت ما کے مع ایک جفت لا، ما کے (دیکھو دفعہ ۵۹)

پس ن پر ایک قوت ف معادل ہے محور ولا اور و ما کے

ساتھ عمل کرنے والی دو قوتوں لا، اور ما کے مع ایک جفت

لا، ما۔ ما، لا کے۔

اسی طرح دوسرے نقطوں ن، ن، ن، پر عمل کرنیوالی قوتوں کیلئے

پس قوتوں کا کل نظام مائل ہے ولا و ما کے ساتھ عمل کرنیوالے
دو اجزائے ترکیبی لا اور ما کے اور نقطہ و کے گرد ایک جفت گ کے

$$\text{جہان} \quad لا = لا_1 + لا_2 + لا_3 + \dots + لا_n = لا$$

$$\text{ما} = ما_1 + ما_2 + ما_3 + \dots + ما_n = ما$$

$$\text{اور گ} = (لا_1 - ما_1) + (لا_2 - ما_2) + \dots + (لا_n - ما_n) = لا - ما$$

لا اور ما ترکیب پا کر ایک واحد قوت ح کے مساوی ہو جاتے ہیں
جو و پر عمل کرتی ہے۔

۶۴۔ ایک مستوی میں عمل کرنیوالی قوتوں کے نظام کے حاصل
کے خط عمل کی مساوات۔

سب دفعہ مائل نظام زیر بحث کو کسی محوروں ولا اور و ما کے
ساتھ عمل کرنے والے دو اجزائے ترکیبی لا اور ما میں اور نقطہ و کے
گرد ایک جفت گ میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

۶۶۔ فرض کرو کہ کوئی نقطہ ق (ھ، گ) دے ہوئے نظام کے حاصل
کے خط عمل پر واقع ہے۔ دفعہ ۶۴ کی رو سے اس نقطہ کے گرد قوتوں کے
نظام کا معیار اثر قوتوں کے حاصل کے معیار اثر کے مساوی ہے اور بتاؤ
علیہ صفر ہے۔

اب نظام کا معیار اثر ق
کے گرد



$$گ + لا \times ق = لا \times ق + ما \times و$$

$$گ - ھ = ما + گ = لا$$

اس لئے (ھ، گ) کا طریق

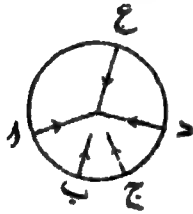
یعنی حاصل کا خط عمل خط متقیم

گ۔ لا ما۔ لا۔ = ہے۔

۶۵۔ چکنے قبضوں سے وصل کئے ہوئے اجسام۔

جب دو جسم قبضہ کے ذریعہ باہم وصل کئے ہوئے ہوں تو باہموم ایسا ہوتا ہے کہ ایک جسم کا گول سر اور دوسرے جسم کے تیار کردہ کھوکھلے خول کے اندر ڈھیلے طور پر چسپا ہوتا ہے جسکی مثال گولہ اور گھرجوڑ (Ball-and-sockets) ہے یا ایسے ہوتا ہے کہ ایک گول سوئی یا کوئی دھل شے ہر ایک جسم کے ایک سوراخ میں سے گزرتی ہے جس کی مثال دروازہ کا قبضہ ہے۔

دونوں صورتوں میں اگر جسم چکنے ہوں تو قبضہ کے مقام پر ہر ایک جسم پر جو تعامل ہوتا ہے وہ ایک واحد قوت پر مشتمل ہوتا ہے۔ ساتھ کی شکل میں دو اجسام کو وصل کرنے والے جوڑ کی ایک تراش دکھائی گئی ہے



اگر جوڑ چکنا ہو تو اس کے سب نقطوں پر کے تعامل سوئی کے مرکز میں سے گزرتے ہیں اور اس لئے ان سب کا حامل ایک واحد قوت ہوگی جو مرکز میں سے گزریگی نیز ایک جسم پر قبضہ کا تعامل دوسرے جسم پر قبضہ کے تعامل کے متساوی

اور متقابل ہوتا ہے۔ کیونکہ ان تعاملوں کے مساوی اور متقابل قوتیں سوئی یا دیگر واسطے وصل کو تعادل کی حالت میں رکھتی ہیں ظاہر ہے کہ سوئی کا وزن نظر انداز ہو سکتا ہے۔

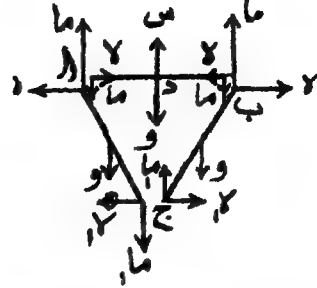
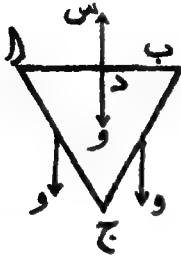
چکنے قبضوں سے متعلق سوالوں کے حل کرنے میں قبضہ پر کے تعامل کی مقدار اور خط عمل دونوں نامعلوم ہوتے ہیں اس لئے باہموم نہ ہو لکھن ہوتا ہے کہ کسی چکنے قبضہ کا جو تعامل جسم پر ہوا اس کو وہی القوائیم سمجھوں میں نامعلوم اجزاء سے ترکیبی کے مساوی فرض کر لیا جائے۔ تب دوسرے جسم پر

قبضہ کا تعامل ان کے مساوی لیکن متقابل اجزاء ترکیبی پر مشتمل ہوگا۔
اب جسم پر عمل کرنے والی قوتیں مع قبضہ کے تعاملوں کے متبادل
میں ہیں اور دفعہ ۱ کے متبادل کی عام شرطیں قابل اطلاق ہوں گی۔
نیز اس غرض کے لئے کہ ہر ایک جسم پر تعامل کے اجزاء ترکیبی کی
سمتوں کے متعلق غلطی واقع نہ ہو یہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ سلاخوں کو برہا کر
ملایا نہ جائے بلکہ ان کے درمیان کچھ جگہ خالی چھوڑ دی جائے جیسا کہ ذیل کی
مثال میں کیا گیا ہے۔

۶۶۔ مثال۔ تین مساوی یکساں سلاخیں جن میں سے ہر ایک کا وزن
و ہے چکنے قبضوں کے ذریعہ ایک دوسرے سے اس طرح وصل کی گئی
ہیں کہ ان سے ایک مساوی الاضلاع مثلث بنائے۔ اگر اس نظام کو
ایک سلاخ کے وسطی نقطہ سے لٹکایا جائے تو ثابت کرو کہ سب سے نچلے
زاویہ پر تعامل $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ہوگا اور باقی ہر ایک زاویہ پر $\frac{13\sqrt{3}}{16}$ ہوگا۔

فرض کرو کہ سلاخوں سے مثلث ۱ ب ج بنائے اور ضلع
۱ ب کا وسطی نقطہ د ہے جس سے جسم کو لٹکایا گیا ہے۔
فرض کرو کہ سلاخ ۱ ب کے نقطہ ۱ پر قبضہ کا تعامل دو اجزاء
ترکیبی پر مشتمل ہے جو بالترتیب ما اور لا کے مساوی ہیں اور انتصابی
اور افقی سمتوں میں عمل کرتے ہیں۔ پس اس قبضہ کا تعامل ۱ ج پر ان کے
مساوی اور متقابل اجزاء ترکیبی پر مشتمل ہے۔ چونکہ کل نظام د میں سے
گزرنے والے انتصابی خط کے لحاظ سے متشامل ہے اس لئے ۱ ب کے
نقطہ ب پر بھی تعامل دو قوتوں ما اور لا پر مشتمل ہوگا جیسا کہ شکل میں
دکھایا گیا ہے۔

فرض کرو کہ ب ج کے نقطہ ج پر قبضہ کا تعامل انتصابی اور افقی
سمتوں میں ما اور لا ہے جہاں ما اوپر کی طرف اور لا دائیں طرف عمل کرتا ہے۔



اسلئے ج ۱ کے نقطہ ج پر اسی قبضہ پر کا تعامل ان اجزائے ترکیبی کے مساوی اور متقابل اجزائے ترکیبی پر مشتمل ہے جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔
اب (ب کے لئے) انتصابی سمت میں تحلیل کرنے سے

(۱) $س = و + ۲ ما$

جہاں س نقطہ د پر کی میخ کا انتصابی تعامل ہے۔ ج ب کے لئے افقی اور انتصابی سمت میں تحلیل کرنے سے اور ج کے گرد میخا راثریئے

(۲) $لا = لا + لا$

(۳) $و = ما + ما$

(۴) اور $و \times ۱ جم + ۹۰ + لا \times ۲ جب = ۹۰ + ما \times ۲ جم$ ج ۱ کے لئے انتصابی تحلیل کرنے سے

(۵) $و = ما - ما$

ان مساواتوں کو حل کرنے سے

$لا = -\frac{۳۶}{۶}$ و $ما = ۰$ و $و = \frac{۳۶}{۶}$ اور $س = ۳$ و

اس لئے ب پر قبضہ کا تعامل قوت $\left[لا + ما \right]$ (یعنی $\frac{۱۳}{۱۶}$)

(۴۸) کے مساوی ہے اور افاق کے ساتھ زاویہ $\frac{۱}{۴}$ ما یعنی $\frac{۲}{۱۶}$ بنامک نیز ج پر قبضہ کا تعامل ایک افقی قوت $\frac{۳۶}{۶}$ و کے مساوی ہے۔

یہ ہم پہلے ہی سے دیکھ سکتے تھے کہ ج پر کا تعامل متوازی الافق ہونا چاہئے کیونکہ کل نظام خط ج د کے گرد متشاکل ہے اور تا وقتیکہ جزو ترکیبی صاف معدوم نہ ہو جائے ج پر کا تعامل تشاکل کی شرائط کو پورا نہیں کر سکتا۔

مثالیں

۱۔ ایک پرکار کی ساقوں کے درمیان زاویہ ۲ عمما بنتا ہے، ساقیں یکساں سلاخوں کی بنی ہوئی ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن ۱ و ہے۔ پرکار دو بیجوں پر جو ایک افقی خط میں ہیں اس طرح قائم ہے کہ اس کا قبضہ نیچے کی طرف اور اس کی ساقوں کے وسطی نقطے بیجوں سے سس کرتے ہیں۔ پرکار کی ساقوں کے درمیان زاویہ ۲ عمما قائم رکھنے کے لئے اس کے اوپر کے سروا کے درمیان ایک ہلکی سلاخ رکھ دی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ اس سلاخ پر دباؤ اور قبضہ پر کا تعامل ہر ایک ۱ و ہم عمما کے مساوی ہے۔

۲۔ ایک دروازہ جس کا وزن ۱۰۰ پونڈ ہے دو قبضوں کے ذریعہ جن کا درمیانی فاصلہ ۳ فٹ ہے تھاما گیا ہے اور قبضوں میں سے گزرنوالہ انتصابی کے گرد گھوم سکتا ہے دروازہ کا مرکز نقل خط انتصابی سے ۴ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔ یہ فرض کر کے کہ دروازہ کے پورے وزن کو صرف نیچے والا قبضہ سہا رہے ہوئے ہے ہر ایک قبضہ پر کا تعامل دریافت کرو۔

۳۔ ایک پچانگ کا وزن ۱۰ ہے اس کے اندر دو نقطوں ج اور د دو بیجیں ہیں جن کے باہر کے سرے دو افقی شکل کے ہیں۔ ان حلقوں میں سے ۱ اور ب پر ل کی شکل کی گھونٹیاں گزرتی ہیں جو دوسری طرف پچانگ کے کہے ہیں گڑی ہوئی ہیں اور جن کے گرد پچانگ گھوم سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ج د، ا ب سے ذرا بڑا ہو تو اوپر کے قبضہ پر دباؤ ۱ و ۱۰ پونڈ ہوگا لیکن اگر ذرا چھوٹا ہو تو دباؤ ۱ و ۱۰ ہوگا جہاں ۲ و پچانگ کا

۴۔ اور جب = ج ۵ ایک مربع تختہ ایک دیوار کے ساتھ ایک سری کے ذریعہ جو اس کے اوپر کے کنارہ کے دونوں سروں کے ساتھ بندھی ہے ایک چھنی کھونٹی سے لٹک رہا ہے۔ اگر رشتی کا طول تختہ کے وتر سے کم ہو تو تعادل سے تین عمل معلوم کرو۔

۵۔ ایک مربع کا ضلع ۱۲ ہے۔ یہ دو چھنی کھونٹیوں پر جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اس طرح ساکن ہے کہ یہ انتصابی مستوی میں ہے اگر کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ ج ہو تو ثابت کرو کہ حالت تعادل میں اس کا ایک کنارہ افق کے ساتھ ۴۵° یا جب ۱۲ ج ۲ زاویہ بناتا ہے۔

۶۔ ایک مساوی الساقین مثلثی پتھر افقی خط میں دو چھنی کھونٹیوں کے سہارے انتصابی مستوی میں اس طرح لٹک رہا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے۔ ثابت کرو کہ اگر قاعدہ سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ج ۱ (ج ۱ ع ۱) بنائے تو یہ محل تعادل ہوگا اس میں ۲ ع ۱ پتھرے کا راسی زاویہ ہے اور قاعدہ کا طول چھنیوں کے درمیانی فاصلہ کا تین گنا ہے۔

۷۔ ایک منشور جس کی عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہے دو مستوی اہل سطحوں پر جو افق کے ساتھ ع ۱ اور ع ۲ زاوے بناتی ہیں اس طرح ساکن ہے کہ اس کے دو کنارے افق کے متوازی ہیں۔ اگر ان کناروں میں سے گزرنے والا مستوی سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ط ۱ بنائے تو ثابت کرو کہ

$$\sin \theta = \frac{2 + 3 \cos \alpha + \cos \beta}{2 + 3 \cos \alpha}$$

۸۔ ایک مثلث تین سلاخوں سے بنا ہوا ہے اور توازی الافق محل میں ثابت کر دیا گیا ہے ایک تجانس کرہ اس پر لٹکا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک سلاخ پیکا تعادل اس کے طول کے متناسب ہے۔

۹۔ قطع ناقص کی شکل کا ایک مستوی پترا ہے، اس کے مزدوج قطروں کے جوڑوں کے سروں پر اسی مستوی سطح میں بیرونی عماد کی سمت میں قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ہر ایک مزدوج قطر کے سرے پر عمل کرنے والی قوت اس مزدوج قطر کے طول کے متناسب ہو تو تعادل ہو گا۔

۱۰۔ ایک لکڑی کی سیڑھی کی شکل ہندسہ ۸ کی ہے اسکو ایک افقی سطح پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کی ہر ایک ساق سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ عما بناتی ہے، اور اسے ایک رسی جو اس کی ساقوں کے وسطی نقطوں کو ملاتی ہے سہارے ہوئے ہے۔ اگر گرڈ نہ ہو تو ثابت کرو کہ جب ایک وزن و ایک ایسے قدم پر رکھا جائے جس کا ارتفاع فرش سے سیڑھی کے طول کا $\frac{1}{2}$ ہو تو رستی کے تناؤ میں $\frac{1}{2}$ و مس عما کا اضافہ ہو جائیگا۔

۱۱۔ ایک ہی موٹائی کی تین یکساں سلاخیں ا ب، ب ج، ج د ہیں جن کے طول بالترتیب ۱، ۲، ۳ ہیں، ان کو ب اور ج پر چھنے قبضوں کے ذریعے وصل کیا گیا ہے۔ یہ سلاخیں ایک چھنے کرہ پر جس کا نصف قطر ۱ ہے اس طرح ساکن ہیں کہ ب ج کا وسطی نقطہ اور سرے ا اور د کرہ سے مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ب ج کے وسطی نقطے پر کا د باؤ سلاخوں کے وزن کے $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہے۔

۱۲۔ تین یکساں سلاخوں ا ب، ب ج، ج د ہیں ان کے وزن سلاخوں کے طولوں ۱، ۲، ۳ کے متناسب ہیں۔ ان کو ب اور ج پر ملا یا گیا ہے اور دو میخوں ف اور ق پر افقی محل میں رکھا گیا ہے۔ جوڑوں ب اور ج پر کے تعامل دریافت کرو اور ثابت کرو کہ میخوں کا درمیانی فاصلہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ہے۔

۱۳۔ ا ب اور ج ایک ہی مادہ کی یکساں سلاخیں ہیں جن کا طول ۱ ہے ان کو ا پر چھنے قبضہ کے ذریعہ وصل کیا گیا ہے۔ ب د ایک

(۲۷) ہے ثابت کرو کہ اگر اسطوانہ کا وزن ۲ و (۱ - $\frac{1}{3}$) سے کم ہو گا تو اسطوانہ الٹ جائیگا۔

۱۸۔ ایک آٹنے والا برتن اندر سے کروی شکل کا ہے۔ یہ ایک ایسے محور کے گرد جو کرہ کے مرکز سے نیچے 'ج' فاصلہ پر اور برتن کے مرکز ثقل سے اوپر 'د' فاصلہ پر ہے گھوم سکتا ہے۔ اس کے اندر پیندہ پر ایک وزنی گولہ رکھا گیا ہے ثابت کرو کہ یہ الٹ جائیگا اگر گولہ کا وزن برتن کے وزن کے $\frac{1}{3}$ گنا سے زیادہ ہو

۱۹۔ ایک مستدیر قرص کا وزن 'و' اور نصف قطر 'د' ہے۔ اسکو تین انصافی رسیوں کے ذریعہ جو اس کے محیط پر متشاکلا بندھی ہیں اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ قرص متوازی الافقی ہے ہر ایک رسی کا طول 'ب' ہے۔ ثابت کرو کہ اس کو زاویہ طہا میں سے گھما ہوا رکھنے کے لئے افقی جفت ہوگا

و ا
باب ۴۔ واجب طہا

۶۷۔ اپل توازن۔ اگر ایک جسم کے دے ہوئے نقطوں پر ایک مستوی میں متعدد قوتیں عمل کریں اور جسم تعادل میں ہو تو بالعموم ایسا نہیں ہوتا کہ جب ان قوتوں کو ان کے نقاط عمل کے گرد کسی زاویہ میں (سب کے لئے مساوی) سے گھما دیا جائے تو بھی جسم تعادل میں رہے۔ اگر ایسا ہو یعنی گردش کے بعد بھی جسم تعادل میں رہے تو توازن کو اپل توازن کہتے ہیں۔

۶۸۔ ہم مستوی قوتوں کے ایک نظام کی ہر ایک قوت کو اس کے نقطہ عمل کے گرد مساوی زاویہ میں سے گھما دیا جائے تو ان کا حاصل جسم کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ اس ہم مستوی نظام کی کوئی قوت F ہے جو جسم کے کسی نقطہ $(لا، ما)$ پر عمل کرتی ہے اور اس کی سمت عمل محور $(لا)$ کے ساتھ
زاویہ θ بنا رہی ہے، نیز فرض کرو کہ محوروں کے توازی اس کے اجزائے
ترکیبی $لا، ما$ ہیں۔ اسی طرح دیگر قوتوں کے لئے۔

اب فرض کرو کہ کل نظام کے اجزائے ترکیبی محوروں $(لا، اور)$
و $ما$ کی سمت میں بالترتیب $لا$ اور $ما$ ہیں اور ابتدا و کے گرد ان قوتوں کا
معیار اثر گ ہے۔ تب

$$لا = \sum F \cos \theta$$

$$ما = \sum F \sin \theta$$

$$اور \quad گ = \sum F \sin \theta \quad (لا، جب \theta = 90^\circ \text{ یا } 270^\circ)$$

دفعہ ۴ کی مانند نظام کے مائل کے خط عمل کی مسادات ہے

$$گ + ما = 0 \quad (1)$$

اب سب قوتوں کو ان کے نقاط عمل کے گرد ایک ہی زاویہ θ
میں سے گھما دو۔ ایسا کرنے سے θ ، $لا$ ، $ما$ ، $اور$ ہو جائیگا۔ لہذا

$$F \cos \theta \text{ ہو جائیگا } F \cos \theta \text{ جب } \theta = 90^\circ \text{ یا } 270^\circ$$

$$F \sin \theta \text{ ہو جائیگا } F \sin \theta \text{ جب } \theta = 90^\circ \text{ یا } 270^\circ$$

$$اور \quad F \sin \theta \text{ ہو جائیگا } F \sin \theta \text{ جب } \theta = 90^\circ \text{ یا } 270^\circ$$

$$\text{ہو جائیگا } F \sin \theta \text{ جب } \theta = 90^\circ \text{ یا } 270^\circ$$

$$\text{یا } (F \sin \theta \text{ جب } \theta = 90^\circ \text{ یا } 270^\circ)$$

$$\text{یعنی } \sum F \cos \theta = 0 \text{ جب } \theta = 90^\circ \text{ یا } 270^\circ$$

$$+ \sum F \sin \theta = 0 \text{ جب } \theta = 90^\circ \text{ یا } 270^\circ$$

$$\text{پس } لا \text{ ہو جائیگا } لا \text{ جب } \theta = 90^\circ \text{ یا } 270^\circ$$

$$\text{اور } ما \text{ ہو جائیگا } ما \text{ جب } \theta = 90^\circ \text{ یا } 270^\circ$$

$$\text{اور } گ \text{ ہو جائیگا } گ \text{ جب } \theta = 90^\circ \text{ یا } 270^\circ$$

$$\text{جہاں } ص = \sum (لا، ما، اور) \text{ اس کو نظام کی سمت کہتے ہیں۔}$$

تب نظام کے لئے حاصل کے خط عمل کی مساوات ہو جاتی ہے
 گ جم عا + ص جب عا + ما (لا جم عا - ما جب عا)
 - (لا جب عا + ما جم عا) = .

یعنی جم عا [گ + ما - لا] + جب عا [ص - ما - لا] = .

(۲).....

عا کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو خط مستقیم جو مساوات (۲) سے تعبیر ہوتا ہے ہمیشہ
 ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے جو خطوط مستقیم
 گ + ما - لا - لا ما = .
 ص - ما - لا - لا = .

کا نقطہ تقاطع ہے یعنی جس کے محدد

$$\frac{\text{گ} + \text{ما} + \text{ص} - \text{لا}}{\text{لا} + \text{ما}} = \frac{\text{گ} + \text{ما} - \text{لا}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

ہیں۔ اس نقطہ کو اپل مرکز کہتے ہیں۔
 ۶۹ - فرض کرو کہ ہٹاؤ سے پہلے قوتیں متبادل میں تھیں۔ تب
 لا = . ما = . گ = .

تب ہٹاؤ کے بعد بھی وہ متبادل میں ہوں گی اگر

لا جم عا - ما جب عا = .

لا جب عا + ما جم عا = .

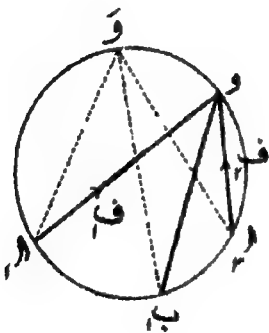
گ جم عا + ص جب عا = .

پس اگر قوتوں کو کسی زاویہ میں سے گھمانے کے بعد

ص = . یعنی اگر χ (لا لا + ما ما) = .

تو ہٹاؤ کے بعد بھی قوتیں متبادل رہیں گی۔ پس متبادل کے اپل ہونگی
 شرط ص = . ہے۔

اس سے یہ بھی نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک متبادل نظام کی ہر ایک قوت کو ایک ہی زاویہ α میں سے گھمایا جائے تو گھمانے کے بعد یہ سب قوتیں ایک جفت کے مساوی ہوتی ہیں جس کا میڈیا اثر ص جب α ہوتا ہے۔
 ۷۔ پانچویں باب میں ہم دیکھیں گے کہ مقلد α لا، اس کام کے مساوی ہے جو قوت α کرنی اگر اس کے نقطہ عمل کو مبدأ سے نقطہ (α, α) تک متحرک کیا جاتا۔ اور α لا، α ما، اس کام کے مساوی ہے جو قوت α کرنی اگر اس کے نقطہ عمل کو مبدأ سے نقطہ (α, α) تک متحرک کیا جاتا۔ اس کام کو تعبیر کرتی ہے جو تمام قوتیں کرتیں اگر انکی پس نظام کی سکت اس کا تعبیر کرتی ہے جو تمام قوتیں کرتیں اگر انکی نقاط عمل کو مبدأ سے اپنے اصلی مقامات تک متحرک کیا جاتا۔
 ۸۔ ہندسی طور پر یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر قوتوں کے نظام کو ایک ہی زاویہ α میں سے گھرایا جائے تو ان کا حاصل ہمیشہ ایک خاص نقطہ میں سے گزرتا ہے خواہ α کچھ ہی ہو۔
 فرض کرو کہ دو قوتیں α اور β بالترتیب α اور β پر عمل



مرحبا واهو واهو = معنی فکانیا محل اہو ہوگا جگہ

اسے بھی زاویہ عما میں سے گھمایا جائے۔
 نیز $\angle \text{ب و ا} = \angle \text{ب و ا}$ یعنی و ب نئی قوتوں
 ف اور ف کے حاصل کا نیا نخل ہے جو ا و اور ا و کے ساتھ عمل کرتی ہیں۔
 پس نقطہ ب وہ نقطہ ہے جس میں سے ف اور ف کا
 حاصل گزرتا ہے خواہ زاویہ عما جس میں سے قوتیں نقاط ا، ا کے گرد
 گھمائی گئی ہیں کچھ ہی ہو۔

نیز زاویہ $\text{و ب و} = \text{زاویہ و ا و}$ عما یعنی حاصل بھی
 اسی زاویہ میں سے گھوما ہے جس میں سے کہ ترکیبی قوتیں گھومی ہیں۔
 اسی طرح سے دئے ہوئے نظام میں سے کوئی اور قوت ف
 لینے سے جو ا پر عمل کرتی ہو ہم ایک اور نقطہ ب ایسا معلوم کر سکتے
 ہیں جس میں سے ف اور ف کے حاصل (جو ب) پر
 عمل کرتا ہے) کا حاصل گزرتا ہے۔ یعنی ب وہ نقطہ ہے جس میں
 ف، ف اور ف کا حاصل ہمیشہ گزرتا ہے۔

اسی طرح بالترتیب ترکیب دینے سے تا وقتیکہ کل قوتیں صرف
 نہ ہو جائیں ہم ایک ایسا نقطہ معلوم کر سکتے ہیں جس میں سے سب قوتوں کا
 حاصل ہمیشہ گزرتا ہے خواہ ان قوتوں کو کسی بھی مستقل زاویہ میں سے
 گھمایا جائے۔

اگر قوتیں ف اور ف متوازی ہوں تو نقطہ و لا تنہا ہی
 پر چلا جاتا ہے اور دائرہ ا و اور ا میں سے گزرتے والا خط مستقیم
 بن جاتا ہے۔ نیز نقطہ ب وہ نقطہ ہے جہاں پر متوازی قوتوں

ف، ف کا حاصل ا، ا سے ملتا ہے اس صورت میں بطلان
 دفعہ ۳ ذیل کے ربط سے ب کا مقام معلوم ہو سکتا ہے
 $\text{ف} \times \text{ا} = \text{ف} \times \text{ب}$

مثال - ثابت کرو کہ تین ہم ستوی قوتیں ف، ف، ف جو نقاط
 ا، ا، ا پر عمل کرتی ہیں اپل تعادل میں ہوگی اگر وہ ایک ایسے
 نقطہ و پر لیں جو ا، ا، ا کے محیط پر واقع ہو اور اگر
 ف : ف : ف = ا : ا : ا



چوتھا باب

رگڑ

۷۲۔ - دفعہ ۱۲ میں ہم نے چکنے اجسام کی تعریف یہ کی تھی کہ اگر ایسے اجسام ایک دوسرے کو مس کریں تو نقطہ تماس پر اپنے درمیان تعامل دونوں سطحوں پر عمود وار ہوتا ہے اور اس لئے ایک جسم کے دوسرے جسم پر پھسلنے میں کوئی قوت مزاحم نہیں ہوتی۔ اگر ایک کامل چکنے جسم کو ایک کامل چکنی سطح مائل پر رکھا جائے تو جسم اور سطح مستوی کے درمیان کوئی عمل ایسا نہیں ہوتا جو سطح مائل پر جسم مذکور کے پھسلنے میں مزاحم ہو اس لئے جسم ساکن نہیں رہے گا تا وقتیکہ کوئی بیرونی قوت اسکو پھسلنے سے نہ روکے۔

عملی طور پر کوئی جسم ایسا نہیں ہے جو کامل چکنا چور ہو۔ مس کریں تو ہر دو جسموں کے درمیان کوئی نہ کوئی قوت ضرور ہوتی ہے جو ایک جسم کو دوسرے جسم پر پھسلنے سے روکتی ہے۔ اس قسم کی قوت کو رگڑ کی قوت کہتے ہیں۔

رگڑ کی تعریف۔ اگر دو جسم ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں تو ان جسموں کی اس خاصیت کو رگڑ کہتے ہیں جسکی وجہ سے انکے نقطہ تماس پر اپنے درمیان ایک ایسی قوت عمل کرتی ہے جو

ایک جسم کو دوسرے جسم پر پھسلنے سے روکتی ہے۔ نیز نقطہ تماس پر عمل کرنیوالی متذکرہ بالا قوت کو رگڑ کی قوت یا قوت فرک کہتے ہیں۔
۳۔ رگڑ ایک ایسی قوت ہے جس کی ہمیشہ حسب ضرورت مناسب مقدار عمل میں آتی ہے۔ اس سے ہماری یہ مراد ہے کہ حرکت کو روکنے کے لئے جس قدر قوت میں کافی ہو سکتی ہے صرف اس قدر ہی قوت عمل میں آتی ہے۔

ایک وزنی تختی کو ایک افقی میز پر اس طرح رکھو کہ تختی کی مستوی سطح میز سے پس کرے۔ اب اگر ہم ایک ڈوبری کو تختی کے کسی نقطہ کے ساتھ باندھ کر تختی کو ایسی افقی سمت میں کھینچیں جو تختی کے مرکز ثقل میں سے گزرے تو ہمیں تختی کو پھسلانے میں کچھ مزاحمت محسوس ہوگی۔ یہ مزاحمت میں اس قوت کے مساوی ہے جو ہم تختی پر لگاتے ہیں۔ اب اگر ہم تختی کو کھینچنا چھوڑ دیں تو رگڑ کی قوت عمل بھی ختم ہو جائیگا کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر رگڑ کی قوت عمل کرنا بند نہ کرے تو تختی حرکت کرنا شروع کرے گی۔
لیکن یہ واضح رہے کہ دو جسموں کے درمیان رگڑ کی جو مقدار عمل کر سکتی ہے وہ غیر محدود نہیں ہے۔ اگر ہم اس قوت کو جو تختی پر لگائی گئی ہے بتدریج بڑھائیں تو ہم دیکھیں گے کہ بالآخر رگڑ کی قوت ہماری قوت پر غالب آنے لگے گی کافی نہیں ہوگی اور جسم حرکت کرنا شروع کر دیگا۔
۴۔ زندگی کے تمام جلی مسائل میں رگڑ کی قوت بہت اہمیت رکھتی ہے۔ اگر ہمارے جوتوں اور زمین کے درمیان رگڑ نہ ہو تو زمین پر چلنا ناممکن ہو جائے۔ اگر سیڑھی کے پائوں اور زمین کے درمیان رگڑ نہ ہو تو سیڑھی بالکل غل میں قائم نہ رہ سکے تاؤ قہیکہ اس کو اس عمل میں کسی خارجی قوت کی مدد سے کھڑا نہ رکھا جاسے۔ رگڑ کے بغیر پیچ اور کیلیں لکڑی کے اندر

رہ سکیں اور نہ ہی ریل گاڑی کا انجن ریل کو کھینچ سکے۔

۵۔ رگرڈ کے کٹے حسب ذیل ہیں۔

کلیہ ۱۔ جب دو جسم ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں تو نقطہ تماس پر ان میں سے ایک پر رگرڈ کی سمت اس سمت کے متقابل ہوتی ہے جس میں یہ نقطہ تماس حرکت کرنا شروع کر نیوالا ہو۔
کلیہ ۲۔ جب اجسام تعادل میں ہوں تو رگرڈ کی مقدار اتنی ہوتی ہے جتنی کہ حرکت کو روکنے کے لئے عین کافی ہو۔
اور کٹے کٹے عام طور پر درست رہتے ہیں۔ لیکن رگرڈ کی زیادہ مقدار جو عمل کرتی ہے محدود ہوتی ہے اور بعض اوقات توازن صین ٹوٹنے کو ہوتا ہے اور اکثر حرکت پیدا ہو جاتی ہے۔

انتہائی رگرڈ کی تعریف۔ جب ایک جسم دوسرے جسم پر عین پھسلنے کو ہو تو اس صورت میں توازن کو انتہائی توازن کہتے ہیں۔ اور اس وقت رگرڈ کی قوت جو عمل کرتی ہے انتہائی رگرڈ

کہلاتی ہے۔ انتہائی رگرڈ کی سمت کلیہ اول کے تحت ہوتی ہے اس کی مقدار ذیل کے تین کلیوں سے حاصل ہوتی ہے۔

کلیہ ۱۔ انتہائی رگرڈ کی مقدار عمادی تعامل کے ساتھ ہمیشہ ایک مستقل نسبت رکھتی ہے اور یہ نسبت صرف ان اشیاء پر منحصر ہوتی ہے جن سے اجسام بنائے گئے ہیں۔

کلیہ ۴۔ انتہائی رگڑ مس کرنے والی سطحوں کی وسعت اور شکل پر منحصر نہیں ہوتی تاوقتیکہ عمادی تعامل نہ بدلے۔

کلیہ ۵۔ جب حرکت جاری ہو جائے اور ایک جسم دوسرے جسم پر پھسلنا شروع کر دے تو رگڑ کی سمت حرکت کی سمت کے متقابل ہوتی ہے۔ اس کی مقدار رفتار پر منحصر نہیں ہوتی لیکن رگڑ کو عمادی تعامل کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ دوران حرکت میں اس نسبت سے قدرے کم ہوتی ہے جو حالت سکون میں انتہائی (۵۶)

رگڑ کو تعامل کے ساتھ ہوا کرتی ہے جب جسم عین حرکت کرنے کو ہو۔ اوپر کے کلے محض تجربہ پر مبنی ہیں اور اس لئے ان کو کسی طرح بھی قطعی طور پر صحیح تصور نہیں کیا جاسکتا اگرچہ معمولی حالات میں ان سے معتد بہ حد تک صحیح نتائج ماخوذ ہوتے ہیں۔

مثلاً اگر ایک جسم کو دوسرے جسم پر اتنے زور سے دبا یا جائے کہ مس کرنے والی سطحوں ٹوٹنے کے عین قریب ہوں تو کلیہ ۲ صحیح نہیں رہتا اور رگڑ کے ٹوٹنے کی شرح عمادی تعامل کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو جاتی ہے۔

۶۔ رگڑ کی قدر۔ انتہائی رگڑ کو عمادی دباؤ کے ساتھ جو مستقل

نسبت ہوتی ہے اس کو رگڑ کی قدر کہتے ہیں اور اس کو عام طور پر μ سے تعبیر کرتے ہیں۔ پس اگر عین اس وقت جبکہ تعادل ٹوٹنے والا ہو

تو F فرک ہو اور عمادی تعامل R ہو تو $\mu = \frac{F}{R}$

اور اس لئے $ق = ماس$
 ماس کی قیمتیں اشیاء کے مختلف جوڑوں کے لئے مختلف ہوتی
 ہیں۔ تاہم کوئی ایسی شیا نہیں ہے جن کے لئے رگڑ کی قدر اتنی زیادہ
 ہو کہ ایک کے مساوی ہو جائے۔

رگڑ کا زاویہ۔ جب تعادل انتہائی ہو تو اس وقت انتہائی رگڑ
 اور عمادی تعامل کو ترکیب دینے سے جو واحد قوت حاصل ہوتی ہے اس کے
 اور عماد کے درمیانی زاویہ کو رگڑ کا زاویہ کہتے ہیں اور واحد حاصل قوت کو
 حاصل تعامل کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ A دو جسموں کا نقطہ تماس ہے اور B اور C
 بالترتیب عمادی قوت S اور رگڑ M کی ہمیش ہیں۔ نیز فرض کرو کہ
 حاصل تعامل S کی
 سمت A ہے۔

پس $B > C$ رگڑ
 کا زاویہ ہے۔ فرض کرو کہ
 یہ زاویہ L ہے۔

تب S جم L = S
 اور S جب L = M

پس $S = \sqrt{1 + M^2}$

اور S L = M

اس سے ظاہر ہے کہ رگڑ کی قدر رگڑ کے زاویہ کے M کے
 مساوی ہوتی ہے۔

چونکہ رگڑ کی بڑی سے بڑی قیمت M ہو سکتی ہے اس لئے
 اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بڑے سے بڑا زاویہ جو حاصل تعامل کی سمت

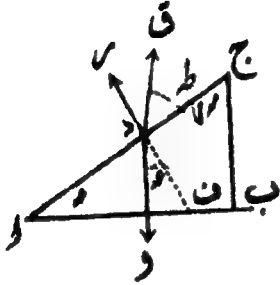


جہاد کی ساتھ بنا سکتی ہے وہ نہ یعنی مستقیم ہوتا ہے۔
 پس اگر دو جسم ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں اور مشترک عماد کو محور اور
 نقطہ تماس کو رأس مان کر ایک مخروط بنایا جائے جس کا نصف راہی زاویہ مستقیم
 ہو تو یہ ممکن ہے کہ حاصل تعامل کی سمت اس مخروط کے اندر یا عین اس کے اوپر
 واقع ہو لیکن اس کی سمت اس مخروط کے باہر واقع نہیں ہو سکتی۔
 اس مخروط کو رگڑ کا مخروط کہتے ہیں۔
 ۷۔ ذیل کی جدول میں چند اشیاء کے لئے رگڑ کی قدیم اور رگڑ کے زاویے
 بتائے گئے ہیں۔ یہ جدول پروفیسر رینکن کی کتاب مشینری اینڈ مل ورک میں سے
 لی گئی ہے۔

نام اشیاء	م	ل
لکڑی لکڑی پر (خشک)	۵۵ تا ۲۵	۱۳۰ تا ۹۰
لکڑی لکڑی پر (صابن لگائی ہوئی)	۱۰ تا ۵	۶۰ تا ۳۰
دھاتیں دھاتوں پر (خشک)	۱۵ تا ۵	۸۰ تا ۶۰
دھاتیں دھاتوں پر (نمدار)	۳	۶۰ تا ۴۰
چمڑا دھاتوں پر (خشک)	۵۶	۹۰ تا ۶۰
" " (نمدار)	۳۶	۶۰ تا ۴۰
" " (مچرب)	۱۵	۸۰ تا ۶۰

۸۔ کھردری مستوی سطح مائل پر تعادل۔
 ایک جسم ایک کھردری مائل مستوی سطح پر رکھا گیا ہے جو افق کے ساتھ
 رگڑ کے زاویہ سے بڑا زاویہ بناتی ہے اور خطِ میلانِ اعظم اور اس
 جسم میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں اس پر ایک قوت عمل کرتی
 ہے جو اس کو تھامنے چوئے ہے، قوت کے حدود دریافت کرو۔
 فرض کرو کہ سطح مائل کا میلان افق کے ساتھ θ ہے، جسم کا وزن

وہ ہے اور مرا انتصابی
تقابل ہے۔



اگر قوت ق سطح
مائل کے ساتھ زاویہ طہ بنائی
ہے جبکہ جسم سطح مائل سے
نیچے کی طرف حرکت کرنے کو
ہو تو رگڑ اوپر کی طرف
عمل کرے گی اور تعادل کی
مساواتیں ہونگی

$$ق = جم ط + مہ = وجب ط \dots (۱)$$

$$ق = جب ط + س = وجم ع \dots (۲)$$

$$اس لئے ق = وجم ط - مہ = جب ط = \frac{وجب (ع - ل)}{جم (ط + ل)} \dots (۳)$$

اب مرا آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

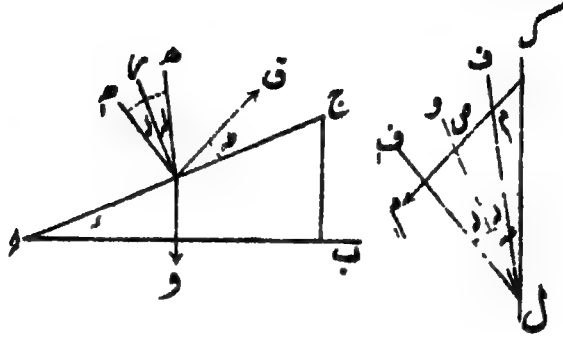
جب جسم سطح مائل پر اوپر کی طرف عین حرکت کر نیکی ہو تو رگڑ مہ مرا سطح مائل
کے نیچے کی طرف عمل کرتی ہے پس مہ کی علامت بدلنے سے (۵۸)

$$ق = وجم ط - مہ = جب ط = \frac{وجب (ع + ل)}{جم (ط - ل)} \dots (۴)$$

ق اور ق کے درمیان قوت کی کسی قیمت کے لئے جسم تعادل میں رہیگا
لیکن یہ تعادل انتہائی نہ ہو گا یعنی جسم کسی سمت میں عین حرکت کرنے کو نہ ہوگا۔
جسم کو سطح مائل پر اوپر کی طرف عین حرکت دینے کے لئے قوت چھوٹی
سے چھوٹی اس وقت ہوگی جب (۴) کم سے کم ہو۔

$$یعنی جب 'جم (ط - ل) = ا یعنی جب ط = ل$$

دفعہ مقابل کی قوتوں ق اور ق کو تعبیر کرتے ہیں۔



نہ بجا دلک = سر اور سمت انقباضی کا درمیانی زاویہ = ع

پس $\angle م ل ک = ع - ل$ اور $\angle م ل ک = ع + ل$

اسی طرح $\angle ک ی و = و$ وہ زاویہ جو سر اور ق کے درمیان ہے
 $= ۹۰ - ط$ ، پس

$\angle ک ص ل = ۹۰ + ط$ ، $\angle ک م ل = ۹۰ + ط - ل$

اور $\angle ک م ل = ۹۰ + ط + ل$ اس لئے

$$\frac{ق}{\sin \angle ک م ل} = \frac{م}{\sin \angle ک ص ل} = \frac{ل}{\sin \angle ک ی و} = \frac{\sin (ع - ل)}{\sin (۹۰ + ط + ل)} = \frac{\sin (ع + ل)}{\sin (۹۰ + ط - ل)}$$

$$\frac{ق}{\sin \angle ک م ل} = \frac{م}{\sin \angle ک ص ل} = \frac{ل}{\sin \angle ک ی و} = \frac{\sin (ع - ل)}{\sin (۹۰ + ط + ل)} = \frac{\sin (ع + ل)}{\sin (۹۰ + ط - ل)}$$

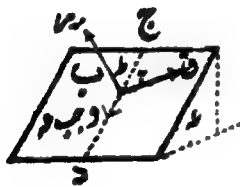
یہ ظاہر ہے کہ کم سے کم اُس وقت ہو گا جب اسے ل ف پر عمود رکھینا
 چاہئے یعنی جب ہی، حاصل تعادل کی سمت دھکے ساتھ زاویہ قائمہ بنائے
 اور اس لئے سطح مائل کے ساتھ زاویہ نہ بنائے۔

۸۰۔ ایک ذرہ کو ایک کھردری مائل سطح پر رکھا گیا ہے جس کا میلان افق کے ساتھ θ ہے۔ ذرہ پر ایک قوت Q سطح مستوی کے متوازی اس سمت میں عمل کرتی ہے جو سطح مائل پر کے میلان اعظم کے خط کے ساتھ زاویہ ϕ بناتی ہے۔ اگر گز کی قدر m ہو اور تعادل انتہائی ہو تو معلوم کرو کہ جسم کس سمت میں حرکت کرنا شروع کرے گا۔

فرض کرو کہ ذرہ کا وزن W ہے اور اس پر عمادی تعادل مرا ہے۔ سطح مائل پر عمود DA قوتیں صفر ہونی چاہئیں۔

∴ $W \sin \theta = Q \cos \phi$ (۱)

وزن کا دوسرا جزو ترکیبی $W \cos \theta$ ہو گا جو میلان اعظم کی سمت میں نیچے کی طرف عمل کرے گا۔



فرض کرو کہ $W \cos \theta$ سمت AB میں عمل کرتی ہے جو میلان اعظم کی سمت کے ساتھ زاویہ ϕ بناتی ہے پس

ذرہ AB اور $W \cos \theta$ کی سمت میں حرکت کرنا شروع کرے گا۔

چونکہ سطح مائل کے متوازی عمل کرنے والی قوتیں تعادل میں ہیں اس لئے لامی کے مسئلہ کی رو سے

$$W \sin \theta = Q \cos \phi \quad \text{جب } W \cos \theta = Q \sin \phi \quad \text{..... (۲)}$$

(۱۱) اور (۱۲) سے سہ اور و کو سا قفا کرنے سے

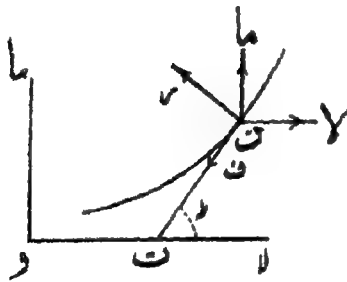
$$\text{جم عہ} = \frac{\text{ما}}{\text{و}} = \frac{\text{جب عہ جب پ}}{\text{سہ جب (طہ + پ)}}$$

$$\text{لہذا جب (طہ + پ)} = \frac{\text{مس عہ جب پ}}{\text{ر}} \dots \dots \dots (۳)$$

جس سے طہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۸۱۔ ایک معلومہ مکھڑے سخی پردی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ذرہ کا تعادل۔

فرض کرو کہ سخی مستوی ہے اور ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی بالترتیب لا اور ما ہیں۔
فرض کرو کہ عمادی



تقابل سہ ہے اور ما س
نسبت کی سمت میں
جو محور لا کے ساتھ زاویہ
ط بنا تا ہے مرکز کی
قوت ف ہے، جب
ماس اور عمادی
نسبت میں تحلیل
کرنے سے

$$\text{لا جم ط} + \text{ما جب ط} = \text{ف} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{لا جب ط} - \text{ما جم ط} = \text{سہ} \dots \dots \dots (۲)$$

اگر مرکز کی قدر مہ ہو تو ذرہ تعادل میں رہے گا جب کہ ف مہ سہ سے

فہ (لا، ما، ی) = ہے اور ذرہ پر جو قوتیں عمل کر رہی ہوں ان کے اجزائے
تحلیلی لا، ما، ی ہوں تو تعادل کی مساواتیں آسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں
کیونکہ اس صورت میں کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر سطح کے عماد کی سمتی جیوب التمام
جف فہ / جف لا، جف فہ / جف ما، اور جف فہ / جف ی کے متناسب ہوتے ہیں۔

ذره تعادل میں ہوگا اگر وہ زاویہ جو حاصل تھا مل عماد کے ساتھ بناتا ہے
لہ سے بڑا نہ ہو۔

$$\begin{aligned} & \text{یعنی اگر } \left\{ \frac{\text{لا جف فہ}}{\text{لا جف لا}} + \frac{\text{ما جف فہ}}{\text{ما جف ما}} + \frac{\text{ی جف فہ}}{\text{ی جف ی}} \right\} \\ & \left\{ \frac{(\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})}{\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right)^2 + \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \right)^2 + \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}} \right)^2} \right\} \\ & \text{یعنی اگر } \left\{ \frac{(\text{لا جف فہ} + \text{ما جف فہ} + \text{ی جف فہ})}{\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \right)^2 + \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \right)^2 + \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}} \right)^2} \right\} \\ & \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

مثالیں

- ۱۔ ثابت کرو کہ کم سے کم قوت جو کسی وزن و کو کھردری افقی سطح پر کھینچ سکتی ہے
جب فہ ہوتی ہے جہاں فہ رگڑ کا زاویہ ہے۔
- ۲۔ بتاؤ کہ ایک وزنی گڈی کے ساتھ رستے بازہ کرکس سمت میں کھینچا جائے
کہ گڈی کو کم سے کم قوت کے ساتھ ایک پہاڑی پر کھینچ کر لے جائیں۔
- ۳۔ ایک کھردری سطح اُٹل پر جو افق کے ساتھ ۵۴° کا زاویہ بناتی ہے اور جس کی
رگڑ کی قدر ۰.۵ ہے ایک وزن در کھا گیا ہے۔ وزن کے ساتھ ایک رسی
بندھی ہے جو سطح اُٹل کی جہتی لہ پر ایک پکٹے پکٹے سے گزرتی ہے اور ایک وزن

فن کو سہارے چوئے ہے جو انحصاراً ایک راس ہے اگر $و = ۳$ اور رسی $ل$ کا بڑے سے بڑا سیلان سطح اکل کے سیلان اعظم کے ساتھ $ط$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$جم ط = \frac{۲}{۳} ط$$

نیز دوست معلوم کرو جس میں وزن و حرکت کرنا شروع کرے گا۔

۴۔ ایک وزن و ایک کھر دی سطح اکل پر بڑا ہے جس کا زاویہ سیلان افقی کے ساتھ $ع$ ہے اور رگڑ کی قدر $م$ ہے۔ ثابت کرو کہ سطح اکل کے متوازی کم از کم افقی قوت جو جسم کو حرکت دے سکتی ہے ۳ و جب $ع$ ہے اور جسم ایک ایسی سمت میں حرکت کرنا شروع کرے گا جو سطح اکل کے سیلان اعظم کے ساتھ ۶۰ کا زاویہ بناتی ہے۔ (۳۶)

۵۔ ایک کھر دی سطح اکل کا زاویہ سیلان $ع$ ہے اس پر ایک وزنی ذرہ رکھا گیا ہے اور اس کو ایک تخی ہوئی بے وزن رسی $ل$ کے ذریعے اکل مستوی میں ایک ثابت نقطہ $ا$ سے لایا گیا ہے۔ اگر سیلان اعظم کا خط $ا ب$ ہو اور زاویہ $ب ا$ $ط$ کے سادسی ہو جبکہ ذرہ میں حرکت کرنے والا ہو تو ثابت کرو کہ

$$جب ط = م مم ع$$

م مم $ع$ کے ایک سے بڑا چوئے کی صورت میں جواب کی تشریح کرو۔

۶۔ دو وزنوں $ا$ اور $ب$ کو ایک رسی کے ذریعے لایا گیا ہے اور $ا$ کو ایک افقی میز پر جس کی رگڑ کی قدر $م$ ہے رکھا گیا ہے۔ ایک قوت $ق$ جو $م$ ($ا + ب$) سے چھوٹی ہے $ا$ پر $ب$ کی سمت میں لگائی گئی ہے اور اس کی سمت کو افقی سطح مستوی میں جدوجہد زاویہ $ط$ میں سے گمایا گیا ہے۔ اگر $ق < م (ا + ب)$ تو ثابت کرو کہ $ا$ اور $ب$ دونوں پھسلیں گے جبکہ

$$جم ط = \frac{م (ا + ب) - ق}{ا + ب}$$

لیکن اگر قوت $ق$ $م (ا + ب)$ سے کم کرے اسے زیادہ ہو تو صورت $ا$ پھسلے گا جبکہ

$$جب ط = \frac{م (ا + ب) - ق}{ا + ب}$$

۷۔ ایک خطہ دیکھو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور اس نیچے وار ہے ثابت کرو کہ ذرہ اس کے کسی نقطہ پر ساکن رہ سکتا ہے جسکی بلندی اس سے ۲ و جب اس حصہ سے زیادہ نہ ہو جہاں صدر گرد کا زاویہ ہے اور اس خطہ دیر کے متکثرینی دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۸۔ ایک ذرہ محوری کے متوازی ایک مستقل قوت کے زیر عمل سطح لا ا ی = ج پڑ ساکن ہے اگر گرد کی قدر مہ ہو تو ثابت کرو کہ مخروط $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_1}$ اور وی ہوئی سطح کا سطحی تقاطع اس سطح کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کر دے گا جن میں سے ایک بہ توازن ممکن ہے اور دوسرے پر ممکن نہیں ہے۔

۹۔ ناقص نما $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$ کی سطح کھردری ہے اور اس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ لاکہ محور انتصابی ہے ثابت کرو کہ کوئی ذرہ اس ناقص کے اس حصہ میں جو ناقص نما اور اسطوانہ $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$ (مہ ج ۲ + مہ ج ۱) = مہ ج ۳ کے سطحی تقاطع کے اوپر واقع ہے کہیں بھی متعادل رہ سکتا ہے۔ چنانہ مہ گرد کی قدر ہے۔

۱۰۔ مکانی نما $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_1}$ کی کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس اوپر وار ہے اگر گرد کی قدر مہ ہو تو ثابت کرو کہ ایک ذرہ مکانی نما کے اس حصہ میں جو مکانی نما اور اسطوانہ $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_1}$ کے سطحی تقاطع کے اوپر واقع ہے کہیں بھی متعادل رہے گا۔

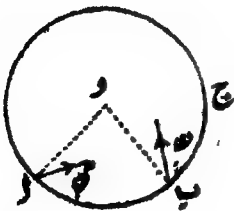
۱۱۔ ایک قائم ذرہ کو اس کے ایک انتصابی متقارب کے گرد گھمانے سے ایک سطح حاصل کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ اس سطح اور ایک خاص مستدیر اسطوانہ کے خط تقاطع کے پرے کے حصہ میں کسی مقام پر ایک ذرہ متعادل رہ سکتا ہے۔

۱۲۔ ایک کھردرا گردی مکانی نما ہے جس کا وتر خاص ۴ ہے اور گرد کی قدر مہ ہے۔ یہ یکساں زاویہ رفتار مہ کے ساتھ اپنے محور کے گرد جو انتصابی ہے گھومتا ہے۔

اگر سہ < $\frac{1}{2}$ م $\frac{1}{2}$ یا > $\frac{1}{2}$ م $\frac{1}{2}$ مس $\frac{1}{2}$ ق ثابت کر دو کہ ذرہ ایک خاص منطقہ کے سوائے ہر مقام پر متبادل رہے گا، لیکن اگر ذراوی رفتار ان انتہائی قیمتوں کے اندر واقع ہو تو ذرہ ہر مقام پر متبادل رہیگا۔
[اس سوال کو حل کرنے کے لئے فرض کر سکتے ہیں کہ سطح ساکن ہے اور ذرہ ہر ایک مزید مرکزی قوت م سہ تا م عمل کرتی ہے جس کی سمت ذرہ سے مکانی منہ کے محور پر کھینچے ہوئے عمود کے باہر کی طرف ہے]

۸۴۔ کھردرے جوڑ یا فیضے۔ دفعہ ۶۵ کی شکل میں اگر رگڑ کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو لپر کا حاصل تعادل، لپر کے عماد کی سمت میں نہیں ہوگا۔ اس صورت میں لپر کا تعادل ق، مرکز و میں سے گزرنے والی ایک متوازی قوت م سہ ایک جنت کے مساوی ہوگا جس کا سیار اثر قوت اور اس عمود کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا جو د سے ق کی سمت پر کھینچا جائے۔ اسی طرح تماس کے دیگر نقطوں کے لئے۔ پس حاصل تعادل و میں سے گزرنے والی چند قوتوں اور چند جنٹوں کے مساوی ہوتا ہے یہ ترکیب پاکرو میں سے گزرنے والی ایک واحد قوت اور ایک واحد جنت کے مساوی ہوتے ہیں۔ پس جب کسی جوڑ میں رگڑ عمل کرے اور ایک سے زیادہ نقطوں پر تماس ہو تو دفعہ ۶۵ کی نامعلوم قوتوں یا قوتوں کے نامعلوم اجزائے ترکیبی کو فرض کر لینے کے علاوہ ایک نامعلوم جنت کو بھی فرض کرنا چاہیے۔

جب جوڑ کھردرا ہو لیکن تماس صرف ایک ہی نقطہ پر واقع ہو جیسا کہ ساتھ کی شکل میں لپر دکھایا گیا ہے تو چکنے جوڑ کی طرح ہم فرض کر سکتے ہیں کہ تعادل ایک واحد قوت پر مشتمل ہے جو ا میں سے گزرتی ہے۔



۸۵۔ رگڑ کے کلیوں کی توضیح کے لئے ہم چند

مثالیں ذیل میں درج کرتے ہیں۔

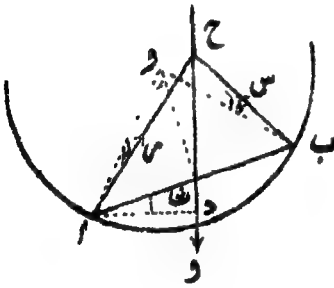
مثال ۱۔ ایک بجساں سلاخ انتہائی تقادل کے محل میں ایک کھر دے کرے کے اندر پڑی ہے۔ اگر کرے کے مرکز پر سلاخ کے محاذی زاویہ ۲۷ بنے اور اگر رگڑ کا زاویہ نہ ہو تو ثابت کرو کہ افقی کے ساتھ سلاخ کے سیلان کا زاویہ ہوگا

$$\text{مس} = \frac{\text{جب } ۲۷}{\text{جم } (۷۰ + ۲۷) - \text{جم } (۷۰ - ۲۷)}$$

فرض کرو کہ اب ایک سلاخ ہے، اس کا وسطی نقطہ ہے اور وکرہ کامر کو ہے، تب

$$\angle \text{ا} = \angle \text{ب} = \angle \text{و} = \angle \text{د}$$

۱ اور ب میں سے خطوط ا ج اور ب ج کھینچو جو ا اور ب کو کرہ کے مرکز سے ملانے والے خطوط کے ساتھ زاویہ نہ بنائیں، تب دفعہ ۱ کی رو سے یہ خطوط ا اور ب پر کے حاصل تعاملوں مسا اور مس کی سمتیں ہیں۔



چونکہ یہ تعاطل اور سلاخ کا وزن سلاخ کو تقادل کی حالت میں رکھتے ہیں اس لئے ا ج میں سے گزرنے والا اتصافی خط ج میں سے گزرے گا۔
۱ میں سے ایک افقی خط ا د کھینچو جو ج ب سے ڈپرے۔

فرض کرو کہ زاویہ ا د ب = ط

$$\text{تب } \angle \text{ا د ب} = \angle \text{ا د ج} = \angle \text{ا د ج} = ۷۰ - ۲۷$$

$$\text{اور } \angle \text{ب ج د} = \angle \text{و ب د} = ۷۰ - ۲۷$$

پس دفعہ ۵ کے مسئلہ ۲ سے حاصل ہوتا ہے

$$۲ \text{ مس } ط = \text{مس } (۷۰ + ۲۷) - \text{مس } (۷۰ - ۲۷)$$

جب ۲۷

$$(۱) \quad \frac{\text{جم } (۷۰ + ۲۷) - \text{جم } (۷۰ - ۲۷)}{\text{جم } ۲۷} =$$

یا اس طرح: دفعہ ۴ کی شرائط کو استعمال کرنے سے بھی مطلوبہ حل حاصل ہو سکتا ہے۔
قوتوں کو سلاخ کے متوازی تحلیل کرنے سے

سراجب (ع + ل) - س جب (ع - ل) = وجب ط - - - - - (۲)
سلاخ کے عمود وار تحلیل کرنے سے

ساجم (ع + ل) + س جم (ع - ل) = وجم ط - - - - - (۳)
۱ کے گرد معیار اثر لینے سے

۲ س جم (ع - ل) = وجم ط - - - - - (۴)
ساداتوں (۳) اور (۴) سے

ساجم (ع + ل) = س جم (ع - ل) = $\frac{1}{4}$ وجم ط
س اور س کی یہ قیمتیں (۲) میں درج کرنے سے

مس (ع + ل) - مس (ع - ل) = ۲ مس ط

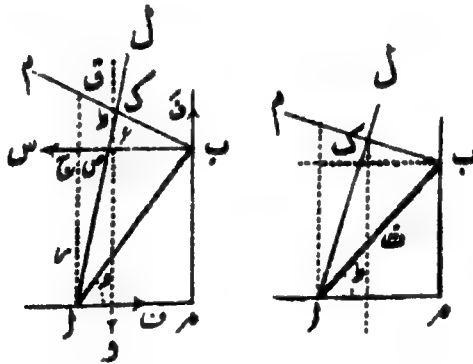
مثال ۲۔ ایک شہتیرا ب اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سر ل ایک کھر در سے
افقی فرش پر ہے اور دوسرا سر اب ایک کھر در کی انتصابی دیوار کو مس کرتا ہے۔
اب میں سے گورنے والا انتصابی مستوی دیوار پر عمود وار ہے اگر شہتیر کا زاویہ
میلان افقی کے ساتھ دیا ہو شہتیر کے توازن پر بحث کرو۔

فرض کرو کہ ۱ پر کا عمادی تعامل اور رگڑ بالترتیب س اور ف ہیں اور ب
پر کا عمادی تعامل اور رگڑ بالترتیب س اور ف ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا
گیا ہے۔

۳ سمتوں میں تحلیل کرنے اور کسی نقطہ کے گرد معیار اثر لینے سے ہمیں چار نامعلوم

مقداروں $س$ ، $ف$ اور $ق$ میں صرف تین مساواتیں ملتی ہیں۔ اس لئے یہ مقداریں معلوم نہیں ہو سکتیں۔

یہ امر واقعہ علم ہندسہ سے بھی ظاہر ہے۔ دو خط $ال$ اور $ب$ ہم ایسے کھینچو جو عمادوں $ج$ اور $ب$ سے بالترتیب $ناویے ل$ اور $کے$ بنائیں جہاں $ل$ اور $کے$ اور $ب$ ہر گز کے $ناویے$ ہیں، اب فرض کرو کہ شہتیر کے مرکز ثقل $ش$ میں سے گزرنے والا انتصابی خط $ان$ سے $ع$ اور $ط$ پر ملتا ہے۔ تب تا وقتیکہ $ط$ فضا $ق$ $ال$ کے اندر اور $ع$ فضا $ب$ $ص$ کے اندر ہے جیسا کہ شکل میں ہے یعنی تا وقتیکہ $ش$ میں سے گزرنے والا انتصابی خط فضا $ق$ $ک$ $ص$ کو کاٹے ہم $ع$ اور $ط$ کے اندر کوئی نقطہ $ن$ ایسا لے سکتے ہیں کہ $ل$ اور $ب$ پر کے حاصل قتلوں کی سمتیں $لن$ اور $بن$ کا ہوں اور شہتیر تعادل میں رہے۔ اگر $ن$ نقطہ $ع$ پر منطبق ہو تو $ل$ پر تعادل انتہائی



ہوگا لیکن $ب$ پر نہیں اور اگر $ن$ $ط$ پر منطبق ہو تو تعادل $ب$ پر انتہائی چوکا لیکن $ل$ پر نہیں۔ اور ان دما انتہائی محلوں کے اندر قوتوں کی کوئی سی ترتیب ہو سکتی ہے۔ اگر $ش$ میں سے گزرنے والا انتصابی خط $ک$ کے دائیں جانب واقع ہو تو

اس پر ہمیں کوئی نقطہ ایسا نہیں مل سکتا کہ اس ایک ساتھ لپر رگڑ کے مخروط اور نیز بن
جہ رگڑ کے مخروط کے اندر جو اس لئے قاعدہ نامکن ہو گا۔

اگر شہتیرا ایسے محل میں ہو کہ اس کا تعادل انتہائی ہو اور بناؤ علیہ شہتیر نیچے پھسلنے کے عین قریب ہو تو نقطہ اور خط تک پر منطبق ہو جائیں گے جو اول اور جب م کا نقطہ تقاطع ہے، اگر خط = ۱۰ اور خط ب = ۱۰ دفعہ ۵ کی مسد کی رو سے

(۱+۲) نمک شکر = ۱۰۰ گرم کث - ۲۰۰ گرم شکر ب

یعنی (ا + ب) مسط = ا مم ل - ب مس ل

$$\left\{ \frac{b - \frac{1}{b}}{b + \frac{1}{b}} \right\} = \text{مس۔ ۱}$$

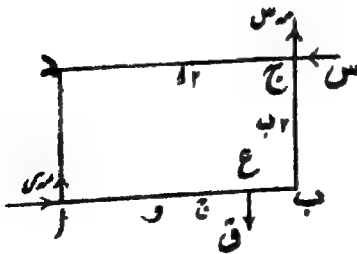
$$= \frac{2 - \frac{1}{2} \text{ ب } 1}{2 \text{ ب } 2}$$

اس لئے جب ۲ ط = $\frac{2 \text{ ب } 1 \text{ ب } 1}{2 - \frac{1}{2}}$ سے متبادل کا انتہائی محل حاصل ہوتا ہے۔

اگر $\frac{2 \text{ ب } 1 \text{ ب } 1}{2 - \frac{1}{2}} < 1$ تو ط کی کوئی حقیقی قیمت نہیں ہوتی یعنی متبادل کا کوئی انتہائی محل نہیں ہے۔ اس لئے تار کھینچی کے اوپر کسی نقطہ پر متبادل رہ سکتا ہے۔

مثال ۳۔ ایک پہر کے خانہ کے دستے اس کی طرفوں سے متساوی الفصل ہیں۔ اور ایک دوسرے سے ۲ ج کے فاصلہ پر ہیں، خانہ کے پہلوؤں میں ریگڑ کی مقدار مساوی ہو اور پیدا چکنا ہو تو ثابت کرو کہ صرف ایک دستہ کو میدھا باہر کی طرف کھینچنے سے خانہ باہر نہیں نکل سکتا تا وقتیکہ خانہ کا طول سامنے کے رخ سے پشت تک ۲ ج سے زیادہ نہ ہو۔

فرض کرو کہ خانہ ۱ ب ۱ ج د ہے اور اس کا طول ۱ ب اور گہرائی ۱ ج بالترتیب ۱ ب اور ۱ ج کے مساوی ہیں۔ اگر ۱ ب کے قریب کا دستہ ع ہو تو ح پر باہر کی طرف قوت لگا کر کھینچنے کا یہ نتیجہ ہو گا کہ خانہ کے کونے ج اور ۱ میز کے ساتھ جم جائیں گے اور اس طرح پہلوؤں ۱ د اور ۱ ب ج پر دباؤ مقامات ۱ د اور ج پر بالترتیب مساوی اور س ہو جائیں گے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے



جسم کی حرکت میں زیادہ سے زیادہ مزاحمت اس وقت ہوگی جب کہ ۱ د اور ج پر ریگڑ کی قوتیں مساوی اور س کے مساوی ہوں۔ ۱ ب کے متوازی تحلیل کرنے سے

س = مس (۱)

۱ کے گرد مسیار اثر لینے سے قی (ج + ۱) = مس ۲x ۱ + مس ۲x ۲ ب (۲)

نیز اگر د کی سمت میں حرکت ہو سکے تو لازمی طور پر

$$ق < مس (س + مس) \quad \text{یعنی} \quad ق < مس \frac{ج + ۱}{س + ۱ + ب}$$

یعنی (ب - مس ج) ق < ۰

چونکہ ق صفر نہیں ہے اس لئے ضروری ہے کہ ب < مس ج
اس صورت میں ق کی مقدار کا نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا یعنی
اگر ب < مس ج

تو ق خواہ کتنا ہی کم ہو خانہ باہر کھینچ آئے گا لیکن اگر ب > مس ج سے تو ق خواہ کتنا ہی
بڑا کیوں نہ ہو خانہ باہر نہ کھینچے گا۔

مثال ۵۔ ایک بائیسکل کے پیوں کے سب سے نیچے نقطوں کو ملانے والے خط کا
طول ۲ فٹ ہے اور سیکل کا مرکز نقل اس خط کے اوپر فٹ ارتفاع پر اور اس کے وسطی نقطہ
سے فاصلہ لاپہ آگے کی طرف واقع ہے۔ اگر ڈھرے کی رگڑ کا لحاظ نہ کیا جائے تو بتاؤ کہ اس
سطح ایل کی بڑی سے بڑی ڈھال کیا ہو سکتی ہے جس پر بائیسکل بغیر پہلے ٹھہر کے جبکہ بالترتیب
اس کے اگلے یا پچھلے پہر کو

بریکنگا دیا جائے

جب پچھلے پہر کو بریک

ہو تو اس پر رگڑ نہ ہو

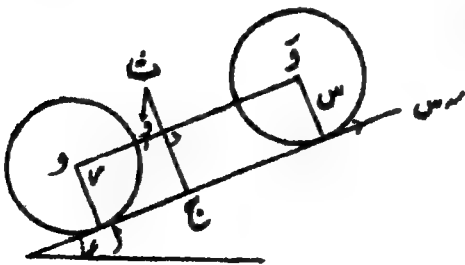
کے مساوی ہوگی۔ اگر مرکز

نقل ت ہو تو

$$۱ - ۱ = ۰$$

$$۲ - ۱ = ۱$$

$$ج - ۱ = ۰$$



سطح اُٹل کے متوازی اور اس پر عمود وار سمت میں تحلیل کرنے سے حادثہ کے گرد محیط اثر لینے سے

$$\text{مس} = \text{وجہ} \times \text{مس} \quad (۱)$$

$$\text{مس} + \text{مس} = \text{وجہ} \times \text{مس} \quad (۲)$$

$$\text{مس} (\text{سرف} + ۱ + ۱) = \text{مس} (۱ - ۱) \quad (۳)$$

$$(۲) \text{ اور } (۳) \text{ سے } \text{مس} (\text{سرف} + ۱ + ۱) = (۱ - ۱) \times \text{وجہ}$$

$$\text{اس لئے } (۱) \text{ سے } \text{مس} = \frac{\text{مس} (۱ - ۱)}{\text{سرف} + ۱ + ۱} \quad (۴)$$

اگر اگلے پتہ کو بریک ہو تو (۱) پر رگڑ دینے کے مساوی ہوگی اور اگر اس صورت میں سطح اُٹل کی حالت یہ ہو تو اسی طرح

$$\text{مس} = \text{وجہ} \times \text{مس}$$

$$\text{مس} + \text{مس} = \text{وجہ} \times \text{مس}$$

$$\text{اور } \text{مس} (۱ - ۱ - ۱) = \text{مس} (\text{سرف} + ۱ + ۱)$$

$$\text{اس لئے حسب سابق } \text{مس} = \frac{\text{مس} (۱ + ۱)}{\text{سرف} + ۱ + ۱} \quad (۵)$$

ظاہر ہے کہ یہ بڑا ہے ع سے یعنی جب اگلے پتہ کو بریک لگا ہو تو آپسکل زیادہ بڑے میلان والی سطح مستوی پر ٹھہر سکتی ہے بہ نسبت اس صورت کے جبکہ پچھلے پتہ کو لگا ہو۔
مثال ۹۔ ایک چپاؤ ذنی مستطیر قرص ایک کھردری سطح مستوی پر پڑا ہے اور اپنے محیط کی ایک سوئی کے گرد بلا جھلک گھوم سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ یکسی محل میں ساکن رہ سکتا ہے جبکہ گرد کی قدر $\frac{۱۱}{۳۲} \text{ مس}$ سے بڑی ہو جہاں سطح اُٹل کا میلان ہے

افتی کے ساتھ یہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ قرص کا وزن اس کے رقبہ پر یکساں تقسیم ہے۔
فرض کرو کہ قرص کا متبادل انتہائی ہے جبکہ اس کا قطر ω جو سوئی و میں سے گزرتا ہے خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ θ بنا ہے۔ نیز فرض کرو کہ قرص کا وزن W فی اکائی رقبہ ρ ہے اور اس کا نصف قطر r ہے۔ اس لئے اس کا کل وزن $\rho \pi r^2$ ہے۔

تب اے اور ع ب پر رگڑ کی قوتیں متقابل سمتوں میں ہونگی جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح ب ع اور ع ج کے لئے۔
فرض کر کہ کلب پر نقطہ تعادل لا ہے جو مرکز یا ہر ایک سلاخ پر عمود وار ہے۔ اے ج پر رگڑ $\frac{1}{2}$ ہے اور ع سے $\frac{1}{3}$ فاصلہ پر عمل کرتی ہے۔ اس لئے ع ب پر رگڑ $\frac{1}{2}$ ہے اور ع سے $\frac{1}{3}$ فاصلہ پر عمل کرتی ہے۔

سلاخ ا ب پر عمود وار تحلیل کرنے سے اور ع کے گرد معیار اثر لینے سے
ف + لا = مرد $\frac{1}{2}$ - مرد $\frac{1}{3}$ = مرد $\frac{1}{3}$ - مرد $\frac{1}{2}$ (۱)

اور ف لا = لا (۱ - ۱) = مرد $\frac{1}{3}$ × $\frac{1}{2}$ + مرد $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{3}$ = مرد $\frac{1}{6}$ + مرد $\frac{1}{6}$ = مرد $\frac{1}{3}$ (۲)
اسی طرح ب ج کے لئے

لا = مرد $\frac{1}{3}$ - (ب - ۱) (۲)

اور لا = ۱ - مرد $\frac{1}{3}$ (۱ - ۱) + ب - ۱ = مرد $\frac{1}{3}$ (۳)

(۳) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے لا = مرد $\frac{1}{3}$ اور لا = مرد $\frac{1}{3}$ (۱ - ۱) نیز (۱) اور (۲) سے

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = لا = مرد \frac{1}{6} (۱ - ۱) \quad (۴)$$

$$لا = \frac{1}{3} \left(۱ + \frac{1}{2} (۱ - ۱) \right)$$

اور ف (۱) سے نکل جاتا ہے۔

ذکرہ بالا عمل درست رہیگا جب تک کہ $\lambda > \frac{2}{(1-\tau_2)}$ یعنی $\frac{2}{(1-\tau_2)} \geq 1$

اگر $\frac{2}{(1-\tau_2)} < 1$ یعنی $\lambda < 1$ تو اوپر کا عمل درست نہیں ہے اور
 لب کے مختلف قطعوں پر رگڑ کی قوتیں سب کی سب ایک ہی سمت میں عمل کرتی ہیں۔

اس صورت میں آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ $\lambda = 1$ یعنی اس صورت
 میں λ کم ہے۔ $\frac{2}{(1-\tau_2)} = 1$ سے جو اوپر کے مطابق دو قوتیں جو ب ج کو حرکت دینے کے
 لئے درکار ہے۔ اس لئے دوسری سلاخ میں حرکت کرنے کے قریب نہیں ہے بلکہ
 صرف لب حرکت کرنے کے قریب ہے۔

مثالیں

(۱) ایک یکساں سلاخ م ن کے سرے دو ثابت سیدھی کھردی ٹالیوں والا اور لب کے
 اندر ہیں جو ایک ہی انتصابی سطح مستوی میں واقع ہیں اور افق کے ساتھ θ اور ϕ زاویے
 بناتی ہیں ثابت کرو کہ جب μ λ کی سمت میں عین پھسلنے کو ہو تو م ن افق کے
 ساتھ جو زاویہ بناتا ہے اس کا μ اس

جب (ع-ب-د) $\frac{\text{ہو گا جہاں } \lambda \text{ رگڑ کا زاویہ ہے۔}}{\text{جب (ب+د) جب (ع-د)}}$

(۲) ایک انتصابی مستطیلی خنثیر کا وزن W ہے اور اس کا پھیلا س λ ایک چکنے فرش پر چکا
 خنثیر اس طرح مقید ہے کہ یہ صرف اپنی سمت میں حرکت کر سکتا ہے۔ اگر اس کے نیچے معلوم
 ڈھال کی ایک چکنی سطح μ ایک ایسی قوت سے ڈھکیل دیا جائے جو سطح μ کے پٹھ
 پر عمل کرتی ہے اور افق کے متوازی ہے تو اس قوت کی مقدار معلوم کرو۔

اگر صرف فرش اور سطح μ کے درمیان رگڑ ہو لیکن کسی اور جگہ رگڑ نہ ہو تو
 بناؤ کہ μ کی کم سے کم قیمت کیا ہونی چاہیئے کہ سطح μ کو چھوڑ دینے پر وہ خنثیر کے
 نیچے ٹپک جائے اور خنثیر کے وزن سے باہر نہ عمل پڑے۔

(۳) ایک دذنی سلاخ جس کا طول 2 ہے ایک کھردی پنج پر پڑی ہے اور اس کا

اور اس کا ایک سر ایک کھردری انتظامی دیوار پر چبکا ہوا چکا ہے۔ اگر دیوار سے بیخ کا فاصلہ ج جو اور دیوار اور بیخ ہر ایک پر رگڑ کا زاویہ ل ہو تو ثابت کرو کہ دیوار اور سلاخ کا نقطہ تماس بیخ سے اوپر ہونے کی صورت میں سلاخ نیچے کی طرف عین پھسلنے کو ہوگی جبکہ جب $\mu = \frac{c}{\sigma}$ جسم لہ جہاں μ سلاخ کا میلان ہے دیوار کے ساتھ۔

اگر سلاخ اور دیوار کا نقطہ تماس بیخ سے نیچے ہو تو ثابت کرو کہ سلاخ نیچے کی طرف عین پھسلنے کو ہوگی جبکہ

$$\text{جب } \mu < \frac{c}{\sigma} \text{ (ط ۲ لہ) } = \frac{c}{\sigma} \text{ جسم لہ}$$

اور اہل کی طرف عین پھسلنے کو ہوگی جبکہ جب $\mu > \frac{c}{\sigma}$ (ط ۲ لہ) = $\frac{c}{\sigma}$ جسم لہ۔
(۵۰) ایک یکساں شہتیر کا طول ۲ فٹ ہے اس کا ایک سر ایک کھردری افقی سطح مستوی پر ہے اور دوسری جانب شہتیر ایک کھردری دیوار کے اوپر کے کنارے پر چکا ہوا ہے جس کی بلندی ۲ فٹ ہے شہتیر میں سے گزرنے والا انتظامی مستوی دیوار پر عمود وار ہے۔ اگر شہتیر ہر میلان پر جو ہندسی طور پر ممکن ہو متبادل رہ سکے اور دیوار اور فرش مساوی طور پر کھردرے ہوں تو بتاؤ کہ شہتیر اور دیوار یا شہتیر اور زمین کا رگڑ کا زاویہ $\frac{1}{2}$ جب $\mu = \frac{c}{\sigma}$ سے کم نہیں ہو سکتا۔

(۵۱) ۲ فٹ طول کی دو مساوی یکساں سلاخیں چکنے طور پر ایک سرے پر ایک قبضہ کے ذریعہ وصل کی ہوئی ہیں اور ج نصف قطر کے ایک کھردرے کرہ پر متشاکلاً ساکن ہیں۔ تعادل کا انتہائی محل معلوم کرو۔ اور ثابت کرو کہ اگر رگڑ کی قدر $\frac{1}{2}$ ہو تو سمت انتظامی کے ساتھ ہر ایک سلاخ کا انتہائی میلان $\frac{1}{2}$ ہے۔

(۶) اگر ایک ہر کار ایک چکنے افقی سطوح پر جس کا نصف قطر ج ہے آڑی پڑی ہو تو ثابت کرو کہ جوڑ پر رگڑ کا نصف ج اس کی ساتین کو پھسلنے سے روکتا ہے
(ج کم و کم و - وجب و)

ہے جہاں ڈیڑھ ایک ساق کا وزن ہے ۲/۵ ساقین کا درمیانی زاویہ ہے اور جوڑے ساق کے مرکز ثقل کا فاصلہ ہے۔

(۷) ایک سلاخ ایک کھردری سطح اُبل پر پڑی ہے۔ سطح اُبل کا افق کے ساتھ میلان α رگڑ کے زاویہ λ سے بڑا ہے۔ سلاخ اپنے ایک سرے کے گرد بلا تکلف گھوم سکتی ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے لئے خط میلان اعظم اور سلاخ کا درمیانی زاویہ زیادہ سے زیادہ جب $\frac{3}{2}(\sin \lambda \cos \alpha)$ ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ ایک معمولی سینکڑا خانہ اس کے ایک دستہ پر قوت لگانے سے اُبل نہیں دھکیلا جاسکتا تا وقتیکہ اس کو کسی اور طرح سے پہلے فاصلہ $2r$ ج میں سے اُبل نہ دھکیلا جائے جہاں $2r$ ج دستوں کا درمیانی فاصلہ ہے اور r رگڑ کی قدر ہے۔ (۹) اگر آئینہ دار کھردکی کی ایک ڈوری ڈٹ جائے تو تباؤ کے چھٹ کی رگڑ کی قدر کم سے کم کیا ہونی چاہیے کہ دوسرا وزن کھردکی کو سنبھالے رکھے۔

(۱۰) ایک نصف کروی خول ایک ایسی کھردری سطح مستوی پر پڑا ہے جسکے رگڑ کا زاویہ λ ہے، ثابت کرو کہ مستطیر کخارہ کی سطح مستوی کا میلان افق کے ساتھ جب $\frac{1}{2}(\pi - \lambda)$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔

[مرکز ثقل اس نصف قطر کی تقصیف کرتا ہے جو خول کے قاعدہ پر عمود دار ہے۔]

(۱۱) ایک شعوس متجاس نصف کرہ ایک کھردری افقی سطح مستوی اور ایک طینی انتصابی دیوار سے ٹکا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر رگڑ کی قدر $\frac{1}{2}(\pi - \lambda)$ سے بڑی ہو تو نصف کرہ ہر محل میں متعادل رہ سکتا ہے لیکن اگر رگڑ کی قدر $\frac{1}{2}(\pi - \lambda)$ سے کم ہو تو نصف کرہ کا قاعدہ سمت انتصابی کے ساتھ کم سے کم زاویہ $\frac{1}{2}(\pi - \lambda)$ بنا سکتا ہے۔

اگر دیوار کھردری ہو اور رگڑ کی قدر نہ ہو تو ثابت کرو کہ یہ زاویہ $\frac{1}{2}(\pi - \lambda)$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔

(۷۱)

[نصف کرہ کا مرکز ثقل اس نصف قطر کو جو قاعدہ پر عمود دار ہے نسبت $3:5$ میں تقسیم کرتا ہے]

(۱۲) اگر نصف کرہ حالت تعادل میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کی مغنی سطح ایک کھردری سطح اُبل کو جو افق کے ساتھ زاویہ α بناتی ہے مس کرتی ہے تو ثابت کرو کہ نصف کرہ کی سطح مستوی سطح کا میلان افق کے ساتھ جب $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ ہے بشرطیکہ کم ہو جب $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ سے

اور نیز کم ہو رگڑ کے زاویہ سے۔

(۱۳) ایک یکساں نفع کرہ کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہے اور وزن W ہے یہ اپنی کروی سطح کے بل ایک افقی سطح مستوی پر پڑا ہے اور وزن W کا ایک کھردرا ذرہ اس کی مستوی سطح پر پڑا ہے۔ ثابت کرو کہ مستوی سطح کے مرکز سے ذرہ کا فاصلہ $\frac{3}{4}W$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا جہاں نہ رگڑ کی قدر ہے۔

(۱۴) ایک کرہ جس کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہے اور جس کا مرکز ثقل اس کے مرکز سے فاصلہ $\frac{1}{4}$ ہے واقع ہے ایک ایسی کھردری سطح مستوی پر انتہائی تعادل کی حالت میں ساکن ہے جو افق کے ساتھ زاویہ θ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس کو زاویہ

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \text{ جب } W = \frac{1}{2}$$

میں سے گھلایا جائے تو بھی یہ انتہائی تعادل کی حالت میں رہے گا۔

(۱۵) ایک یکساں مستطیلی تختہ جس کے اضلاع 2 اور 2 ہیں ایک ہی افقی خط میں کی دو کھردری سطحوں پر جن کا درمیانی فاصلہ 2 ہے انتہائی تعادل کی حالت میں ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ افق کے ساتھ ضلع 2 کا میلان 45° مساوات

$$\text{ف جملہ جہم (ل + ۲ ط) = ل جہم ط - ب جب ط}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں نہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

(۱۶) ایک استوار چوکھٹ معین کی شکل کی ہے جس کا ہر ضلع 1 ہے اور عادہ زاویہ 60° ہے ہر چوکھٹ ایک کھردری سطح پر ساکن ہے جس کی رگڑ کی قدر μ ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے لئے نقطہ تماس کے دو انتہائی مقامات کا درمیانی فاصلہ 1 سے جب μ ہے۔

(۱۷) ایک لڑکا جس کا وزن W ہے بچ کے ایک تختہ پر کھڑا ہے اور اپنے ہاتھوں سے ایک کرسی کے چکّے انتصابی ضلع کو دھکیلتا ہے اگر کرسی کا وزن N ہو اور کرسی اور بچ کے درمیان اور نیز لڑکے اور بچ کے درمیان لگڑ کی قدر μ ہو تو ثابت کرو کہ لڑکا اپنے جسم کو اس قدر جھکا سکتا ہے کہ افق کے طرف سمت 2 سے بڑا زاویہ بنائے یا سمت 2 سے بڑا زاویہ بنائے بموجب اس کے کہ لڑکا کرسی سے یا کرسی

لڑکے سے زیادہ وزن دار ہو۔

(۱۸) ایک یکساں وزنی سلاح ایک کھردرے افقی مینر پر پڑی ہے اور اس کو ایک رسی کے ذریعہ جو اس کے کسی نقطہ کے ساتھ بندھی ہے ایک ایسی سمت میں کھینچا گیا ہے جو اس کے طول پر عمود وار ہے۔ بتاؤ کہ یہ کس نقطہ کے گرد گھومنا شروع کرے گی۔

ثابت کرو کہ اُن قوتوں کی نسبت $1:1+27$ ہے جو سلاح کو گھمانے کے لئے ضروری ہوں جبکہ ایک قوت کو سلاح کے مرکز پر اور دوسری کو سلاح کے سرے پر اس کے طول پر عمود وار لگایا جائے۔

(۱۹) ایک یکساں کھردرا شہتیر (ب) دو اور شہتیروں پر افق کے متوازی پڑا ہے اور ان کو نقاط ۱ اور ۲ پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کم سے کم افقی قوت جو نقطہ ب پر لب کے عمود وار سمت میں لگانی پڑے تاکہ شہتیر کو ہلانے کے لئے عین کافی ہو

قوتوں $\frac{1}{2}$ سر اور $\frac{1}{2}$ سر و $\frac{1}{2}$ ب - $\frac{1}{2}$ ب میں سے چھوٹی قوت ہوگی۔ جہاں $\frac{1}{2}$ = لب اور $\frac{1}{2}$ = (ج) نیز شہتیر کا وزن ہے اور $\frac{1}{2}$ رگڑ کی قدر ہے۔

(۲۰) ایک یکساں کھردرا شہتیر (ب) جس کا طول $\frac{1}{2}$ ہے دو مساوی اور مساوی طور پر کھردرے گولوں پر افق کے متوازی پڑا ہے۔ گولوں کے مرکوزوں کا درمیانی فاصلہ $\frac{1}{2}$ ہے اور شہتیر گولوں کو ج اور د پر مس کرتا ہے۔

ثابت کرو کہ اگر ب بڑا ہو $\frac{1}{2}$ سے تو شہتیر کا ایک ایسا محل معلوم ہو سکتا ہے کہ ب پر قوت قی شہتیر کی سمت پر عمود وار لگانے سے شہتیر ج اور د دونوں نقطوں پر ایک وقت حرکت کرنے کو ہوگا۔

(۲۱) ایک یکساں محنت جس کا طول $\frac{1}{2}$ ہے اور وزن $\frac{1}{2}$ ہے ایک کھردرے افقی اسطوانہ پر اس طرح پڑا ہے کہ اس کا وسطی نقطہ اسطوانہ کو مس کرتا ہے اور اسطوانہ کا محور تختہ کے عمود وار ہے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو محنت کے ایک سرے پر لگایا جاسکتا

ہے تاکہ اسطوانہ سے نہ پھسلنے پائے $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ ب جہاں $\frac{1}{2}$ اسطوانہ کا نصف قطر

ہے اور لہر گڑ کا زاویہ ہے۔

(۲۲) ایک قطع ناقص کو جس کا خروج المکز ز ہے اور اسے سے اور سے میں اس کے محور اعظم کے گڑ گمانے سے ایک سطح مائل کی گئی ہے اس سطح پر ایک کھر ورا ذہ ن رکھا گیا ہے آجہن پر دو قوتیں اس کوں کی طرف عمل کرتی ہیں اور بالترتیب ن سے اور ن سے کے متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ ذہ سطح پر کسی جگہ ساکن رہ سکتا ہے اگر گڑ کی قدر

$$\frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}} <$$

(۲۳) ایک مستندہ قمر جس کا وزن و ہے ایک کھر درے میز پر انتصابی مستوی میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا نقطہ ل میز کو مس کرتا ہے ایک شخص اس کو نقطہ ب پر اپنی انجلی سے دباتا ہے۔ اگر خط اب سمت راس کے ساتھ زاویہ ع بنائے اور اگر ل اور ب پر گڑ کے زاوئے بالترتیب ل اور ک ہوں تو ثابت کرو کہ اگر ع کہ سے تو قمر میز پر فوراً لڑکنا شروع کرے گا خواہ ب پر کا دباؤ کتنا ہی کم کیوں نہ ہو اہ اگر ل ع کہ ل تو قمر اس پر پھسلے گا جبکہ ب پر عمادی دباؤ و جم ع جب ل قمر (ع۔ ل) ڈالا جائے اور اگر ع ل اور ل دو نوں سے کم ہو تو ب پر کوئی قوت اس کو ہلا نہ سکیگی۔ (۲۴) دو یکساں شہبیریوں ل ج اور ب ج کو ج پر ایک چکنے قبضہ کے ذریعہ وصل کیا گیا ہے اور ان کو ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کے دونوں پچلے سرے ایک کھر دری افقی سطح مستوی پر ساکن رہیں۔ اگر تعادل کو توڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ نئے شہبیر کا سر پھسلے گا اور چھوٹا شہبیر گھومے گا۔

(۲۵) ثابت کرو کہ کم سے کم قوت جو ایک وزنی یکساں کرے کی سطح پر لگائی جائے تاکہ یہ ایک کھر دری انتصابی دیوار کے مقابل متعادل رہ سکے و جم ل یا

$$دس ل [مس ل - ماس ل - ۱] ہرگی جیکہ ل > جم ل - ۱ - ۵ - ۱$$

ل ع جم ل - ۱ سے کہ کا وزن و ہے اور لہر گڑ کا زاویہ ہے۔

(۲۶) ثابت کرو کہ دو اسطوانی کندے جن کے نصف قطر مساوی ہیں لیکن جن کے وزن و اور و مختلف ہیں (جہاں و و ل ایک سطح مائل پر اس طرح ساکن رہ سکتے

(۴۱)

(۳۰) قطع ناقص کی شکل کا ایک اسطوانہ ایک کھر درمی انتصابی سطح اور ایک اتنی ہی کھر درمی افقی سطح کے درمیان ساکن ہے۔ اسطوانہ کا محور افقی ہے اور ناقص کا محور اعظم افق کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ رگڑ کی مقدار

$$\mu = \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(۳۱) تین مساوی اسطوانی سلاخیں اسی نصف قطر کی ایک چوتھی سلاخ کے گرد متشابہ رکھی گئی ہیں اور پھر اس گٹھے کو دو مساوی پگھلا رسیوں سے گھیر لیا گیا ہے جو سروں کے لحاظ سے متشابہ ہیں۔ اگر ہر ایک رسی کا طول (بغیر کھانڈے کے) ہر ایک سلاخ کے محیط کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اندرونی سلاخ کو پھینچنے کے لئے

$$\frac{2}{3} \text{ حصہ قوت درکار ہوگی جہاں } \mu \text{ رگڑ کی قدر ہے اور } l \text{ پچک کا مقیاس۔}$$

(۳۲) نصف قطر کے تین مساوی کرے ایک افقی سطح پر پڑے ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ان کرؤں کے اوپر ایک اور کرہ رکھا گیا ہے جس کا نصف قطر ب ہے۔ اگر تعادل قائم رہے تو ثابت کرو کہ اوپر کے کرہ اور نیچے کے کرؤں کے

$$\text{درمیان رگڑ کا چھوٹے سے چھوٹا زاویہ } \theta = \tan^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \text{ ہوگا۔}$$

(۳۳) ایک سائیکل کے پیوں کے سب سے پچلے نقطوں کو ملائے والے خط کا طول ۱ ہے۔ مرکز نقل اس خط سے ۵ بلندی پر اور اس کے وسطی نقطہ کے آگے ۱۱ فاصلہ پر واقع ہے۔ اگر دھڑے کی رگڑ اور پہیے کے رکتے وقت اس کے خلاف مرکز کی مزاحمت کو نظر انداز کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب پچھلے پیہ پر بیک لگا دی جائے تو اس سطح مائل کا بڑے سے بڑا زاویہ میلان جس پر سائیکل بغیر پھسلے روکی جاسکتی

$$\text{ہے وہ ہوگا جہاں } \mu = \frac{1}{2} \times \frac{11 - 5}{5} = \frac{3}{5}$$

اور یہ پیہ اور زمین کے درمیان رگڑ کا زاویہ ہے۔

(۳۴) مساوی نصف قطر کے دو پیوں ۱ اور ۲ کے وزن ۱ و ۲ ہیں۔ ان کو ایک ہلکی سلاخ سے جو ان کے مرکروں کے ساتھ پیوست ہے لایا گیا ہے سلاخ

کا طول ل ہے۔ ان پیوں کو ایک کمروری مائل سطح مستوی پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کی مشترک مستوی سطح انتہائی ہے اور ل اوپر کی طرف ہے۔ یہ سطح مائل کے میلان کو بتدريج بڑا یا گیا ہے اگر کسی ایک پیہ کو ایک لگاتار سے پیسے سطح مائل کے ایک ہی میلان سے پھسلنا شروع کریں تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(۳۵) ایک تانگے کی ریل کے ٹکے کا نصف قطر ج ہے اور اس کے دو دائری سرروں کا نصف قطر ہے۔ ریل کو ایک کمروری سطح مائل پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ جب یہ نیچے کی طرف لڑکتی ہے تو اس کا آگاہا کھلتا جاتا ہے۔ اگر رگڑ کی قدر صفر ہو اور سطح مستوی کا میلان افق کے ساتھ ہو تو ثابت کرو کہ ریل سطح مستوی پر اوپر کی طرف تانگے کے ذریعے کھینچی جاسکتی ہے بشرطیکہ $\mu > \frac{J}{J + \frac{1}{2}}$ ۔ اگر ہم عین اس قیمت کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس کے جواب میں تانگے کی سمت افقی ہوگی۔

(۳۶) ایک پیہ کا اسطوانی ڈھراؤ متوازی ریل کی پٹریوں پر ٹکا ہوا ہے پٹریاں ایک اُل سطح بناتی ہیں۔ ایک ڈوری پیہ کے محیط پر بیچی ہوئی ہے۔ بناؤ کہ کن حالات میں ڈوری کو نیچے کی طرف مائل سطح کے متوازی کھینچنے سے پیہ پٹریوں پر اوپر کی طرف چڑھے گا۔ (۳۷) تانگے کی ایک ریل جس کے کنارے اور ٹکے کے نصف قطر بالترتیب ل اور ب ہیں ایک کمروری افقی میز پر پڑی ہے اور تانگہ کا کھلا سرا جو ٹکے کے نیچے سے گزرتا ہے میز پر پڑا ہے۔ یہ پورا نظام ایک ایسے سطح مستوی کے گرد جو ریل کے محور پر عمود دار ہے متشکل ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کھلے سرے کو اتنا اٹھایا جائے کہ یہ افق کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو تانگے میں ذرا سا تناؤ بھی عموماً ریل کو روکنا لے کا باعث ہو گا اور اٹھانے والے شخص کے ہاتھ کی طرف یا اس کے مخالف سمت میں حرکت پیدا ہوگی جبکہ ط ایک خاص قیمت سے کم یا زیادہ ہو۔ جب ط کی یہ خاص قیمت ہو تو ثابت کرو کہ حرکت پیدا نہیں ہوگی تا وقتیکہ تناؤ ایک خاص محدود انتہا سے متجاوز نہ کرے۔

(۳۸) دو پیسے کی گاڑی کا ہم جب افق کے متوازی ہو تو اس کا مرکز ثقل پیہ کے

دھرے کے عین اوپر ہوتا ہے۔ پتہ کا نصف قطر ہے اور یہ کھردرے دھڑے پر آؤنا نہ گھوم سکتا ہے دھرے کا نصف قطر ہے۔ زمین پھسلنے کے عمل کو رد کرنے کے لئے کافی کھردری ہے۔ ثابت کر دے کہ کم سے کم قوت جو لول والے ہم کے ایک سرے پر لگائی جائے تو گاڑی کو حرکت دے سکے پتہ اور زمین کے مشترک نقطہ میں سے

گزرتی ہے اور $\frac{مک \cdot (ل + ل + ل)}{ل + ل + ل - ک}$ کے مساوی ہے اس میں $ک = \frac{۱}{۲}$ جبکہ

جہاں صہ پتہ اور دھرے کے درمیان رگڑ کا زاویہ ہے اور و گاڑی کا وزن ہے۔ (۳۹) ایک وزنی پیہ کو ایک رسی کے ذریعہ جو اس کے ایک اڑے یا تیلی کے ساتھ بندھی ہے ایک رکاوٹ کے اوپر سے کھینچ کرے جانا مقصود ہے رکاوٹ پیہ کو ج پر مس کرتی ہے۔ اگر رسی کو افقی کے متوازی کھینچا جائے تو ثابت کر دے کہ پیہ ج کے گرد گردش کرے اور زمین پر پاج پر نہیں پھسلے گا اگر رسی کی او بچائی ج کے اوپر و جب صہ م (ع - صہ) سے کم ہو جہاں و پیہ کا نصف قطر ہے، ج پر کی رگڑ کا زاویہ صہ ہے اور وہ زاویہ صہ ہے جو ج میں سے گزرنے والا نصف قطر سمت انتصابی کے ساتھ بناتا ہے۔

(۴۰) ایک ٹھوس مستطیل اسطوانہ کا مدہ کے بل ایک کھردری افقی سطح مستوی پر پڑا ہے اور اپنے محور کے گرد آزادانہ حرکت کر سکتا ہے۔ اگر اس کا وزن و ہو اور اس کی فرش کا نصف قطر و ہو تو ثابت کر دے کہ چھوٹے سے چھوٹے جنت کا معیار افرو جو اس کو ہلا سکتا ہے $\frac{۱}{۲}$ و و ہے یہ مان لیا جائے کہ اس کا وزن سطح مستوی پر یکساں طور پر پڑتا ہے۔

(۴۱) ایک و نذرا ناقصی قرص ایک کھردرے میز پر پڑا ہے اس پر ایک افقی قوت قی عمل کرتی ہے جس کے ذریعہ عمل وہ عین حرکت کرنے کو ہے ثابت کر دے کہ اگر اس کا وزن اس کے رقبہ پر یکساں طور پر منقسم ہو اور یہ ایک اسکے کے گرد گھومنا شروع کرے تو قوت کو مرکز سے $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}$ فاصلہ پر زمین کی سمت میں عمل کرنا چاہیے۔

(۴۲) خط صنوبری (Cardiod) کی شکل کا ایک ایکہاں قرص ایک کھردری سطح اٹل پر پڑا ہے جو افق کے ساتھ زاویہ 90° بناتی ہے۔ قرص اپنے قطب پر ایک سوئی کے گرد گھوم سکتا ہے۔ جب قرص عین پھسلنے کو ہو تو اس کا محور سطح اٹل کے خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ 90° بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب 90° ہو گا تو 90° جہاں محور کی قدر ہے۔
 نیز ثابت کرو کہ سوئی پر کے قوس کی سمت خط صنوبری کے محور کے ساتھ

نویس ۱ (پلسس) بناتی ہے۔

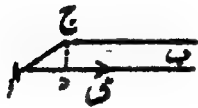
(۴۳) ایک چکر کھردری افقی سطح مستوی پر پڑا ہے اور اس کو ایک رسی کے ذریعہ جوں کے کسی نقطہ پر بندھی ہے۔ ن پر کے قوس کی سمت میں کھینچا گیا ہے۔
 ثابت کرو کہ چکر ن میں سے گزرنے والے نقطہ کے دوسرے سرے کے گرد گھومنا شروع کرے گا۔



پانچواں باب

کام۔ موہوم کام

۸۶۔ جب ایک قوت کا نقطہ عمل قوت کی سمت میں حرکت کرے تو کہتے ہیں کہ قوت نے کام کیا۔ ایک گاڑی کو کھینچنے میں گھوڑا جو قوت لگاتا ہے وہ کام کرتی ہے بھاپ کا دباؤ جب فشار کو حرکت دیتا ہے تو کام کرتا ہے۔
 جب کوئی شخص ٹھڑی یا ٹھڑیل کو کھینچ دیتا ہے تو وہ کام کرتا ہے۔ کسی قوت کے کام کا ناپ قوت عالمہ اور اس فاصلہ کا حاصل ضرب ہے جس میں سے قوت کا نقطہ عمل قوت کی سمت میں حرکت کرتا ہے۔
 فرض کرو کہ ایک قوت Q جو ایک جسم کے نقطہ A پر عمل کرتی ہے A کو B تک لے جاتی ہے۔ ایسا کرنے میں قوت نے جو کام کیا وہ قوت Q اور AB کے حاصل ضرب سے بتیہ ہوگا۔ اگر نقطہ A کے اُس طرف ہو جس طرف قوت عمل کرتی ہے تو کام مثبت ہوگا اگر اس کے متقابل سمت میں ہو تو کام منفی ہوگا۔



اب فرض کرو کہ قوت کا نقطہ عمل حرکت کر کے ج پر آ جاتا ہے جو اب پر واقع نہیں ہے۔ ج سے A یا B پر عمودہ پر عمودہ گزرو۔ تب AD فاصلہ ہے جس میں

سے قوت کے نقطہ عمل نے قوت کی سمت میں حرکت کی ہے۔ اس لئے بائیں شکل میں کام قی \times لاد کے مساوی ہے اور دائیں شکل میں کام۔ قی \times لاد کے مساوی ہے جب کسی قوت کا کام منفی ہو تو اس کو بعض اوقات یوں بیان کرتے ہیں کہ قوت کے خلاف کام کیا گیا ہے۔

اُس صورت میں جب (اج) اب پر عمود وار ہو تو نقاط لاد اور د منطبق ہو جاتے اور قوت قی کا کام معدوم ہو جاتا ہے۔

مثلاً اگر کسی جسم کو افقی میز پر حرکت دی جائے تو اس کے وزن کا کام صفر ہو جاتا ہے اسی طرح اگر کوئی جسم ایک سطح اُبل پر حرکت کرے تو سطح اُبل کا عمادی تعامل کوئی کام نہیں کرتا۔

۸۷۔ کام کی اکائی جو سکونیات میں استعمال کی جاتی ہے فٹ پونڈ کہلاتی ہے۔ ایک فٹ پونڈ کام سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو ایک پونڈ وزن کی قوت اپنی سمت میں جسم کے نقطہ عمل کو ایک فٹ تک حرکت دینے میں سرانجام دیتی ہے۔ فٹ پونڈ کی بجائے فٹ پونڈ وزن کہنا زیادہ صحیح ہے لیکن زیادہ بعداً ضرور ہے۔

۸۸۔ یہ بات قابلِ غور ہے کہ کام کی تعریف جو دفعہ ۸۶ میں دی گئی ہے اس میں حرکت لازمی طور پر مضمّن ہے۔ ممکن ہے کہ ایک شخص جسم کو حرکت دینے کی کوشش میں بہت سی قوت صرف کرے لیکن دراصل جسم پر کوئی کام نہ کرے۔ مثلاً فرض کرو کہ ایک شخص بہت دُوبی گاڑی کے ڈنڈے کو پکڑ کر کھینچتا ہے لیکن اُسے ہلا نہیں سکتا۔ اس لئے خواہ وہ اُسے کھینچنے میں اپنی پوری قوت صرف کر دے لیکن چونکہ اس کی قوت اپنے نقطہ عمل کو ہلا نہیں سکتی اس لئے وہ (کام کے اصطلاحی معنوں میں) کوئی کام نہیں کرتا۔

۸۹۔ ثابت کرو کہ بہت سے ذروں کو ایک مقام سے اٹھا کر دوسرے مقام پر لے جانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ و \times ف کے مساوی ہوتا ہے جہاں Σ و ذروں کا مجموعی وزن ہے اور ف وہ فاصلہ ہے جس میں سے ذروں کا مرکز ثقل اٹھایا گیا ہے۔

ولّا = ولا + ولا + ولا + ولا + ولا (١)

(۴) + + + =

تفریق کرنے سے $\frac{1}{2}(\bar{p}-p) + \frac{1}{2}(\bar{p}-p) + \dots = \frac{1}{2}(\bar{p}-p)$

لیکن مساوات کے دائیں جانب کارکن اس کام کو تعبیر کرتا ہے جو نظام کے مختلف ذروں کو ابتدائی محل سے آخری محل میں لے جانے میں سر انجام پاتا ہے۔ نیز بائیں جانب کارکن

= وارتفاع جس میں سے مرکز ثقل اوپر اٹھا ہے۔

$\omega = \omega_f$

۶۔ یہ بات قابل غور ہے کہ دنیوی گمشدہ کا نتیجہ دلوں کی ابتدائی اور آخری ترتیب پر کسی طرح حوقوف نہیں ہے تاوقتیکہ ان ترتیبوں سے دلوں کے مرکز نقل کے ابتدائی اور آخری مقامات میں فرق نہ پڑے۔

مثلاً اگر زمین میں ایک سوراخ کیا جائے اور مٹی کو نکال کر سوراخ کے باہر سطح زمین پر پھیلا دیا جائے تو کام کی مقدار معلوم کرنے کے لئے ہمیں صرف یہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے کہ ابتدا میں مرکز ثقل کہاں تھا اور آخر میں مرکز ثقل کہاں ہے۔ یہ کام کسی طرح اس امر پر منحصر نہیں کہ مٹی اپنے ابتدائی محل سے آخری محل میں کس کس راستے سے پہنچی۔

۹۱۔ طاقت۔ تعریف۔ کسی مال کی طاقت سے وہ کام مراد ہے جو وہ یکساں

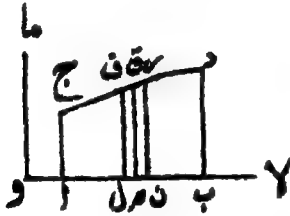
شرح سے اکائی وقت میں کرتا ہے۔

طاقت کی وہ اکائی جو انجینیروں کے ہاں مستعمل ہے اسی طاقت کہلاتی ہے اگر کوئی عامل ایک منٹ میں ۳۳۱۰۰۰ فٹ پونڈ کام کرے۔ یعنی ایک منٹ میں ۳۳۱۰۰۰ پونڈ ایک فٹ تک اٹھائے یا ۳۳۰ پونڈ کو ۱۰۰۰ فٹ تک یا ۳۳ پونڈ کو ۱۰۰۰ فٹ تک تو ہم کہتے ہیں کہ وہ ایک اسی طاقت سے کام کر رہا ہے۔

گھوڑے کی طاقت کا یہ اندازہ واٹ صاحب نے لگایا تھا لیکن یہ معمولی گھوڑوں کی طاقت سے بہت زیادہ ہے۔

۹۲۔ قوت کے کام کی ترسیمی تعبیر۔

بعض اوقات متغیر قوت کے کام کو براہ راست محسوب کرنا مشکل ہوتا ہے لیکن جتنی حد تک تقریبی نتائج حاصل کرنا بہت ممکن ہے۔



فرض کر دو کہ متغیر قوت ہمیشہ خط مستقیم ولا کی سمت میں عمل کرتی ہے ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ جب قوت کا نقطہ عمل اسے ب یک حرکت کرے تو قوت کتنا کام کرتی ہے۔

ا اور ب میں سے معین ج اور ب د کہیں جو ان دو نقاط عمل پر قوت کی قوتوں کو ظاہر کریں اسی طرح ا ب کے درمیان ہر نقطہ عمل ل میں سے معین ل ف کہیں جو اس نقطہ پر عمل کرنے والی قوت کی مقدار کو تعبیر کرے۔ تب صریحاً ان معینوں کے سرے ج ف د کی قسم کے کسی مغنی پر واقع ہونگے۔ ل کے قریب کوئی نقطہ ایسا اوجول کے اس قدر قریب ہو کہ قوت کا نقطہ عمل ل سے ہر تک حرکت کرے گے کے دوران میں قوت کی مقدار کو مستقل فرض کیا جائے۔

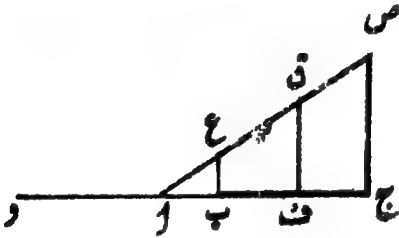
تب قوت کا کام = اس کی مقدار \times وہ فاصلہ جس میں سے قوت کا نقطہ عمل حرکت کرتا ہے۔

ل ف \times ل م = ف م کا رقبہ تقریباً
اسی طرح جب نقطہ عمل م سے ن تک جائے تو
کام = ق ن کا رقبہ تقریباً

علیٰ بذالقیاس

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ عمل کے ل سے ب تک حرکت کرنے میں جو کام ہوتا ہے وہ طولوں ل م، م ن، کو لا انتہا چھوٹا لینے سے رقبہ ا ج ب د کے زیادہ قریب آتا جاتا ہے۔

۴۳۔ مثال کے طور پر ہم وہ کام معلوم کرتے ہیں جو ایک لچکدار رسی کو طول ب (دوب) سے طول ج (دوج) تک یکسو کرنے میں انجام پاتا ہے رسی کا طول بغیر کھنچاؤ کے (دو) ہے۔



جب رسی کا طول د ف ہو

تو تناؤ = $\frac{ل}{د} (د ف - د)$ = $\frac{ل}{د} \times ف \times ل$ ، ہک کے کلیہ سے جہاں لچک کی مقدار۔
ف پر نمود ف ق کا لوجس تناؤ کو تغیر کرے۔

تب $\frac{ف ق}{ل}$ مستقل ہے اور اس لئے ق واقع ہوگا ایک خط مستقیم ل ح ص پر
مرج و میں سے گزرتا ہے۔ اگر یہ خط مستقیم ب اور ج پر کے عمودوں کو ع اور ص پر
لے تو دفعہ ثانی سے مطلوبہ کام رقبہ ب ع ص ج سے تغیر ہوگا اور اس لئے

$\frac{1}{4} \text{ ب ج} \times (\text{ب ع} + \text{ج ص})$ کے مساوی ہوگا۔ یعنی

کام = رسی کا کچھاؤء ابتدائی اور آخری تناؤں کا اوسط
یا محکمہ احصاء سے

$$\text{کام} = \text{کے} \times \text{ت فرلا} = \frac{\text{لے}}{3} \int_{\text{ب}}^{\text{ج}} (\text{لا} - \text{وا}) \text{ فرلا}$$

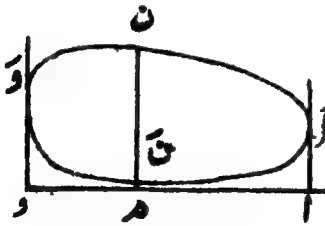
$$= \frac{\text{لے}}{24} (\text{لا} - \text{وا}) \left[\frac{\text{ج}}{\text{ب}} - (\text{ج} - \text{ب}) \right] (\text{ج} + \text{ب} - \text{ب} - \text{وا})$$

$$\frac{\text{ج} - \text{ب}}{2} (\text{ب} + \text{ج})$$

۹۴۔ بطور دوسری مثال کے ایک بھاپ انجن کے مظہر نقشہ پر غور کرو۔
فرض کرو کہ واؤد فاصلہ ہے جو انجن کا فشار طے کرتا ہے۔ جب فشار آگے
کی حرکت میں مقام ہر پر ہو تو اس پر کے بھاپ کے دباؤ کو عمود دھن سے تعبیر کرو۔
اس طرح عمل کرنے سے ظاہر ہے کہ فشار کی آگے کی حرکت کے دوران میں اس پر

بھاپ کے دباؤ کو معنی
وَن (تعبیر کرتا ہے)۔

اس طرح سے فرض کرو کہ
فشار کی واپسی کی حرکت
کے دوران میں جب بھاپ
کی آمد بند کر دی جاتی ہے
فشار کے اسی رخ کے
دباؤ کو معنی اَن و تعبیر
کرتا ہے۔

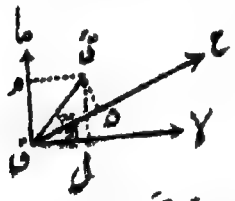


تب فشار کی آگے کی حرکت کے دوران میں وہ کام جو بھاپ فشار پر کرتی
ہے معنی وَن اَن کے رقبہ سے تعبیر ہوگا اور اسی طرح واپسی کی حرکت میں وہ کام

جو بجاب فشارہ کے خلاف کرتی ہے سخی ا ق و و ا کے رقبہ سے قبیر ہوگا۔
 اس لئے ایک مکمل ضرب کے دوران میں وہ کل کام جو بجاب فشارہ کے ایک
 رقبہ پر کرتی ہے رقبہ و ا ق و سے قبیر ہوتا ہے اور اس کے لئے معلوم ہو سکتا ہے۔
 اس قسم کے سخی کو جو شکل بالا میں دکھایا گیا ہے ہم قطبہ انقشہ کہیں گے اور نقشہ فشارہ
 کی حرکت سے خود بخود کھینچ سکتا ہے یعنی مناسب انتظام سے آجمن اپنا نظارہ انقشہ آپ کھینچ سکتا ہے۔
 ۹۵۔ کسی قوت کا کام۔ اس قوت کے اجزاء سے ترکیبی کے کاموں کے
 مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ قوت ح کے اجزاء سے ترکیبی دو علی القوا تم سمتوں میں لا اور صا میں
 اور ح ہموار لا کی سمت کے ساتھ زاویہ ضرباتی ہے۔

اس لئے لا = ح جم فر اور ما = ح جب فر
 فرض کرو کہ ح کا نقطہ عمل قی حرکت کر کے لا ما مستوی میں قی پر آجاتا
 ہے، قی سے ح کی سمت پر ہود قی ن کہیں



اور فرض کرو کہ $\angle ق ق ق = ۹۰$
 تب لا اور ما کے کاموں کا مجموعہ
 $= لا \times ق ق + ما \times ق ق$

$= ح جم فر ق ق + ح جب فر ق ق$
 $= ح ق ق ق جم فر + ح ق ق ق جب فر$
 $= ح ق ق ق ق ن = ح کا کام$

۹۶۔ اگر قوتیں اور ہٹاؤ ایک ہی سطح مستوی میں نہ ہوں تو بھی یہی نتیجہ آسانی سے
 حاصل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ق ح کی سمتی جو ب التام کسی علی القوا تم محاورہ لا، و ما، وی،
 کے لحاظ سے (ن، م، ن) ہیں یعنی لا = ح ما = م ح = ن ح، نیز
 ہٹاؤ ص من ایک ایسے خط پر واقع ہوتا ہے جس کی سمتی جو ب التام (ل، م، ن)
 ہیں اس طرح ص ل = ل ص من = م ص من اور ص م = م ص من
 $= ن ص من$

تب ترکیبی قوتوں کا کام = لا سف لا + ما سف ما + مے سف می
 = ح سف س (ل ل م + م م + ن ن)
 = ح سف س × جم ق ق ح = ح × ق ق کا ظل ح کی سمت پر

ح کا کام
 اگر کوئی ذرہ فضا میں چلنے منعنی پر حرکت کرے اور اس کے کسی نقطہ (لا، ما، می)
 پر اس پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، مے ہوں تو ظاہر ہے کہ
 جب ذرہ اسے حرکت کر کے ب پر جاتا ہے تو مکمل کام جو اس پر ہوتا ہے وہ
 = ح (لا فر لا + ما فر ما + مے فر می)

۹۷۔ جنت کا کام۔ فرض کرو کہ جنت کی ہر ایک قوت ق ہے اور اس کے
 بازو اب کا طول ہے۔
 اب فرض کرو کہ جنت نیا مقام اختیار کرتا ہے اور اب کا مقام اب ہو جاتا ہے
 اور اب اور اب کا درمیانی زاویہ سف ط ہوتا ہے
 پہلے قوتوں کو اپنے متوازی اس طرح حرکت دو کہ بازو اب متوازی محل ج
 میں آجائے۔ اس ہٹاؤ کے لئے مساوی اور متقابل قوتوں ق کا کام صفر ہوگا۔
 اب قوتوں کو ا کے گرد چھوٹے زاویہ سف ط میں سے گھماؤ۔ ا قوت ق جو
 ا پر عمل کرتی ہے اس کا نقطہ عمل نہیں بدلتا اس لئے وہ کوئی کام نہیں کرتی۔ دوسری
 قوت ق کے نقطہ عمل کا ہٹاؤ لا سف ط ہے۔ اس لیے کل کام جو ہوا وہ ق × لا ×
 سف ط کے مساوی ہے۔ یعنی جنت کے معیار اثر اور گھماؤ کے زاویہ کے ماحصل ضرب
 کے مساوی ہے۔

اگر جنت کے گھماؤ کا کل زاویہ عد ہو تو جنت کا کام
 = ح ق × لا سف ط = ح ق × لا عد

(۸۲)

اس لئے سب صورتوں میں جفت کا کام جب کہ جفت کو اس کے محور کے گرد جو اس کی سطح مستوی پر عمود وار ہو ٹھایا جائے جفت کے معیار اثر اور گھاؤ کے تاویہ کے حاصل میں کے مساوی ہوتا ہے۔
۹۸۔ توانائی بالقوہ۔ قوتوں کے کسی دئے ہوئے نظام کے زیر عمل کسی جسم کی توانائی بالقوہ سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو کہ نظام مذکور جسم پر کر سکتا ہے جب کہ جسم موجودہ روپ (Configuration) سے کسی معیاری روپ تک جس کو محل صفر کہتے ہیں پہنچے۔
 مثلاً وزن و کے کسی ذرہ کی توانائی بالقوہ جب کہ وہ زمین کے اوپر ارتقاع ہو رہا ہو وہ ہوتی ہے۔

اگر ہم جاذبہ ارض کے قنیر کو بھی ملحوظ رکھیں اور یہ مان لیں کہ زمین کے مرکز سے لا فاصلہ پر کے کسی ذرہ پر زمین کی کشش $\frac{1}{r^2}$ کے مساوی ہوتی ہے تو وہ بلند ہی پر توانائی بالقوہ جبکہ زمین کی سطح کو محل صفر مانا جائے اور زمین کو نصف قطر کا کرہ فرض کیا جائے

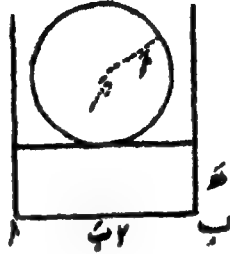
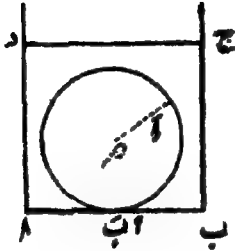
$$L = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \times \frac{m}{(h+1)} = \frac{m}{h+1}$$

کے مساوی ہوگی۔ کیونکہ زمین کے سطح پر کے کسی مقام پر کشش $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2}$ اسی طرح اگر ایک جگہ اور سی لی جائے جس کا قدرتی طول و ہے اور اس کے ایک سرے کو ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بانڈ دیا جائے تو وہ ۹۳ کی رو سے ایک ذرہ کی توانائی بالقوہ جو اس کے دوسرے سرے کے ساتھ بند ہو $\frac{1}{h+1}$ ہوگی جبکہ کچا ہوا طول $1 + h$ لاہو۔

۹۹۔ مشتق ۱۔ ایک کردی گولی جس کا وزن W پانچ اونس نصف قطر r فٹ ہے ایک اسطواناتی ڈول کی تہ میں ڈبی ہے۔ ڈول کا نصف قطر R فٹ ہے اور اس کے اندر h (۲ فٹ) ارتفاع تک پانی بھرا ہوا ہے۔ تابعد کر کہ پوری گولی کو پانی کے مین باہر نکال لیے میں جو

کام ہوتا ہے $W \left(\frac{1}{h+1} - \frac{1}{R} \right)$ (۲) فٹ پستے زیادہ ہوگا جہاں گولی سے

چٹائے ہوئے پانی کا وزن وہی ہے۔



اگر پانی کے اکائی حجم کا وزن د اور گولی کی کثافت اضافی ک ہو تو

(۸۳)

$$و = \frac{۱۱}{۳} \text{ ک} \text{ د اور } و = \frac{۲}{۳} \text{ ک} \text{ د}$$

کام کم از کم نظام کی توانائی بافتہ کے اضافہ کے مساوی ہونا چاہیے۔

پہلی صورت میں توانائی بافتہ

= پانی کے (اسطوان ا ب ج د - کرہ) کی توانائی بافتہ

+ کہ دے ہوئے کرہ کے مساوی پانی کی توانائی بافتہ

= پانی کے اسطوان ا ب ج د کی توانائی بافتہ + پانی کے کرہ کی توانائی بافتہ کا (ک-۱) گنا

$$= ۱۱ \text{ ب}^۲ \text{ د}^۲ + \frac{۲}{۳} \text{ ک} \text{ د}^۲ (ک-۱) = \frac{۲}{۳} \text{ ک} \text{ د}^۲ (و-د) + \frac{۲}{۳} \text{ ک} \text{ د}^۲ \dots (۱)$$

جب کہ ک کمال لیا جائے تو فرض کر کہ پانی کی گہرائی ہے

$$\text{پس } ۱۱ \text{ ب}^۲ \text{ د}^۲ = \text{پانی کا حجم} = ۱۱ \text{ ب}^۲ \text{ د}^۲ - \frac{۲}{۳} \text{ ک} \text{ د}^۲$$

$$\text{یعنی } ۱۱ \text{ ب}^۲ \text{ د}^۲ = \frac{۲}{۳} \text{ ک} \text{ د}^۲ \dots (۲)$$

دوسری صورت میں توانائی بافتہ

$$= ۱۱ \text{ ب}^۲ \text{ د}^۲ + \frac{۲}{۳} \text{ ک} \text{ د}^۲ (و+د) = \frac{۲}{۳} \text{ ک} \text{ د}^۲ (و+د) + \frac{۲}{۳} \text{ ک} \text{ د}^۲ \dots (۳)$$

$$= \frac{3}{4} \text{ ک۔} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] = \frac{3}{4} \text{ ک۔} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] = \frac{3}{4} \text{ ک۔} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right]$$

مشق ۳۔ اگر مشق با قبل میں گیس کسی شکل کے برتن کے اندر بند ہو اور دباؤ ۳ پراس کا حجم ۱ ہو اور پھر اس کا حجم ۲ ہو جائے تو ثابت کہ کام

$$\frac{3}{4} \text{ ک۔} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] = \frac{3}{4} \text{ ک۔} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right]$$

ہوگا جو جب اس بات کے کہ پھیلاؤ کس شرط کے تحت عمل میں آیا ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک دخانی جلاؤ ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہا ہے۔ اگر اس کے انجن کی موٹر اسپرے طاقت ۱۰۰۰۰ ہو تو بتاؤ کہ اس کی حرکت میں کس قدر مزاحمت ہو رہی ہے۔

(جواب $\frac{1}{11}$ ٹن وزن)

۲۔ ایک پہاڑی کا ڈھال ۲۰ میں ہے اس پر ایک سائیکل سوار ۶ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اوپر چڑھ رہا ہے اگر سوار اور سائیکل کا مجموعی وزن ۲۰۰ پونڈ ہو تو بتاؤ کہ وہ کم از کم ۱۶ اسپرے طاقت سے کام کر رہا ہے۔

۳۔ ایک شخص ایک منٹ میں کشتی پر ۴۰ دفعہ چو چلا رہا ہے اور اس سے کشتی ۱۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے آگے بڑھ رہی ہے اگر اس کی حرکت میں ۸ پونڈ وزن کی مزاحمت ہو تو بتاؤ کہ وہ ایک دفعہ چو چلانے میں کتنا کام کرتا ہے۔ نیز بتاؤ کہ کس اسپرے طاقت سے کام کر رہا ہے (جواب ۱۷۶ فٹ پونڈ، ۲۱۳ اسپرے طاقت)

۴۔ ایک لکڑی کا قدرتی طول ۱۰ اینچ ہے اگر اس کو بائیں پونڈ وزن کی قوت سے کھینچا جائے تو اس کا طول کھینچ کر ۱۵ اینچ ہو جاتا ہے۔ بتاؤ کہ اس کے طول کو ۱۲ اینچ سے کھینچ کر ۱۵ اینچ کرنے کے لئے کس قدر کام کرنا پڑتا ہے۔ (۱/۲ فٹ پونڈ)

۵۔ ایک پیچدار کمائی کو ایک اینچ کھینچنے کے لئے ایک پونڈ وزن کی قوت درکار ہوتی ہے بتاؤ کہ اسے مزید ۳ اینچ کھینچنے میں کتنا کام کرنا پڑیگا۔ (۱/۲ فٹ پونڈ)

۶۔ ایک قوت ایک ذرہ پر عمل کرتی ہے اس کی ابتدائی قیمت ۲۰ پونڈ ہے اور اس کی قیمتیں جبکہ اس کا نقطہ عمل ذرہ کی حرکت کی سمت میں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ فٹ فاصلوں میں سے حرکت کرے بالترتیب ۲۵، ۲۹، ۳۲، ۳۴، ۳۶، ۳۸، ۴۰، ۴۲، ۴۴، ۴۶ پونڈ میں پسلیں کرے کہ ذرہ کی حرکت کے ہر ایک فٹ میں قوت یکساں طور پر بدلتی ہے قوت اور فاصلہ کی ترمیم بتاؤ اور اس سے قوت کا کام معلوم کرو۔

۷۔ ایک بیج کا محور انحصاری ہے اور اس کی متصل چوڑیوں کا درمیانی فاصلہ ۲ انچ ہے ۱۰۰ پونڈ وزنی دروازہ کو اس بیج کے ساتھ اس طرح لگایا گیا ہے جیسے قبضے کے ساتھ لگایا جاتا ہے بتاؤ کہ دروازہ کو ایک زاویہ قائمہ میں سے گھمانے میں کتنا کام ہوتا ہے۔
(۱۰۰ پونڈ فٹ پونڈ)

۸۔ ثابت کرو کہ رستے کا تناؤ ۹ ٹن وزن ہے جبکہ رستا ایک ایسے دوسرے بیج کے گرد پٹا ہوا ہے جس میں سے ایک پانچ چوڑی نی انچ والا راست دستی بیج ہے اور دوسرا چھ چوڑی نی انچ والا چپ دستی بیج ہے اور ۴۹ پونڈ وزن کی قوت ۲ فٹ کے ہتھے کے سرے پر لگائی گئی ہے۔

(دو ہرے بیج کی ایک مکمل گردش میں سرے $(\frac{1}{8} + \frac{1}{4})$ انچ قریب آتے ہیں۔ اس لئے کام کے اصول سے

$$\text{ت} \times (\frac{1}{8} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{16} \times 49 = (2 \times 22 \times 2)$$

جہاں ت رستے کا تناؤ پونڈ وزن میں ہے]

۹۔ ونیشی پروے میں اوپر کی ثابت سلاخ کے علاوہ ن چلی سلاخیں ہیں اور تابل حرکت حصہ کا وزن وہ ہے پدہ چھوڑ دینے پر اس کا طول ہوتا ہے اور جب اس کو اوپر اٹھایا جائے تو اس کا طول ب ہوتا ہے۔ بتاؤ کہ اس کو اوپر اٹھانے میں جاذبہ ارض کے

$$\text{غلط جو کام کرنا پڑتا ہے} = \frac{1}{2} \times (b - a)$$

۱۰۔ ایک محوس نصف کرہ جس کا وزن ۱۲ پونڈ اور نصف قطر ۱ فٹ ہے اپنے پیچھے رخ کے بل ایک میز پر پڑا ہے اگر اس کو اس طرح پٹایا جائے کہ اس کا سختی رخ میز کو مس کرتے ہوئے لگا رہے تو بتاؤ کہ محل اول سے محل ثانی میں آنے میں کتنا کام ہوا (صفحہ ۸۹)

(۴ فٹ پوٹ)

اور ۱۴۸ کے نتیجے استعمال کرو)

۱۱۔ شلٹی منشور کی شکل کے ایک یکساں کمرے کا وزن نصف ٹن ہے۔ اس کی عمودی تماش کے اضلاع $\frac{1}{4}$ فٹ $\frac{1}{2}$ فٹ اور $\frac{1}{4}$ فٹ ہیں۔ یہ زمین پر سب سے چھوٹے رخ کے بل پڑا ہے اس کو ایک کنارہ کے گرد اس طرح اٹھانا منظور ہے کہ یہ سب سے بڑے رخ کے بل گر پڑے۔ بتاؤ کہ ایسا کرنے کے لئے تقریباً ۲۷ فٹ ٹن کام کرنا پڑیگا۔

(دفعہ ۳ کو استعمال کرو)

۱۲۔ ایک سائیکل سوار جو ہمیشہ $\frac{1}{2}$ اسپی طاقت کی شرح سے کام کرتا ہے ہموار افقی زمین پر ۱۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے سائیکل چلاتا ہے اور ایک پہاڑی چس کا میلان ۵۰ میں ہے ۸ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چڑھتا ہے۔ فرض کرو کہ سوار اور سائیکل کا وزن ۱۸۰ پونڈ ہے اور افقی زمین پر کی مزاحمت دو حصوں پر مشتمل ہے جن میں سے ایک مستقل ہے اور دوسری رفتار کے مربع کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ جب رفتار دو میل فی گھنٹہ ہو تو مزاحمت فی گھنٹہ

$$(۱۵۰۵ + \frac{۲}{۸۱}) \text{ پونڈ وزن}$$

۱۳۔ ایک اسطوانہ کی شکل کے کاگ کو جس کا طول ۱ ہے اور نصف قطر ہے ایک بوتل کی گردن میں سے بند بچ نکالا جا رہا ہے۔ اگر بوتل اور کاگ کے نیچے ہوئے حصہ کے درمیان عمادی دباؤ فی اکائی رقبہ کسی لمحہ میں مستقل رہے اور ق کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس کو نکالنے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ $\frac{1}{2} \pi r^2 C$ کے مساوی ہے جہاں r رگڑ کی قدر ہے۔

۱۴۔ ایک وزن w کو ایک کھردرے مخروط کی سطح پر کھینچا جا رہا ہے۔ مخروط کا ارتفاع h اور راسی زاویہ α ہے وزن کا طریقی خطوط سیلان اعظم کو ایک ہی زاویہ β پر قطع کرتا ہے اگر رگڑ کی قدر μ ہو تو ثابت کرو کہ جب جسم مخروط کے راس پر پہنچے گا تو کل کام وہ $\frac{1}{2} w h \sin \alpha$ کے مساوی ہوگا۔

$$[\text{کام} = w h + \frac{1}{2} w h \sin \alpha] \quad \text{جہاں } \alpha = \text{وجہ } \beta$$

(۸۶) ۱۵۔ ایک ذرہ جس کا وزن وہ ہے کھر درے نصف کرومی پیالہ کی تہ میں پڑا ہے جو اس پر سب سے نچلے نقطہ پر ثابت ہے۔ ذرہ کے ساتھ ایک رسی بندھی ہے جو پیالہ کے کنارہ پر سے گزرتی ہے اور ذرہ کو ایک انتہائی مستوی میں جو پیالہ کے محور میں سے گزرتا ہے رسی کے ذریعہ آہستہ آہستہ اوپر کھینچا گیا ہے ثابت کر دو کہ ذرہ کو کنارہ تک کھینچنے میں

$$\text{درا} \left[1 + \frac{1}{4} \text{ جب } 2 \text{ صدوک } \frac{1}{2} \text{ مس صد} \right]$$

کام کرنا پڑتا ہے جہاں پیالہ کا نصف قطر اسے اور مرکز کا زادیہ صد ہے
[اگر پیالہ کا شال س ہو جبکہ ذرہ میں سے گزرنے والا نصف قطر انق کے ساتھ ذرا دہ
طہ بنائے تو رسی کے عمود وار تحلیل کرنے سے

$$\text{مس} = \text{وجم صد جب } \frac{1}{4} \text{ قط (طہ - صد)}$$

اس لئے ذرہ کو اوپر کھینچنے میں پڑنے کے خلاف جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$\text{ن} = \frac{1}{4} \text{ مس} (1 - \text{قط}) = \text{واجب صد} \left[\text{جب } \frac{1}{4} \text{ قط : (طہ - صد) قط} \right]$$

$$\text{= واجب صد} \left[\text{جب } 2 \text{ صد} \right] \text{ قط ذرہ } = 2 \text{ واجب صد} \left[\text{جب } 2 \text{ ججم صد مس ند} \right] \text{ دغیرہ وغیرہ}$$

نیز وزن کے خلاف جو کام ہوا وہ = درا

۱۶۔ ایک متجانس مجر مجرہ کا ارتفاع ہ نصف قطر ذ اور کثافت اضافی کے ہے
اس کو ایک انتہائی اسطوانہ کے اندر جس کا نصف قطر ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا
ماس اوپر کی طرف ہے۔ اسطوانہ کے اندر ارتفاع ہ تک پانی بھرا گیا ہے یعنی مخروط
میں ڈوبا ہوا ہے۔ بتاؤ کہ مخروط کو پانی کے عین باہر نکالنے کے لئے

$$\frac{2}{3} \text{ وہ (1 - } \frac{1}{2} \text{)}$$

کام کرنا پڑتا ہے جہاں مخروط کا وزن وہ ہے اور ک ایک سے بڑا ہے۔
 ۱۰۰۔ موہوم کام۔ جب ایک جسم قوتوں کے ایک نظام کے زیر عمل ساکن ہو اور
 اور ہم فرض کریں کہ جسم میں خفیف سا ہٹاؤ واقع ہوتا ہے جو ان ہندسی شرائط کے موافق ہے
 جن کے تحت قوتوں کے نظام کا وجود ہے اور اگر جسم کا کوئی نقطہ ق اس خفیف لی ہٹاؤ
 کے بعد ق پر ہلا جائے تو ق ق کو ق کی موہوم رفتار یا ہٹاؤ کہتے ہیں۔ لفظ موہوم
 کا استعمال اس امر واقع کو ظاہر کرنے کے لئے کیا گیا ہے کہ ہٹاؤ محض خیالی ہے
 اور فی الحقیقت وقوع پذیر نہیں ہوتا۔

اگر ایک قوت ح نقطہ ق پر عمل کرے اور اگر ق ن ، ق سے ح کی سمت
 پر عموماً کھینچا جائے تو حاصل ضرب ح \times ق ن کو قوت ح کا موہوم کام یا موہوم سیمپار اثر
 کہتے ہیں۔

دفعہ ۸۶ کی طرح یہ کام مثبت ہوگا اگر ق ن کی وہی سمت ہو جو ح کی ہے اور
 منفی ہوگا اگر ق ن کی سمت ح کی سمت کے مخالف ہو۔

۱۰۱۔ موہوم کام کا مہول اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ اگر ایک جسم پر عمل کرنے والی قوتوں
 کا نظام متادل میں ہو اور جسم میں خفیف سا ہٹاؤ واقع ہو جس سے نظام کی ہندسی شرائط
 میں فرق نہ آئے تو موہوم کاموں کا جبری مجموعہ صفر ہوگا اور برعکس اس کے اگر جبری مجموعہ صفر ہو تو
 قوتیں متادل میں ہوں گی۔ دوسرے الفاظ میں اگر ہر ایک قوت ق کا موہوم ہٹاؤ اس کے
 خط عمل کی سمت میں منفی ہو تو مجموعی مقداروں کے پہلے رتبے تک۔

$$\sum (ق \times منفی ق) = 0 \text{، نیز برعکس اس کے اگر}$$

$$\sum (ق \times منفی ق) \text{ صفر ہو تو قوتیں متادل میں ہوں گی۔}$$

اگر جسم ایک واحد ذرہ ہو تو دفعہ ۹۶ کی رو سے یہ مستطیل ہوتا ہے کہ اگر تمام
 قوتوں کے موہوم کاموں کا مجموعہ جو ایک ذرہ پر عمل کریں صفر ہو تو حاصل کام موہوم
 کام بھی صفر ہوتا ہے، اس لئے حاصل قوت معدوم ہو جاتی ہے اور ذرہ متادل
 میں رہتا ہے۔

اگلے دفعہ میں ہم سطحی قوتوں کے لئے اس مسئلہ کا ثبوت درج کیا جائیگا تین ابعاد

میں عمل کرنے والی قوتوں کے لئے اس مسئلہ کا ثبوت دفعہ ۵ء میں دیا جائیگا۔

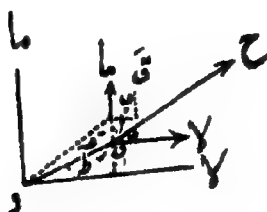
۱۰۲۔ مہموم کام کے اصول کا ثبوت جب قوتیں ایک سطح مستوی میں

عمل کریں۔

ایک سطح مستوی میں دو خط کھینچو جو ایک دوسرے پر علی التواضع ہوں۔ فرض کرو کہ جسم میں خفیف سا شاذ وقوع پدیر ہوتا ہے۔ یہ آسانی سے اس طرح ہو سکتا ہے کہ پہلے جسم کو نقطہ کے گرد ایک چھوٹے زاویہ عرض میں سے گھمایا جائے اور پھر اس کا محوروں کے متوازی مناسب فاصلوں اور ب میں سے نقل مقام کیا جائے۔ [مثال کے طور پر طالب علم ایک کتاب کو جو میز پر پڑی ہو حرکت دے کہ کسی دوسرے اختیار میں محل میں لاسکتا ہے اس طرح کہ دوران حرکت میں کتاب میز سے لمس کرتی رہے۔ ا۔

فرض کرو کہ کسی قوت ح کا نقطہ عمل ق ہے جس کے محدود بلحاظ مبادیہ کے
لا اور ماہیں نیز نقطہ ق کے قطبی محدود اور طہ ہیں جہاں وق = رادر کا وق = طہ
جب بغین ہٹاؤ واقع ہو چکے تو فرض کرو کہ ق کے لئے نئے عمل ق کے

محدود حجم (ط + ع) + ا اور رجب (ط + ع) + ب
 بیس یعنی رجب ط - ع رجب ط + ا اور رجب ط + ع رجب ط + ب
 جہاں چھوٹے زاویہ ع کے مرہوں کو نظر انداز کیا گیا ہے۔



اس لئے ق کے محدودوں میں تغیرات ہونگے

۱۔ ع ر جب ط اور ب + ع ر جب ط

یعنی ۱۔ ع + ع اور ب + ع لا

اس لئے اگر ح کے اجزائے ترکیبی لا اور ما ہوں تو ح کا موہوم کام جو لا اور ما کے موہوم کاموں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے

$$= لا (۱ - ع + ما) + ما (ب + ع لا)$$

$$= لا + ب ما + ع (مالا - لا ما)$$

اسی طرح نظام کی کسی اور قوت کا موہوم کام معلوم ہو سکتا ہے۔ ۱، ب اور ع ہر قوت کے لئے وہی ہونگے۔

اس لئے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہوگا اگر

$$۱ (لا) + ب (۱ - ع + مالا - لا ما) + ع (۱ - ع + مالا - لا ما) = صفر ہو۔$$

اگر قوتیں تعادل میں ہوں تو ۱ (لا) اور ۱ (ما) دفعہ ۶۰ کی رو سے جدا گانہ صفر ہیں۔

نیز ۱ (مالا - لا ما) = ۱ کے گرد جلد قوتوں کے سیدار اثروں کا مجموعہ،

اور یہ مجموعہ دفعہ ۶۰ کی رو سے صفر ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر قوتیں تعادل میں ہوں تو ان کے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

۱۰۴۔ برعکس اس کے اگر ہر ہٹاؤ کے لئے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہو تو قوتیں تعادل میں ہونگی۔

دفعہ قبل کی ترقیم کے مطابق موہوم کاموں کا مجموعہ ہے

$$۱ (لا) + ب (۱ - ع + مالا - لا ما) + ع (۱ - ع + مالا - لا ما) \dots\dots\dots (۱)$$

اور اس کے متعلق معلوم ہے کہ یہ سب ہٹاؤں کے لئے صفر ہے۔
ایک ایسا ہٹاؤ منتخب کرو جس سے جسم صرف محور لا کے متوازی فاصلہ
اور اس سے حرکت کرے، اس ہٹاؤ کے لئے با اور عہ دونوں سفر ہوں گے
اور اس صورت میں (۱) سے حاصل ہوگا

$$h = (la) =$$

یعنی محور و لا کے متوازی سب اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہے۔
اسی طرح سے محور لا کے متوازی ہٹاؤ لینے سے وہا کے متوازی بھی
سب اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہوگا۔
اسی طرح فرض کرو کہ ہٹاؤ بغیر نقل مقام کے صرف سدا کے گرد محض
گردش سے پیدا ہوا ہے۔ اس صورت میں و اور ب دونوں معدوم ہو جاتے ہیں
اور (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$h = (ma - la) =$$

یعنی و کے گرد قوتوں کے معیار اثرات کا مجموعہ صفر ہے۔
دفعہ ۶۰ میں تعادل کی جو شرطیں بیان کی گئی ہیں وہ پوری ہوتی ہیں۔
اس لئے قوتوں کا نظام تعادل میں ہے۔

(۸۹) ۱۰۴۔ قوتیں جو موجوم کام کی مساوات بنانے میں نظر انداز ہو سکتی ہیں۔

(۱) نامتناہی پذیر رسیوں کے ہٹاؤ

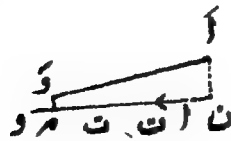
فرض کرو کہ و ایک

نامتناہی پذیر رسی ہے جس کا ہٹاؤ

ست ہے۔ فرض کرو کہ بعد

ہٹاؤ اس کا محل و لا ہے۔

و لا ب ک ت و د م م و



کھینچو۔ یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ رتبہ اول کی صغیر مقداروں تک $وہ = اکت$
 و کو مبدا اور $و$ کو لاکا محور مانو اور فرض کرو کہ نقطہ $(لا، با، ی)$ اور $ا$ نقطہ

$(و، لا، با، ی)$ ہے جہاں $و = ا$

چونکہ $و = ا$ کیونکہ رسی کھینچ نہیں سکتی

$$\therefore (و + لا - با - ی) + (لا - با - ی) + (حکم - ی) = ا$$

$$\therefore ۱۲ (لا - با - ی) + چھوٹی مقداروں کے مربع =$$

$$\therefore لا = با - ی$$

یعنی $وہ = ان$

اس لئے تناؤ کا سہوم کام = ت + وہ + ت = (ا - ان) =

اسی طرح نظام کے کسی دو ذروں ت اور ق کو لانے والے خط میں عمل کرنے والی قوت کی بھی یہی کیفیت ہے بشرطیکہ ان ذروں کا درمیانی فاصلہ نہ بڑے۔

(۲) جسم جن سطحوں کو مس کرتا ہے ان کا تعامل

اگر سطح چکنی ہو تو تعامل نقطہ تماس ن پر سطح کے عماد کی سمت میں عمل کریگا

اس لئے اگر ن اپنے قریب کے نقطہ ت پہنچا جائے تو ن ت قوت

کی سمت پر عمل انتوائم ہوگا۔ اس لئے اس قوت کا سہوم کام صفر ہوگا۔

اگر سطح کھردری ہو تو رگڑ لگ کا کام یعنی گ = (ن - ت) مساوت

میں داخل ہونا چاہئے کیونکہ یہ بالعموم صفر نہیں ہوگا۔

(۳) اگر جسم کسی ثابت سطح پر بغیر پھسلنے کے رکھکے تو کسی نقطہ تماس ن پر کا تعامل۔

ظاہر ہے کہ جسم کا نقطہ تماس ن اُس آن کے لئے ساکن ہے اور اس لئے اس کا ہٹاؤ صفر ہے۔ اس وقت ن پر کا عمادی تعامل اور ن پر کی رگڑ دونوں کے ہٹاؤ صفر ہوتے ہیں۔

(۴) تریجبت مادی نظام کے کسی دو جسموں کے درمیان تعامل۔ (۹۰)

ظاہر ہے کہ یہ تعامل دونوں جسموں پر مساوی اور متقابل ہوتے ہیں۔ اسلئے جب ہم دونوں جسموں کے مجموعی مہوم کام کی مساوات لکھتے ہیں تو ایسے تعامل کا مہوم کام مساوات میں دوم مرتبہ مختلف علامتوں کے ساتھ داخل ہوتا ہے اور اس لئے معدوم ہو جاتا ہے۔ مثلاً اگر ہم چوست کی چوٹی سلاخوں کے کام پر غور کر رہے ہوں تو جوڑوں پر کے تعامل نظر انداز کر دئے جاسکتے ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۰۶ میں کیا گیا ہے۔ ۱۰۵۔۔۔ اگر ہم چاہیں تو ایک ایسا ہٹاؤ منتخب کر سکتے ہیں جو نظام کی ہنہ سی شرائط کو پورا نہ کرے اور ایسا ہٹاؤ منتخب کرنا اکثر اوقات زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے لیکن اگر ہم ایسا کریں تو متناظر قوت کو بھی مساوات میں شامل کرنا لازم ہوگا۔ مثلاً اگر ہم ایسا ہٹاؤ منتخب کریں جس سے رسی کے طول میں تبدیلی پیدا ہو جیسا کہ اگلی دفعہ کی مشق ۲ میں کیا گیا ہے تو ہمیں مساوات میں رقم تناؤ \times رسی کے طول کا اضافہ بھی شامل کرنا پڑیگا۔

۱۰۶۔۔۔ مشق ۱۔ مساوی طولوں کی چھ سلاخوں ا ب، ب ج، ج د، د ع، ع ف اور ف ا کو ان کے سروں پر بجا سکت ہوڈ کر ایک منظم سدس بنایا گیا ہے سلاخ ا ب کو افقی محل میں رکھا گیا ہے اور ا ب اور د ع کے وسطی نقطوں کو رسی کے ذریعہ لایا گیا ہے۔ اگر ہر ایک سلاخ کا وزن وہو تو ثابت کر دو کہ رسی کا تناؤ ۳ وہوگا۔

فرض کر دو کہ سلاخوں کے وسطی نقطے θ ، θ ، θ ، θ ، θ ، θ ہیں۔ چونکہ

تفاضل سے ب ج اور

ج د سمت انتصابی کے

ساتھ مساوی المیلان

ہیں اس لئے ظاہر ہے

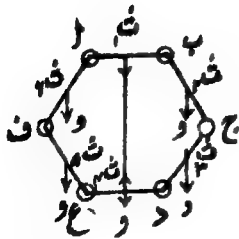
کہ نقاط ج، د، ع، ف

کی گہرائیاں ا ب

سے میچے θ کی

گہرائی کا بالترتیب

۱، ۲، ۳، ۴ ہوں گے۔



فرض کرو کہ نظام انتصابی سطح مستوی میں ایک ایسا ہٹاؤ اختیار کرتا ہے کہ د اور ع ہمیشہ ب اور ا میں سے گزرنے والے انتصابی خطوں میں رہتے ہیں اور د ع ہمیشہ متوازی الائنز رہتا ہے۔ اگر تہم بقدر انتصابی فاصلہ لا کے نیچے آئے تو تہم بقدر فاصلہ لا کے نیچے آئے گا۔ اور دثہ اور دثہ بالترتیب بقدر ۳ لا اور لا فاصلوں کے نیچے اترینگے۔

وزنوں کے موجہم کاموں کا مجموعہ

$$= ۱۲ \times لا + ۱۳ \times لا + ۱۴ \times لا + ۱۵ \times لا + ۱۶ \times لا + ۱۷ \times لا + ۱۸ \times لا$$

اگر رسی کا تناؤ تہم ہو تو اس کا موجہم کام

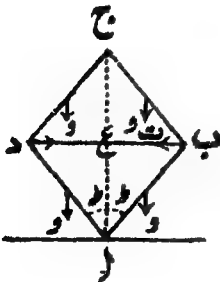
$$= تہم \times (۱۴ - ۱۲)$$

کیونکہ تہم کا ہٹاؤ اس سمت کے متقابل ہے جس میں تناؤ تہم عمل کرتا ہے اس لئے اس کا موجہم کام منفی ہے۔ اب موجہم کام کے اصول سے

$$۱۲ \times لا + تہم \times (۱۴ - ۱۲) = ۰ \quad \text{یعنی تہم} = ۳$$

مشق ۲۔ چار مساوی یکساں سلاخوں کو جوڑنے سے ایک معین ا ب ج د بنایا گیا ہے جس کو ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ ا ج انتصابی ہے اور کونہ ا ایک افقی سطح پر رکھا ہوا ہے ایک ہلکی رسی ب د کے ذریعے معین کا زاویہ ب ا ج ط کے مساوی رکھا گیا ہے،

(۹۹)



ثابت کرو کہ اس رسی کا تناؤ ۲ و س ط ہے جہاں و ایک سلاخ کا وزن ہے۔
فرض کرو کہ ا ب ا د کے وسطی نقطوں کی بلندی افقی سطح ا کے اوپر لا ہے۔

نیز فرض کرو کہ ب ع = ع د = ۱، جہاں ع معین کا وسطی نقطہ ہے۔

اب معین کے اس ہٹاؤ پر غور کرو

جس میں ط، ط، ط اور اس لئے لا، لا + ط لا اور ما، ما + ط ما ہو جاتا ہے

سلاخوں اور بے کے ساتھ مساوی پلڑے لگے ہوتے ہیں۔ ان میں سے ایک پردہ
شے درکھی جاتی ہے جس کو تو نا مقصود ہوتا ہے اور دوسرے پر باٹ قی رکھے جاتے ہیں۔
ہم موہوم کام کے اصول سے یہ ثابت کریں گے کہ ادران واد قی کو خواہ پلڑوں کے
کسی حصہ پر رکھا جائے اس سے کچھ فرق نہیں پڑتا۔

(۹۲)

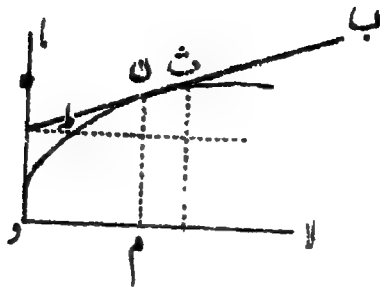
چونکہ ج ب ع ف اور ج ل د ف متوازی الاضلاع ہیں اس لئے ظاہر ہے
کہ ترازو خواہ کسی زاویہ میں سے گھومے سلاخیں ب ع اور ل د ہمیشہ ج ف کے
متوازی یعنی انتصابی رہیں گی۔

اگر سلاخ ا ب کو کسی جھوٹے زاویہ میں سے گھمایا جائے تو نقطہ ب اتنا ہی
اوپر اٹھتا ہے جتنا کہ نقطہ ا نیچے گرتا ہے۔ اس لئے سلاخ ب ع اتنی ہی اوپر اٹھتی
ہے جتنی کہ ا د نیچے اترتی ہے اور دائیں طرف کا پلڑا اتنا ہی اوپر چڑھتا ہے جتنا بائیں
طرف کا نیچے اترتا ہے اس لئے ایسی صورت میں صرف سلاخ ب ع اور اس کے پلڑے
کے وزنوں کا موہوم کام سلاخ کے پلڑے اور اس کے وزنوں کے موہوم کام کے مساوی
اور مخالف العلامت ہوتا ہے یہ موہوم کام، موہوم کام کی مساوات میں ایک دوسرے کو خالی
کردیتے ہیں۔

نیز اگر دائیں طرف کے پلڑے کا بٹاؤ اوپر کی طرف ب ہو تو بائیں طرف کے پلڑے
کا بٹاؤ نیچے کی طرف پ ہو گا اس لئے موہوم کام کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے
ق × پ + و (- پ) = -

اس لئے اگر یہ آدم کسی محل میں بھی متبادل ہو جائے تو ق و مساوی
ہونگے اور یہ شرط پلڑوں کے اندر باٹوں اور شے کے مقام پر کسی طرح بھی منحصر نہیں ہے
اس لئے باٹ اور شے پلڑوں میں کسی مقام پر بھی رکھے جاسکتے ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ
بھی نکلتا ہے کہ پلڑوں کا ایک ہی شکل کا ہونا ضروری نہیں ہے اور نہ ہی ان کا آلہ
کے لحاظ سے متشاکل ہونا ضروری ہے بشرطیکہ ان کے وزن مساوی رہیں۔

مشق ۴۔ ایک یکساں تختہ پر ماسی طور پر ایک چکنے انتصابی منحنی پر پڑا ہے اور اس کا
ایک سر ایک چکنی انتصابی دیوار کے ساتھ لگا ہوا ہے۔ اگر تختہ ہر محل کے لئے متبادل
رہے تو منحنی کی مساوات معلوم کر۔



دیوار کو محور مانو اور اس پر
کے کسی نقطہ کو ابتدا
فرض کرو۔

اگر شہتیر کے مرکز
ثقل کی اونچائی ولا کے
اوپر آتا ہو تو موہوم کام کی
مساوات ہوگی

$$و \times م = آ = ۰$$

کیونکہ دیگر قوتیں یعنی
دیوار اور تختی کے تعامل

دفعہ ۱۰۲ کی رو سے موہوم کام کی مساوات میں نہیں آتے۔

$$\therefore آ = مستقل = ھ$$

اس لئے نقطہ نشا کے محدد ہیں (ا حجم ط، ھ) جہاں ۲ و سلاخ کا طول ہے اور ط

اس کا زاویہ میلان ہے سمت افقی کے ساتھ۔

اس لئے ا نش کی مساوات ہے

$$ما - ھ = مس ط (لا - ا حجم ط) = لا مس ط - لا جب ط$$

اس کے ثبات کے لئے ط کے لحاظ سے تفرق کرنا چاہیئے

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے لا = ا حجم ط اور ما - ھ = - لا جب ط

$$\therefore \frac{ط}{۳} = \frac{ط}{۳} (ما - ھ) + \frac{ط}{۳} لا$$

یعنی مطلوبہ منحنی چار قرنی درندہ بر کا ایک حصہ ہے۔

مثالیں

۱۔ چار مساوی یکساں وزنی سلاخوں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے جس کو ایک

کونے سے آزادانہ لٹکایا گیا ہے اور ہر کی دونوں سلاخوں کے وسطی نقطوں کو ایک ہلکی سلاخ سے ملایا گیا ہے تاکہ معین بند نہ ہو سکے ثابت کرو کہ ہلکی سلاخ کا تناؤ ۴ و مس ۴ ہے جہاں و ہر ایک سلاخ کا وزن ہے اور ۲ عہ سہارے کے نقطہ پر معین کا زاویہ ہے۔
۲۔ چار مساوی سلاخوں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے جس کا چھٹا بین ناوئی طول و کی ایک رسی کا بنا ہوا ہے۔ ہر ایک سلاخ کا وزن و اور طول ب ہے۔ اگر ایک سلاخ کو افقی محل میں رکھا جائے تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ ہے

$$۲ و (۲ ب ۲ - ۲)$$

ب مام بک۔ ۲ و

۳۔ ایک منتظم سدس ل ب ج د ع ف چھ مساوی سلاخوں کو آزادانہ جوڑنے سے بنایا گیا ہے۔ سدس ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ضلع ڈ ب افقی میز سے مس کرتا ہے اگر ج اور ف ایک ہلکی رسی کے ذریعہ پیوست ہوں تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ و مام ہوگا جہاں و ہر ایک سلاخ کا وزن ہے۔

۴۔ چار مساوی یکساں سلاخوں کو جوڑنے سے ایک مربع بنایا گیا ہے ہر ایک سلاخ کا وزن و ہے مربع کو ایک کونے سے لٹکایا گیا ہے نیچے کے تینوں کونوں میں سے ہر ایک پر وزن و لٹکایا گیا ہے افقی و تر ہر ایک سلاخ لگانے سے اسے مربع شکل میں قائم رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ کا تناؤ ۴ و ہے۔

۵۔ و طول کی چار مساوی سلاخوں کو پیوست کر کے ایک کونے سے لٹکایا گیا ہے اور اس کونے کو مقابلے کے کونے سے ایک چمکدار رسی کے ذریعہ پیوست کیا گیا ہے۔ اگر سلاخیں ایک مربع کی شکل میں ٹکیں اور رسی کی لچک کی قدر سلاخ کے وزن کے مساوی ہو تو رسی کا طول بغیر کھنچاؤ کے $\frac{۲۷۷}{۳}$ ہے

۶۔ چار سلاخوں کو جوڑنے سے ایک متوازی الاضلاع بنایا گیا ہے۔ متقابل کے جوڑوں کو دسیوں سے ملایا گیا ہے جو متوازی الاضلاع کے وتر بناتی ہیں۔ اس نظام کو ایک افقی میز پر رکھا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان کے تناؤ سلاخوں کے طولوں کی نسبت میں ہیں۔
۷۔ چھ مساوی وزنی مضبوطیوں کے سروں کو جوڑنے سے ایک سدس بنایا گیا ہے اور

مسدس انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ ایک شہتیر افقی سطح مستوی پر ساکن ہے اور دوسرے دو مائل شہتیر افق کے ساتھ زاویہ ط بناتے ہیں اور ان کے وسطی نقطوں کو ایک ہلکی رسی کے ذریعے لایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس کا تناؤ ۶ دم ط ہے جہاں د ہر ایک شہتیر کا وزن ہے۔

۸۔ ایک متکرم مسدس چھ مساوی وزنی سلاخوں کے سروں کو جوڑنے سے بنایا گیا ہے اور اس کے دو مقابل کے راسوں کو ایک افقی رسی سے لایا گیا ہے۔ مسدس کی ایک سلاخ ایک افقی سطح مستوی سے مس کرتی ہے۔ مقابل کی سلاخ کے وسطی نقطہ پر ایک وزن د رکھا گیا ہے۔ اگر ہر ایک سلاخ کا وزن د ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ $\frac{3}{2}W$ ہے۔

۹۔ چھ مساوی وزنی سلاخوں کے سروں کو جوڑنے سے ایک متکرم مسدس (ج ج د ع ف بنایا گیا ہے۔ اس کو نقطہ ا سے لٹکایا گیا ہے اور دو ہلکی سلاخوں ب و اور ج ع سے اس شکل کو قائم رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان سلاخوں کے دباؤ $\frac{3}{2}W$ و $\frac{3}{2}W$ ہیں جہاں د ہر ایک سلاخ کا وزن ہے۔

(پہلے نظام کو سوہوم ہٹاؤ اس طرح دو کہ ا ب اور ا و ثابت نہیں اور ب ج ا د ف ع سمت انتصابی کے ساتھ مساوی المیلان ہوں۔ اس طرح ج ع کا تناؤ معلوم کرو تب نظام کو اس طرح ہٹاؤ کہ ب ج اور ف ع دونوں انتصابی ہیں اور باقی سلاخیں بھی سمت انتصابی کے ساتھ مساوی المیلان ہوں)۔

۱۰۔ ایک چپٹا نصف کروہی تختہ ایک چکنی افقی سطح پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کی سطح انتصابی ہے اور اس کا سطحی کنارہ اوپر کی طرف ہے۔ اس کو دو معلوم نقطوں پر دو ایسے شہتیروں کے ذریعے دیا گیا ہے جو چکنی انتصابی ملیوں کے اندر پھسلتے ہیں۔ اگر تختہ مقابل میں جو شہتیروں کے وزنوں کی نسبت معلوم کرو۔

۱۱۔ دو مساوی یکساں سلاخیں ا ب اور ا ج ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ۲ ب ہے یہ سلاخیں ا پر آزادانہ طور پر جوڑی ہوئی ہیں اور د نصف قطر کے ایک چکنے انتصابی دائرہ پر ساکن ہیں۔ اگر ان کا درمیانی زاویہ ۲ ط ہو تو
ب ج ۳ ط = ا ج ۳ ط

[جو قوتیں موہوم کام کی سادات میں آتی ہیں وہ صرف اور ان د ہیں اور ہر ایک سلاخ کے مرکز ثقل کی بلندی دائرہ کے مرکز کے اوپر۔ جب ط - ب جم ط ہے۔

۲ و مت { جب ط - ب جم ط } = یعنی - جب ط جم ط مع ط + ب جب ط مع ط = وغیرہ وغیرہ۔

۱۲۔ ایک فنور جس کی عمودی تراشش ایب مساوی الاضلاع مثلث ہے دو ستویوں میں جو افق کے ساتھ عد اور ب زاوے بناتے ہیں اس طرح ساکن ہے کہ اس کے دو کنارے ان ستویوں سے مس کرتے ہیں۔ اگر مس کرنے والے کناروں میں سے گزرنے والا رخ سمت انتصابی کے ساتھ ناویطہ بنائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{۳۲}{۳۳} \text{ جب عد جب ب } ۱۰ \text{ جب (عد + ب)}$$

۱۳۔ مساوی وزنوں کے دو چھوٹے چکنے حلقے ایک ثابت ناقصی تار پر جس کا محور اعظم انتصابی ہے پھسلتے ہیں۔ وہ ایک رسی سے مربوط ہیں جو اوپر کے ماسک پر ایک چھوٹی چکنی کھونٹی پر سے گزرتی ہے۔ ثابت کرو کہ وزن تعادل میں رہیں گے خواہ ان کو کہیں رکھا جائے۔

۱۴۔ چار مساوی یکساں استوار سلاخیں ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن وہ ہے انکے سروں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے جسے ایک کونے پر سے ٹکا کر بے وزن سلاخوں کے ذریعے جو در بناتی ہیں تقریباً مربع کی شکل میں رکھا گیا ہے۔ یہ فرض کر کے کہ بہت چھوٹے پھیلاؤ یا پچکاؤ جو دتروں میں پیدا ہوتے ہیں دتروں کی سلاخوں کے تناؤں یا دباؤں کے متناسب ہیں ثابت کرو کہ ان قوتوں میں سے ہر ایک و کے مساوی ہے۔

۱۵۔ مساوی وزن کے دو چھوٹے حلقے ایک مکانی کی شکل کے چکنے تار پر پھسلتے ہیں جس کا محور انتصابی ہے اور اس اوپر کی طرف ہے اور ایک دوسرے کو ایک ایسی قوت کے ساتھ کھینچتے ہیں جو اصلے کے متناسب ہے اگر وہ تار پر کسی متشاکل محل میں ساکن رہ سکیں تو ثابت کرو کہ وہ ہر متشاکل محل میں ساکن رہیں گے۔

۱۶۔ ایک قطع ناقص کا محور اعظم انتصابی ہے اور اس کے ماسک پر ایک چکنے حلقے میں

سے ایک چکنی سلاخ گزرتی ہے۔ سلاخ کا دوسرا سر اس کے ذمہ سے بعید ترین رنج پر سکون کی حالت میں ٹکا ہوا ہے اس کے متبادل کا محل معلوم کر دو ثابت کرو کہ اس کا طول کم از کم $\frac{5}{4} + \frac{5}{4} = 1 + \frac{5}{4}$ ہوگا جہاں ۱۲ محور اعظم کا طول ہے اور ز خروج مرکز ہے۔

۱۷۔ ایک شہتیر کا ایک سر ایک چکنی انتصابی دیوار پر اور دوسرا سر ایک انتصابی سطح مستوی میں ایک ایسے چکنے تختی پر جو دیوار پر عمود وار ہے ساکن ہے اگر شہتیر سب محلوں میں ساکن رہے تو ثابت کرو کہ منحنی قطع ناقص ہے جس کا محور اعظم اس افقی خط مستقیم پر جو شہتیر کا مرکز قسماً کرتا ہے واقع ہے۔

۱۸۔ ایک وزنی سلاخ (دب) جس کا طول ۲ فٹ ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سر ایک ثابت چکنی سطح پر ہے اور اس کا سراب ایک چکنے تختی پر ہے اگر سلاخ سب محلوں میں ساکن رہے تو ثابت کرو کہ منحنی مخروط نما ہے جس کی قطبی مساوات لمحاظ مبداء ج کے ہے $r = l + \frac{1}{\text{جب ط}}$

۱۹۔ ایک چھوٹا وزنی حلقہ ایک چکنے تار پر پھسلتا ہے جس کی سطح مستوی انتصابی ہے۔ یہ حلقہ ایک رسی کے ذریعہ جو منحنی کی سطح مستوی میں ایک چھوٹی چرخہ پر سے گزرتی ہے ایک اور وزن و کے ساتھ مربوط ہے جو آزادانہ ٹٹک رہا ہے۔ اگر حلقہ تار پر کسی مقام میں متبادل ہو تو ثابت کرو کہ تار کی شکل ایک مخروطی ہوگی جس کا ماسکہ چرخہ پر ہوگا۔

[اگر متبادل کے محل میں $r = n$ اور یسٹ انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو موہوم کام کی مساوات ہوگی

$$n = \text{مف (رجم ط)} + \text{مف (ل - ر)} =$$

$$n = \text{رجم ط} + \text{د (ل - ر)} = \text{مستقل وغیرہ آ}$$

۲۰۔ ل ایک وزنی شہتیر ہے جو (د) پر ایک افقی محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ ایک رسی جو ب کے ساتھ بندھی ہے ل کے انتصاباً اوپر ج پر کی ایک چکنی چرخہ کے اوپر

سے گزرتی ہے۔ رسی کا دوسرا سر ایک معلومہ وزن ن کے ساتھ بندھا ہے جو ایک
دئے ہوئے چکھنے مخنی پر حرکت کرتا ہے اگر ہر محل میں متبادل رہے تو مخنی کی سادات
معلوم کرد۔
آگرا کے نیچے شہیر کے وسطی نقطہ کی گہرائی لاہو اور اس کا وزن دہو تو

چھٹا باب

ترسیمی حل

(۱۹۶)

۱۰۷۔ ایک نقطہ پر عمل کرنے والی متعدد قوتوں کا حاصل قوتوں کے کثیرالا ضلاع کے ذریعے ترسیمی طریقے سے بھی معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ (ملاحظہ ہو شکل دفعہ ۴۴) نقطہ و پر عمل کرنے والی قوتیں جو لمبا خط مقدار اور سمت کثیرالا ضلاع (ب ج د ع ف کے اضلاع سے تعبیر ہوتی ہیں متوازن ہیں۔ اس لئے ا ب، ب ج، ج د، د ع اور ع ف سے تعبیر ہونے والی قوتوں کا حاصل باقی ماندہ قوت ف کے مساوی اور متقابل ہوگا یعنی حاصل مذکور (ف سے تعبیر ہوگا۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں ف، ق، س، ط کا حاصل اس طرح معلوم ہو سکتا ہے۔ کوئی نقطہ (لو اور قوت ف کے متوازی اور متناسب (ب کھینچو، اسی طرح ق، س، ط اور ط کے متوازی اور متناسب ب ج، ج د، د ع اور ع ف کھینچو جب مطلوبہ حاصل لمبا خط مقدار اور سمت کے خط (ف سے تعبیر ہوگا۔ ظاہر ہے کہ متعدد قوتوں کی صورت میں بھی یہ عمل کیا جاسکتا ہے۔

بہت سے سوالات جن کا تحلیل طریقوں سے حل کرنا نہایت مشکل یا محنت طلب ہوتا ہے ترسیمی طریق سے مقابلہ آسانی سے حل ہو سکتے ہیں ایسے سوال انجینیری یا دیگر عملی کام میں بہت پیش آتے ہیں۔ عام طور پر ان سوالوں کے حل کرنے کے لئے مثلث اور کثیرالا ضلاع کے علاوہ کسی چیز کی ضرورت نہیں ہوتی۔

۱۰۸۔ مشق ۱۔ (ج دب ایک اسی ہے جس کے سرے دو حوازی الافق

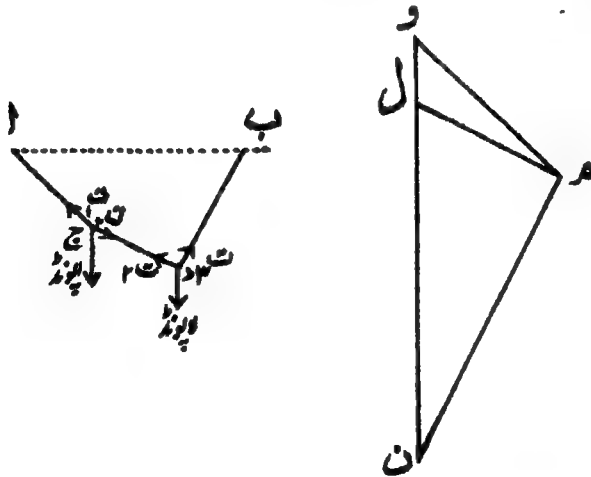
تقطعات ۱ اور ب کے ساتھ بندھے ہیں۔ فاصلہ ۲ ب ، فٹ ہے / ا ج ا ج د اور د ب کے طول بالترتیب $\frac{1}{3}$ ، ۳ اور ۴ فٹ ہیں اور ج پر ایک پونڈ کا وزن بندھا ہے / د پر ایک ایسا نامعلوم وزن بندھا ہے کہ تعادل کی حالت میں ج د ب نادیدہ قائمہ ہے / اس وزن کی مقدار اور ارسیوں کے تناؤ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ت ، ت ، ت ، ت مطلوبہ تناؤ ہیں اور وہ وزن جو د پر بندھا ہے

لا پونڈ ہے ایک انتصابی خط ول کھینچو جس کا طول ا ج ہو جو ج پر کے ایک پونڈ وزن کو تعبیر کرے۔ و میں سے ا ج کے متوازی و م کھینچو اور ل میں سے ج د کے متوازی ل م کھینچو۔

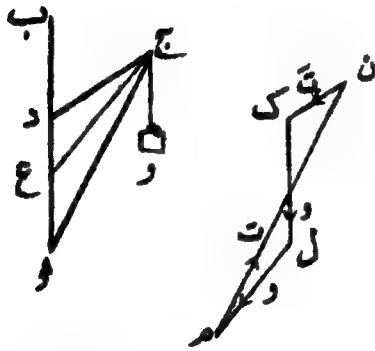
تو وں کے مثلث سے ظاہر ہے کہ و م تناؤ ت م کو تعبیر کرتا ہے اور ل م تناؤ ت م کو تعبیر کرتا ہے م میں سے م رن ، ب د کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ول مدد دہ سے ن پر ملتا ہے۔ تب چونکہ ل م سے تناؤ ت م تعبیر ہوتا ہے اس لئے م رن کا ت م م رن سے اور لا ، ل ن سے تعبیر ہوتا ہے۔ ناچنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{و م} = ۳۵.۵ \text{ ا ج} \quad \text{ل م} = ۲۱.۲۹ \text{ ا ج} \quad \text{م رن} = ۵.۶۱ \text{ ا ج} \quad \text{اور ل ن} = ۵.۶۳ \text{ ا ج}$$



اس لئے د پ کا وزن ۵۶.۶۳ پونڈ ہے اور تناؤ بالترتیب ۳۵.۵ / ۲۱.۲۹ / ۵.۶۱ اور

۱۔ پونڈ وزن ہیں۔
مشق ۲۔ حوالہ۔ حوالہ کے ضروری حصے نیچے کی شکل میں دکھائے گئے ہیں، اب
ایک انتصابی کھبا ہے۔ ا ج ایک شہتیر ہے جس کو جب کہتے ہیں اور جو سرے ل کے
گرو گھوم سکتا ہے۔ اس کو لکڑی کی ایک سلاح یا زنجیر سہارے رہتی ہے جس کو بندھن
کہتے ہیں اور انتصابی کھبے اب کے نقطہ سے بندھی ہوتی ہے



ج پر ایک چرخہ ہوتی
ہے جس کے اوپر سے
ایک زنجیر گزرتی ہے
جس کا ایک سرا وزن
و کے ساتھ بندھا ہوتا
ہے جبکہ اٹھنا منظور
ہوتا ہے اور دوسرے

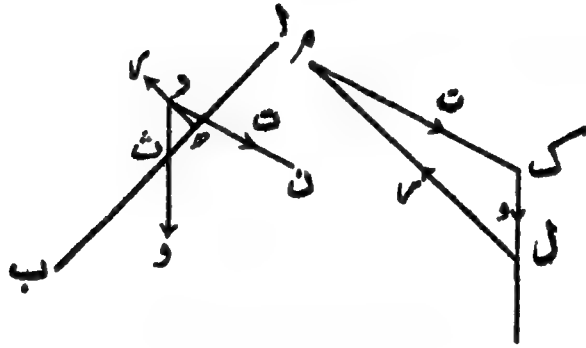
سرے ع یہ طاقت لگائی جاتی ہے۔ یہ سرعام طور پر ایک اسطوانہ کے گرد لٹایا ہوتا ہے۔ بندھن
ج د بعض صورتوں میں افق کے متوازی ہوتا ہے اور اکثر اوقات زنجیر ج ع کی سمت اس
پر مطبق ہوتی ہے۔ اوپر کی صورت میں جب اور بندھن پر کے تعادل توسعی طور پر بطریق ذیل
معلوم ہو سکتے ہیں۔

کسی چاند کے مطابق دو کو تعمیر کرنے کے لئے کل انتصابی کھینچو، عمل مرکب ج ع
کے متوازی کھینچو اور ک ل کے مساوی ل۔ ہر میں سے ہر ن ا ج کے متوازی اور
ک ن ا ج کے متوازی کھینچو۔

تب تک ل ہر ن نقطہ ج کو تعادل میں رکھنے والی قوتوں کا ایک کثیر الاضلاع
ہے کیونکہ ہم ان سیتے ہیں کہ زنجیر کا تناؤ چرخہ کے اوپر سے گزرنے میں تبدیل نہیں ہوتا
اور اس لئے تناؤ مذکور وزن و کے مساوی ہے۔ اس لئے ا ج کا دباؤ ت اور ج د کا
کچاؤ ت ہوتو

$$\frac{ت}{ہر ن} = \frac{ت}{ک ل} = \frac{و}{ک ل}$$

اس لئے اسی پیمانہ پر جس پر کک لی وزن کو تعبیر کرتا ہے وزن ، تاکہ وزن کک ات کو تعبیر کرتا ہے۔
 مشق ۳۔ بتاؤ کہ ایک اڑنے والی پتنگ پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ اسے کس طرح متبادل میں رکھتی ہیں اور ثابت کرو کہ پتنگ پر کا عمود ، ڈوری اور خط انتصابی کی سمتوں کے اندر واقع ہو گا۔



فرض کرو کہ (ب) پتنگ کا وسطی خط ہے اور ب وہ نقطہ ہے جس پر دم لگی ہوئی ہے
 نیز پتنگ کی مستوی سطح کتاب کے درسی کی سطح مستوی پر عمود ہے اور فرض کرو کہ پتنگ
 سے دم کا مرکز ثقل ٹ ہے۔

ہوا کا تعامل پتنگ کے ہر ایک نقطہ پر دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل ہو سکتا ہے۔
 ایک پتنگ کی سطح پر عمود وار اور دوسرے اس کی سطح کے متوازی عوخالذکر اجزائے ترکیبی
 کا پتنگ پر کچھ اثر نہیں ہوتا اس لئے ان کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اول الذکر اجزائے
 ترکیبی حرکیہ یا کہ پتنگ پر عمود وار ایک واحد قوت بن جاتے ہیں جو ٹ کے کچھ اوپر
 نقطہ ہر پر عمل کرتی ہے، دوسرا اور دوسری نقطہ ہر پر ملتے ہیں اور دوسری قوت یعنی رسی کا
 تناؤ ٹ اس نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

وزن کو تعبیر کرنے کے لئے انتصابی خط ک ل کھینچو اور سما کو تعبیر کرنے
 کے لئے ل ہر واحد کے متوازی کھینچو۔ تب قوتوں کے مثلث سے مرکب رسی کے
 تناؤ ت کو تعبیر کرے گا۔

شکل سے ظاہر ہے کہ انتصابی خط ل ک کے ساتھ خط مرکب بہ نسبت خط

ل مر کے بڑا زویر بنائے گا یعنی پتنگ پر کا عمود رسی کی سمت اور خط انتہائی کے اندر واقع ہوگا۔
 قوتوں کے مثلث سے یہ بھی ظاہر ہے کہ تناؤات اور وزن و دونوں ہوا کی قوت سے چھوٹے ہو گئے۔

مثالیں

(ذیل کی مثالیں جیسی طریق سے حل کی جائیں)

۱۔ ا فٹ لمبا ایک وزنی شہتیرا لب دوسروں کے ذریعے جوڑا اور لب پر بندھے ہیں اس طرح ساکن ہے کہ اوپر کی طرف ہے۔ ر سے افقی کے ساتھ ۵۰° اور ۵۰° کے زاویے بناتے ہیں، اگر لب سمت افقی کے ساتھ ۲۰° کا زاویہ بنائے تو بتاؤ کہ شہتیر کا مرکز ثقل (سے) کتنے فاصلہ پر ہے۔ نیز اگر اس کا وزن ۲۰۰ پونڈ ہو تو رسیوں کے تناؤ معلوم کرو۔

(۱۶ ر ۳ فٹ، ۱۳ ر ۱ اور ۱۱ ر ۸ پونڈ وزن)

۲۔ لب ایک یکساں سلاخ ہے جو ج چول کے گرد گھوم سکتی ہے اور ایک ہلکی رسی ا د کے ذریعہ جو ایک طرف ایک بالاترین نقطے کے ساتھ اور دوسری طرف ج کے انتہا نیچے نقطہ د کے ساتھ بندھی ہے ساکن ہے۔ اگر لب = ۳ فٹ، ل ج = ۱ فٹ، ر ج = ۲ فٹ اور د ل = ۲ فٹ اور سلاخ کا وزن ۱۰ پونڈ ہو تو رسی کا تناؤ اور محور پر کے قائل معلوم کرو۔

(۶ ر ۵ اور ۱۶ ر ۹ پونڈ وزن)

۳۔ ایک برآمدہ بیرم ذیل کی دو سلاخوں پر مشتمل ہے ایک افقی سلاخ لب ہے جسے قبضہ کے ذریعے ایک ثابت نقطہ ا پر وصل کیا ہوا ہے اور دوسری سلاخ د ج ہے جو ایک طرف لب کے نقطہ ج کے ساتھ اور دوسری طرف ا کے سین نیچے ایک ثابت نقطہ د کے ساتھ وصل کی ہوئی ہے۔ ایک ہینڈ روٹ کا ایک وزن ب پر بندھا ہے۔ ل اور ج پر کے قائل معلوم کرو جبکہ لب = ۶ فٹ، ا ج = ۲ فٹ اور د = ۳ فٹ سلاخوں کے وزنوں کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

(۲ ر ۸ اور ۳ ر ۹ ہینڈ روٹ وزن)

میں تحلیل کرنے سے

ت_۱ جب ع_۱ - ت_۲ جب ع_۲ = و اور ت_۳ جب ع_۳ - ت_۴ جب ع_۴ = ۰

ت_۵ جب ع_۵ - ت_۶ جب ع_۶ = و اور ت_۷ جب ع_۷ - ت_۸ جب ع_۸ = ۰

ت_۹ + ۱ جب ع_۹ + ۱ - ت_{۱۰} جب ع_۹ + ۱ = و اور ت_{۱۱} + ۱ جب ع_{۱۱} + ۱ - ت_{۱۲} جب ع_{۱۱} + ۱ = ۰

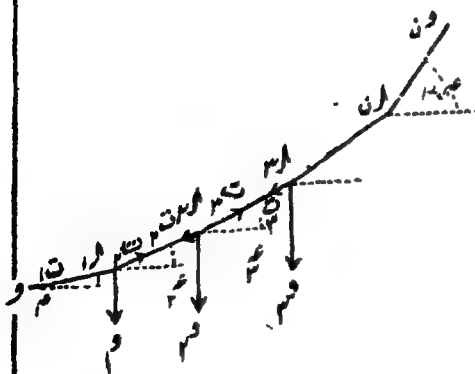
یہ ۲ مساواتیں مع مساواتوں (۱) اور (۲) کے (ن + ۱) نامعلوم متناؤں اور (ن + ۱) نامعلوم میلانوں کے معلوم کرنے کے لئے کافی ہیں۔

اوپر کی مساواتوں میں جو مساواتیں بائیں طرف درج ہیں ان سے

$$ت_۱ - ۱ جب ع_۱ - ۱ = ت_۲ - ۱ جب ع_۲ - ۱ = ت_۳ - ۱ جب ع_۳ - ۱ = \dots$$

$$= ت_۱۰ - ۱ جب ع_۱۰ + ۱ = ۰ \text{ (فرض کرو) } \dots (۳)$$

یعنی رسی کے تناؤ کا افقی جزو یکساں ہر جگہ مستقل ہے اور سر کے مساوی ہے۔



(۳) سے ت_۱، ت_۲، ت_۳، ... ت_{۱۰}

کی قیمتیں دائیں کالم کی مساواتوں میں
مندیج کرنے سے

$$س_۱ - ۱ = س_۲ = \frac{۱}{۱۲}$$

$$س_۲ - ۱ = س_۳ = \frac{۱}{۱۲}$$

$$س_۱۰ - ۱ = س_۱۱ = \frac{۱}{۱۲}$$

اگر وزن ب مساوی ہوں تو مس عم، مس عم، ... مس عم سلسلہ حسابیہ میں ہونگے۔

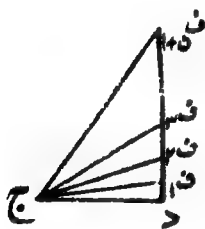
اس لئے اگر رسی کے مختلف نقطوں پر متعدد مساوی وزن باندھے جائیں تو رسی کے مختلف حصے افق کے ساتھ جواز دئے بناتے ہیں ان کے مس ایک سلسلہ حسابیہ بناتے ہیں جس کا مستقل فرق = کوئی ایک بند ہا ہوا وزن = رسیوں کا مستقل افقی تناؤ۔

(۱۱۱)

۱۱۔ ترتیبی عمل۔ اگر ریاضی کثیر الاضلاع میں رسی کے مختلف حصوں کے میلان دئے ہوئے ہوں تو ہم باآسانی ہندسی عمل سے د، د، ... ون کی نسبتیں معلوم کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ ج کوئی نقطہ ہے اور اس میں سے گزرنے والا کوئی افقی خط ج د ہے۔

ج ف، ج ف، ... ج ف، رسیوں د، ا، ... د کے متوازی کھینچو پس د ایے ف، ج د، ف، ج د۔ بالترتیب عم، عم، ... کے مساوی ہونگے۔ کوئی انتصابی خط کھینچو جو ان خطوط کو

د، ف، ف، ... پر قطع کرے تب دفعہ گزشتہ کی رو سے



$$\frac{ف}{ج} = \frac{مس عم}{مس عم}$$

$$\frac{د ف}{ج د} = \frac{د ف}{ج د} = \frac{ف ف}{ج ج}$$

$$\frac{د}{ج} = \frac{مس عم}{مس عم} = \frac{د ف}{ج د} - \frac{ف ف}{ج ج} = \frac{ف ف}{ج د} \text{ وغیرہ وغیرہ}$$

اس لئے مقداریں د، د، ... ون بالترتیب خطوط ج د، ف، ف، ف، ... ف، ف، ف، ... کے مساوی ہیں۔ اس لئے ان کی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

یہ نتیجہ اس امر سے بھی ظاہر ہے کہ نقطہ Δ پر اوزان کے قوتوں کا مثلث ج ف ہ ف ہ ہے، اور Δ پر ج ف ہ ف ہ ہے اور اس طرح دیگر نقطوں کیلئے۔ اسی طرح اگر جوڑوں پر جو وزن مل گئے ہیں وہ دئے ہوئے ہوں اور کسی دو رسیوں کے میلان معلوم ہوں تو ہم باقی رسیوں کے میلان معلوم کر سکتے ہیں۔ ہم ایک انتصابی خط کھینچتے ہیں اور اس پر ف ہ ف ہ ف ہ ف ہ وزنوں دے دیں۔ ... کے متناسب نشان لگاتے ہیں۔ اگر دو رسیوں Δ Δ کی سمتیں دی ہوئی ہوں تو ہم ف ج اور ف ہ ج اُن کے متوازی کھینچتے ہیں اور اس طرح فقط ج معلوم کرتے ہیں۔ اب ج کو مختلف نقاط ف ہ ف ہ وغیرہ کے ساتھ ملانے سے باقی رسیوں کے میلان معلوم ہو سکتے ہیں۔

۱۱۱۔ - تجربی طریقے سے ایک مستوی میں عمل کرنے والی متعدد قوتوں کا حاصل معلوم کرنا۔ فرض کر دو کہ قوتیں ف، ق، ا، م اور س ہیں اور اُن کے خط عمل بائیں طرف کی شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

کثیر الاضلاع Δ ب ج د ع کھینچو جس کے اضلاع Δ ب، ب ج، ج د، اور د ع بالترتیب ف، ق، ا، م اور س کے متناسب ہوں۔ (ع کو Δ اور اس طرح قوتوں کے کثیر الاضلاع کی رو سے ا ع بلحاظ مقدار اور سمت کے مطلوبہ حاصل کو تعبیر کرتا ہے۔



کثیر الاضلاع کے اندر کوئی نقطہ نہ ہو اور اس کو 'ب' ا ج' د' مع سے ملاو

اور فرض کرو کہ ان لانے والے خطوں کے طول $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ہیں۔
 قوت ف کے خط عمل پر کوئی لفظ 10 اور 10 د کے متوازی خط 10 پر
 کھینچو جو 10 سے 10 پر 10 کے متوازی خط 10 پر 10 سے 10 پر
 10 اور 10 کے متوازی 10 پر 10 سے 10 پر 10 اور 10 سے
 10 اور 10 کے متوازی خط 10 پر 10 سے 10 پر 10 اور 10 سے
 10 سے 10 لے لے 10 کے مساوی اور متوازی کھینچو تب 10 لے لے
 پانچوں پر 10 قوت ف کو تعبیر کرتا ہے بلحاظ مقدار اور خط عمل کے مطلوبہ
 حاصل کو تعبیر کرے گا۔

چونکہ ف 10 سے تعبیر ہوتا ہے اس لئے 10 اور 10 سے تعبیر
 ہونے والی دو قوتوں کے مساوی ہے اس لئے اس کی بجائے دو قوتیں 10 اور 10
 10 اور 10 کی سمتوں میں لی جاسکتی ہیں۔ اسی طرح 10 کی بجائے دو قوتیں
 10 اور 10 اور 10 کی سمتوں میں لی جاسکتی ہیں، 10 کی بجائے
 دو قوتیں 10 اور 10 اور 10 کی سمتوں میں لی جاسکتی ہیں اور 10 کی
 بجائے قوتیں 10 اور 10 اور 10 کی سمتوں میں لی جاسکتی ہیں۔
 اس طرح قوتوں ف 10 اور 10 اور 10 کی بجائے شکل 10 پر 10 اور 10
 کے کناروں کے ساتھ عمل کرنے والی قوتوں لگائیں۔ ان قوتوں
 میں سے کناروں 10 پر 10 اور 10 میں عمل کرنے والی قوتیں ایک دوسرے
 کے متوازن ہیں۔ اس لئے ہمارے پاس 10 اور 10 کے مساوی اور متوازی
 10 پر عمل کرنے والی صرف دو قوتیں بچیں جن کا حاصل 10 ہے۔
 چونکہ 10 کو 10 کے مساوی اور متوازی کھینچا گیا ہے اس لئے
 یہ مطلوبہ حاصل کو بلحاظ مقدار اور سمت کے تعبیر کرے گا۔

10 10 10 کی قسم کی شکلوں کو قوتوں کا کثیر الاضلاع کہتے ہیں اور 10 پر 10 اور 10
 جیسی شکلوں کو زنجیری یا ریاضیاتی کثیر الاضلاع کے نام سے موسوم کرتے ہیں
 کیونکہ اس میں بہت سی سیوں یا زنجیروں کا ایک جٹ تعادل میں ہے۔

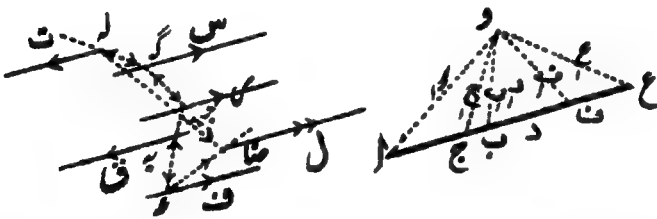
۱۱۲۔ اگر قوتوں کے کثیر الاضلاع کا نقطہ قطع نقطہ 10 پر متعلق ہو تو کثیر الاضلاع

کو بند کہتے ہیں اور اس صورت میں حاصل قوت معدوم ہو جاتی ہے۔
اگر قوتوں کا کثیر الاضلاع بند ہو لیکن ریسمانی کثیر الاضلاع بند نہ ہو یعنی اگر
کہ لہجہ خط مستقیم نہ ہو تو ہمارے پاس د و ا و کے متوازی نقاط کہ اور د
پر عمل کرنے والی دو قوتیں نکال جاتی ہیں یعنی اس صورت میں ہمارے پاس دو مساوی
متوازی اور متقابل قوتیں رہ جاتی ہیں جن سے ایک جنت بنتا ہے۔

لیکن اگر ریسمانی کثیر الاضلاع بھی بند ہو تو کہ لہجہ خط مستقیم ہو گا اور یہ مساوی
متوازی اور مخالف قوتیں ایک ہی خط مستقیم میں عمل کریں گی اور اس لئے ایک
دوسرے کو معدوم کر دیں گی۔

اس لئے اگر قوتیں ف، ا، ف، ا، س اور س متبادل میں ہوں تو ضروری ہے
کہ ان قوتوں کے قوی کثیر الاضلاع اور ریسمانی کثیر الاضلاع دونوں بند ہونے
چاہئیں۔

۱۱۳۔ اگر قوتیں متوازی ہوں تب بھی عمل دفعہ ماقبل کے مطابق ہو سکتا ہے۔ نیچے
جو شکل دیکھیں گئی ہے وہ اُس صورت کے لئے ہے جیکہ قوتیں متوازی ہیں اور پانچ
قوتوں میں سے دو قوتیں باقی تین قوتوں کی سمت کے مخالف عمل کرتی ہیں۔

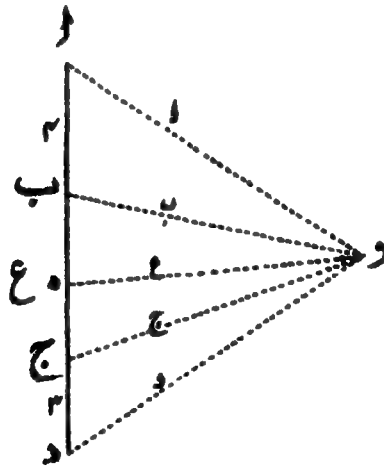
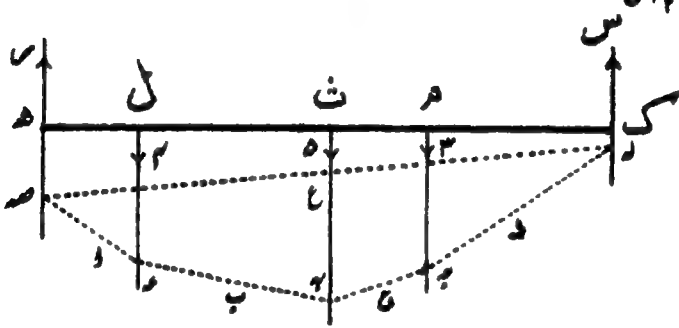


چونکہ ف، س اور س کی سمت ایک ہی ہے اس لئے ا، ب، ج د اہ
دع کی سمت بھی لازماً ایک ہی ہوگی۔ اسی طرح ب، ج، ا، ف کی سمت
جو ق اور ت کو تعمیر کرتی ہیں اس کے مخالف ہوگی۔

عمل کا ثبوت وہی ہے جو دفعہ ماقبل میں درج کیا گیا ہے۔ خطصال جو
ا، ف کے مساوی اور متوازی ہے بلحاظ مقدار اور خط عمل کے مطلوبہ حاصل کو

تعبیر کرتا ہے۔ اس عمل سے صریحاً بہت سے وزنوں کا حاصل وزن معلوم ہو سکتا ہے۔
 مشق۔ ایک یکساں سلاخ ھک کو جس کا طول ۱۲ فٹ اور وزن ۵ ہنڈرویت
 ہے ھ اور ک پر اس طرح سہارا گیا ہے کہ ۱۰ فٹ کے متوازی ہے اس کے نقطوں ل
 اور ھ پر جن کے فاصلے ھ سے بالترتیب ۲ فٹ اور ۸ فٹ ہیں ۳ ہنڈرویت اور ۳
 ہنڈرویت کے وزن بانٹ سے گئے ہیں تیسری طریق سے ھ اور ک پر کے تفاسل
 دریافت کرو۔

۱۰۴) ا ب، ب ج، ج د انتصاباً نیچے کی طرف اس پیاز کے مطابق ناپو جس پر ایک
 ہنڈرویت نصف انچ سے تعبیر ہوتا ہے، اس طرح ا ب = ۲ انچ، ب ج = $2\frac{1}{4}$ انچ اور
 ج د = $1\frac{1}{4}$ انچ۔



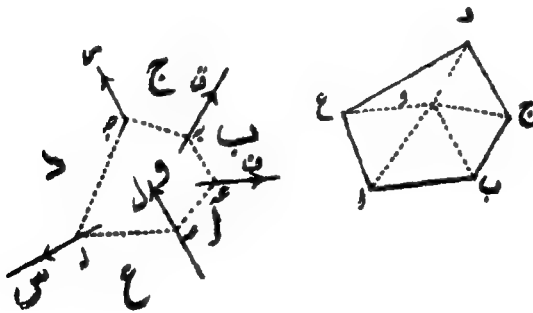
کوئی مناسب قطب منتخب کرو۔

انتصابی خط ل پر کوئی نقطہ د لو اور اس میں سے عہ عہ ب بالترتیب ول اور وج کے متوازی کھینچو جو د اور ث میں سے گزرنے والے انتصابی خطوں سے عہ اور ب پر ملیں، ج د کے متوازی ب جہ اور د کے متوازی جہ لہ کھینچو، لہ عہ کو ملاؤ، لہ عہ کے متوازی د ع کھینچو جو ا ب سے ع پر ملے، تب د ع اور ع ا صریحاً اس اور صراحتاً کمرنگے۔ ناپنے سے ص = ۹۵۸۳، ہنڈروٹ اور ص = ۵۵۱۷، ہنڈروٹ۔ ۱۱۴۔ حروف سے نشان دہی کا ایک دوسرا طریقہ بھی (جس کو باؤ یا ہنریسمانی کا طریقہ کہتے ہیں) دفعہ ۱۱۱ کے عمل میں باسانی استعمال ہو سکتا ہے۔

تو تین اور ق کی درمیانی جگہ کو ب سے تعبیر کرو، ق اور س کی درمیانی جگہ کو ج سے تعبیر کرو اور علی ہذا القیاس۔

تب ت کا خط عمل ل اور ب کی جگہوں کی درمیانی حد ہے اور اس لئے دوسری شکل میں وہ خط جو اس کو تعبیر کرتا ہے ب آسانی ا ب سے موسوم کیا جاسکتا ہے اس لئے قوتوں کے کثیر الاضلاع کو ا ب ج د ع سے موسوم کیا جاسکتا ہے۔

جب قطب کو منتخب کر لیا جائے اور ریسمانی کثیر الاضلاع عہ ب جہ لہ عہ کو کھینچ لیا جائے تو کثیر الاضلاع مذکور کے اندر کی جگہ نو آسانی سے د سے موسوم کیا جاسکتا ہے



اس طرح قوتوں کے کثیر الاضلاع کے کسی زاویہ کو جو ٹے حروف کے ساتھ لکھنے کے جواب میں ریسمانی کثیر الاضلاع کی بیرونی فضا کو بڑے حروف کے ساتھ لکھا جاسکتا ہے۔
قوت کا نقطہ عمل عہ فضاؤں (د، ب اور و کا نقطہ تقاطع ہے اس لئے

اس کو نقطہ اب دیکھ سکتے ہیں۔ اس نقطہ کا متناظر قوتوں کا مثلث اب وہ ہے۔
اسی طرح دوسری قوتوں کے لئے۔

۱۱۵۔ اگر دو خطوں اور دو کے جواب میں دونوں کے کسی دئے ہوئے نظام کے دوربیمانی کثیر الاضلاع کھینچ جائیں تو ان کے متناظر اضلاع کے نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو دو کے متوازی ہے۔

فرض اگر کو کہ عہدہ جہ ریسائی کثیر الا ضلاع ہے جو دفعہ ۱۱ کے مطابق
 دوسرے قطب کے جواب میں بنایا گیا ہے، عہدہ جہ پر عمل کرنے والی سب
 قوتوں ف، ق، ر، ... کو الٹ دو۔

ہر ایک قوت قی کو عہدہ اور جہدہ کے متوازی دوتوتوں میں تحلیل کردوجہ و اور وج کے مساوی ہوں اور یہ پراگٹی ہوئی قوت قی کو عہدہ اور جہدہ کے متوازی دوتوتوں میں تحلیل کردوجہ و وج کے مساوی ہوں فقط عہدہ کے گردوجہدہ اور عہدہ کا نقطہ تقاطع ہے معیار ازلو۔

تب چونکہ یہ چار اجزائے ترکیبی متبادل میں ہیں اس لئے ع کے گردان کے معیار اثر دس کا مجموعہ صفر ہے۔ نیز ان میں سے دو قوتیں ۶ میں سے گزرتی ہیں۔ اس لئے ص ۶ اور ۶ جبہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا معیار اثر ع کے گرد (جو د ج اور ج و کے بالترتیب مساوی ہیں) صفر ہے۔

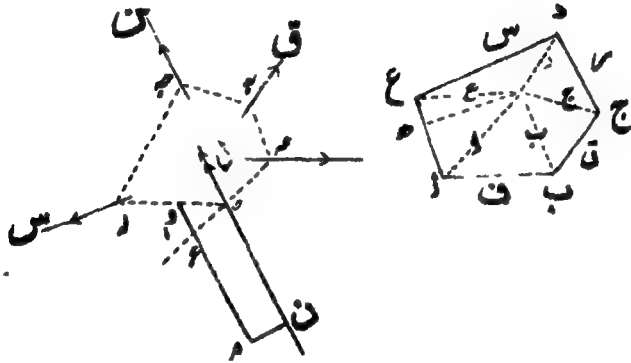
اس لئے ان کا حاصل ہمیں سے گزرتا ہے لیکن یہ سرکھٹا ط میں سے بھی گزرتا ہے جو ب جہ اور ب جہ کا نقطہ تقاطع ہے۔ اس لئے ان کا حاصل خطوط میں عمل کرتا ہے لیکن دقت ۱۱ کی دائیں طرف کی شکل سے وج اور ج و سے تعبیر ہونے والی قوتوں کا حاصل و و کے متوازی ہے۔ پس عطا، و و کے متوازی ہے۔

اسی طرح خط ط ص جو ط کو خطوط ج ل اور ج ل کے تقاطع ص سے ملتا ہے دو کے متوازی ہے۔

اس لئے تمام نقطے، واظا، ص..... ایک خط مستقیم پر واقع ہیں جو وود کے متوازی ہے۔

۱۱۶۔ اگر مستوی قوتوں کے ایک دئے ہوئے نظام کا ایک ریسمانی کثیر الانحطاع

یعنی ہر کے گز معیار اثر اس حاصل ضرب کے مساوی ہے جس کا ایک جزو ضربی وہ مقطوعہ (۱۰) ہے جو ریسانی کثیر الاضلاع کے حاصل میں سے گزرنے والے اضلاع کے درمیان ہر سے حاصل متوازی خط پر قطع ہوتا ہو اور دوسرا جزو ضربی وہ عمود ہے جو قطب دہیں سے حاصل کو تعبیر کر کے والے قومی کثیر الاضلاع کے ضلع پر کھینچا جائے۔



اسی طرح کسی ترکیبی قوت فن کا مرکز کے گرد معیار اثر اس حاصل ضرب کے مساوی ہے جس کا ایک جزو وہ مضبوط ہے جو فن کے متوازی ہر میں سے گزرنے والے خط پر لیسانی کے عہ میں سے گزرنے والے دو اضلاع کے درمیان قطع ہوتا ہے اور دوسرا جزو وہ عمود ہے جو قوتوں کے کثیر الاضلاع کے ضلع (ب پر) جو فن کو تغیر کرتا ہے (قطب دے سے کہینا جائے۔

۱۱۸۔ ہلکی سیلاخوں کو آزادانہ چڑھنے سے ایک کثیر الاصلاح بنایا گیا ہے قوتوں کا ایک نظام چڑوں پر عمل کر رہا ہے جو متعادل ہیں سیلاخوں کے طوہوں کی سمت میں تعامل دریافت کرو۔

فرض کرد کہ پانچ سلاخوں (۱، ۱، ۱، ۱، ۱) ۱، ۱ کو آزادانہ طور پر

پیوستہ کر کے ایک قالب بنایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ اس کے جڑوں پر قوتیں
ف، ف، ف، ف، ف عمل کرتی ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

کی سمت میں یا لام وہ کی سمت میں عمل کرے گی اور لام پر کی قوت لام یا لام یا لام کی سمت میں عمل کرے گی۔

اگر ایک سلاخ پر دباؤ عمل کرتا ہے جیسا کہ موجدہ صورت میں ہے تو سلاخ کو پھینکنے کے عمل کی مزاحمت کرنی پڑتی ہے یا پھینکنے کے عمل کی مزاحمت کرنی پڑتی ہے۔ پہلی صورت میں ہر ایک سرے پر کا تعامل سلاخ کے مرکز سے سروں کی طرف عمل کرتا ہے۔ اس صورت میں سلاخ کو فشار بند سلاخ کہتے ہیں۔ دوسری صورت میں ہر ایک سرے پر کا تعامل مرکز کی طرف عمل کرتا ہے۔ اس صورت میں سلاخ کو بند ہیں سلاخ کہتے ہیں۔ ہر صورت میں سلاخ کے دونوں سروں پر کے تعامل مساوی اور متقابل ہوتے ہیں۔ خطاب ج انتصابی سمت میں کھینچو جس کا طول $2\frac{1}{4}$ انچ ہو اور جو لام پر کے وزن کو تعبیر کرے۔ ج ع، لام وہ کے متوازی اور د ع، لام لام کے متوازی کھینچو تب د ب ج ح جوڑ لام کے لئے قوتوں کا کثیر الاملا ہے۔

(۱۱۰) خط ع ف افقی سمت میں کھینچو جو ج سے ف پرے۔ تب ع ج ف، لام کے لئے قوتوں کا کثیر الاملا ہے اس لئے تعامل ف م و ج ف سے اور مساوی ف م و ج سے تعبیر ہوتا ہے۔

بالآخر جوڑ لام کے لئے کثیر الاملا د ع ف ا بنتا ہے، اس لئے ف، ف ا سے تعبیر ہوتا ہے۔

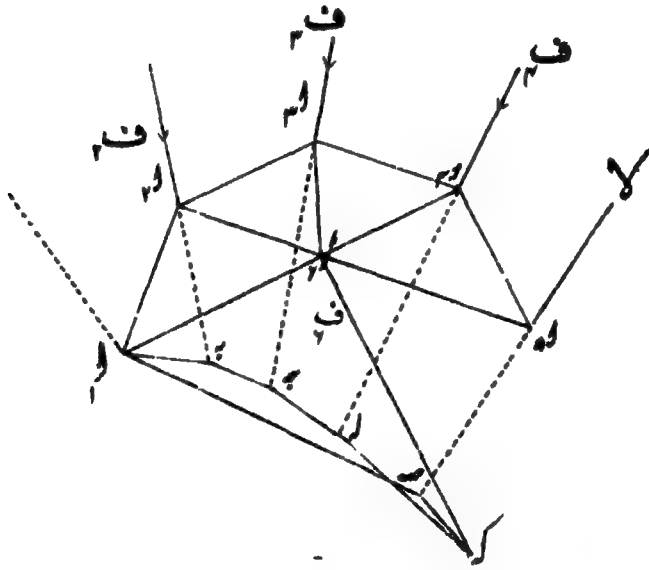
انہوں میں ناپنے سے ۔

ع ف = ۱۱۱۰ ج ع = ۳۱۳ د ب = ۱۱۷۷ د (۵۳۰) ۵
د ع = ۹۱ ج ف = ۱۲۵ ف (۳۷۵) ۴

چونکہ ایک انچ دو ہنڈرویلوں کو تعبیر کرتا ہے اس لئے ہنڈرویلوں میں

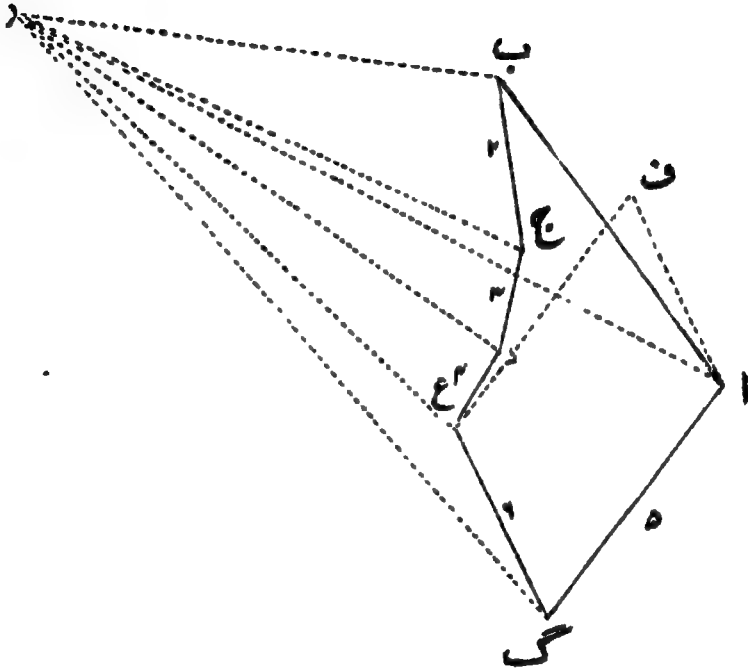
ف م = ۲۵۲۰ ، ف م م = ۶۵۶۲ ، ف م م م = ۳۵۵۳

شکل میں دکھایا گیا ہے، نقطوں $ا، ب، ج، د، ه، و، ز$ پر قوتیں $ف_ا، ف_ب، ف_ج، ف_د، ف_ه، ف_و، ف_ز$ حسب شکل ذیل مختلف سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ تعادل $ا$ پر کے تعامل $ف_ا$ کے ذریعے جو بلحاظ سمت اور مقدار کے نامعلوم ہے اور $ا$ پر کے نامعلوم تعامل $ف_ا$ کے ذریعے جو $ا$ کی سمت میں عمل کرتا ہے قائم ہے۔
ان تعاملوں کو معلوم کرو اور نیز قالب کی سلاخوں کے دباؤ اور تناؤ معلوم کرو۔



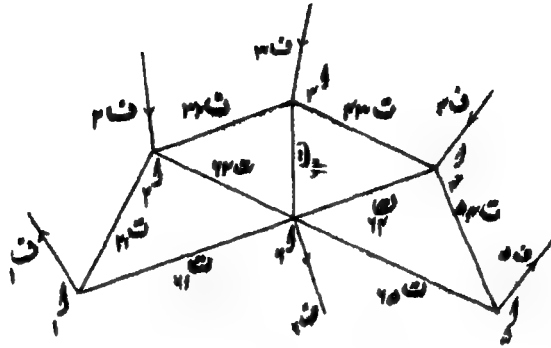
ہمیں پہلے $ف_ا$ اور $ف_ا$ کی مقدار میں معلوم کرنی چاہئیں۔
کسی مناسب پیمانہ پر $ج، د، ه، و، ز$ ع گ کھینچو جو $ف_ب، ف_ج، ف_د، ف_ه، ف_و، ف_ز$ کو بلحاظ سمت اور مقدار کے قیور کریں۔ کسی نقطہ کو قطب مقرر کرو۔
 $ا$ سے شروع ہو کر یہ کرنا معلوم قوت $ف_ا$ کے خط عمل میں یہی ایک معلوم نقطہ ہو۔
ریسانی کثیر الاضلاع $ا، ب، ج، د، ه، و، ز$ کھینچو جس میں $ا، ب، ج، د، ه، و، ز$ کہ ختم ہ

بالترتیب د ب ، و ج ، و د ، و ح ، و گ کے متوازی ہوں۔

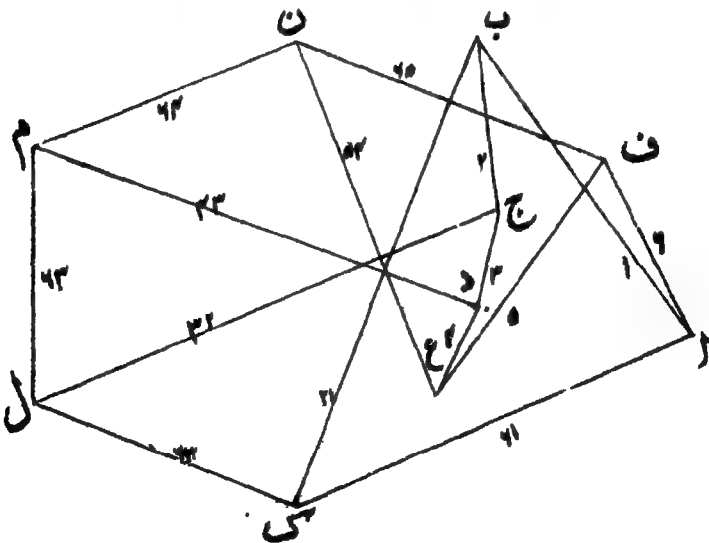


۱۰ منہ کو ملاؤ اور د ا اس کے متوازی کھینچو جو گ ا سے (جو معلوم سمت ۱۰ کا
کے متوازی کھینچا گیا ہے) ا پر ملے۔

تب صریحاً گ ا نامعلوم تعامل فہ کو تعبیر کرتا ہے اور ا ب ، ۱۰ پر کے نامعلوم
تعامل فہ کو بلحاظ مقدار اور سمت دونوں کے تعبیر کرتا ہے کیونکہ قوتوں کا کثیر الاضلاع
ا ب ج د ح گ ا اور ریاضی کثیر الاضلاع ۱۰ ب ج د ح صا ۱۰ کے بند ہونے
کی وجہ سے نقاط ۱۰ ۱۰ ۱۰ پر عمل کرنے والی متناظر توجہیں فہ فہ فہ
جو معلوم یا معلوم کردہ سمتوں میں عمل کرتی ہیں متعاول ہیں۔



(۱۱۳) قوتوں کے کثیر الاضلاع کو سطحی الامکان صحت کے ساتھ کھینچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کی قوتیں
 اسی ترتیب میں ہونی چاہئیں جس میں یہ قالب میں ہیں۔ ع، ف، ا، ت بالترتیب گ (ا) اور
 گ ع کے متوازی کھینچو اس طرح سے ہم قوتوں کا کثیر الاضلاع اب ج د ع ت ا حاصل ہوگا۔
 ب ک ا لک بالترتیب ا، ل، اور ل، ا، کے متوازی کھینچو۔ اس طرح ل، گ کے لئے قوتوں کا
 مثلث ا ب ک ہوگا۔ ک ا د ر ج میں سے ک ل، ج ل بالترتیب ل، ا، اور ل، ل، کے متوازی کھینچو۔ اس طرح ل، گ کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع ب ج ل ک ہوگا۔



ل اور د میں سے ل م اور د م بالترتیب د م ہ اور د م م کے متوازی کھینچو
تب ج د م ل م کے لئے قوتوں کا کثیر الاختلاع ہوگا۔

اسی طرح سے د ع ن م ، ا م کے لئے قوتوں کا کثیر الاصلع ہے۔ م ب
اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ن ف ا م ا م کے متوازی ہے۔ اس لئے ع ف ن
مثلاً ا م کے لئے قوتوں کا مثلاً ہے اور کثیر الاصلع ف ا ک ل م ن ، ا م
کے لئے قوتوں کا کثیر الاصلع ہے۔

یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ سلاخیں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵

دہاؤں میں میں اور باقی پانچ تہاؤں کی حالت میں ہیں۔

۱۲۱۔ شکل کھینچنے کے لئے ایک نکتہ قابل غور ہے۔ اس کی تشریح دفعہ ماقبل کی آخری مثال سے ہو سکتی ہے اور ۲ پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں ان کو کھینچنے میں ہم ج میں سے ۲ اور ۲ کے متوازی خط کھینچ سکتے تھے اور ک میں سے ایک اور خط ۲ اور ۲ کے متوازی کھینچ سکتے تھے ایسا کرنا اگرچہ بالکل غلط تو نہ ہوتا مگر اس سے شکل مقابلہ بہت پیچیدہ ہو جاتی۔ اس لئے عام قاعدہ جس کو ملحوظ رکھنا چاہیئے وہ یہ ہے کہ شکل کے کسی نقطہ ج پر لٹنے والے خطہ حتی الامکان دو جوڑوں پر عمل کرنے والی قوتوں کے خطوط عمل اور ان جوڑوں کے ملائے والے خط کے متوازی ہوں۔ مثلاً چونکہ دو جوڑوں ۲ اور ۳ پر عمل کرنے والی قوتیں ج پر لیتی ہیں اس لئے اس میں سے گزرنے والا تیسرا خط ۲ اور ۳ کے متوازی ہونا چاہیئے۔ اس لئے ہم ج ل ۲ اور ۳ کے متوازی کھینچتے ہیں۔

(114)

لیکن بعض اوقات کوئی خطوط ایسے نہیں ہوتے جو قالب پر عمل کرنے والی ابتدائی بیرونی قوتوں کے متوازی ہوں مثلاً قطع ل بر کی قوتیں۔ ایسی صورت میں ہم ل میں سے گزرنے والے ایسے خط لیتے ہیں جو ابتدائی قالب میں شاملیت کے اصطلاح کے متوازی ہوں۔ مثلاً لوم کے لئے قوتوں کا کثیر الاصطلاح کیچنے میں ہم ل ج ا ج د سے شروع کرتے ہیں جو پہلے ہی کیچنے جا چکے ہیں۔

اب ہم مل میں سے ایک خط ایسا بھیج سکتے ہیں جو ۱۳ نومبر کے یا ۱۴ کے متوازی ہو لیکن لی پر جو قوتیں قبل ازیں کھینچی جا چکی ہیں وہ ۱۲، ۱۳ اور ۱۴

ت ۱۰ x ل ۱۰ سے عمود ل ۱۰ پر

= ف ۱۰ x ل ۱۰ سے ل ۱۰ پر عمود

اسی طرح سے ل ۱۰ ل ۱۰ اور ل ۱۰ ل ۱۰ کے تقاطع کے گرد اور ل ۱۰ کے گرد

(۱۱۵)

معیار اثر لینے سے ہیں ت ۱۰ اور ت ۱۰ حاصل ہونگے

اس طریقہ کے مطابق عمل کرنے میں احتیاط رکھنی چاہیے کہ تراش قالب کے

تین رکنوں سے زیادہ کو قطع نہ کرے۔

۱۲۳۳ — چند سلاخیں جن کے سروں کو باہم وصل کیا ہوتا ہے قالب کہتے ہیں۔ جب اس قسم کی سلاخ پر عمل کرنے والی قوتیں ایسی ہوں کہ سلاخ تناؤ کی حالت میں ہو تو اس کو بند ہن کہتے ہیں لیکن جب وہ پیچکاؤ کی حالت میں ہو تو اسکو فشارہ بند کہتے ہیں۔

سب سے سادہ قالب ایک مثلث ہوتا ہے جو تین سلاخوں ا ب، ب ج،

ج ا کے سروں کو جوڑنے سے بنایا جاتا ہے۔ چونکہ مثلث کے اضلاع کو معین کر دینے سے اس کی شکل معین ہو جاتی ہے اسلئے اس قسم کے قالب کی شکل ناقابل تبدیل ہوگی اس کو صلب یا مکمل قالب کہتے ہیں خواہ اس کے جوڑوں پر کیسے ہی وزن کیوں نہ لٹکائے جائیں۔

لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ ایک ایسے قالب کی شکل جو چار سلاخوں ل ب،

ب ج، ج د، د ل کے سروں ل، ب، ج اور د کو جوڑنے سے بنائی جائے

ہمیشہ ایک ہی رہے کیونکہ سوائے مثلث کے اور کوئی بند سہی شکل محض اضلاع کا

تعیین کر دینے سے متعین نہیں ہو سکتی۔

ایسے قالب کو نامکمل کہتے ہیں کیونکہ اس کے سروں پر عمل کرنے والی قوتوں

کے بدلنے سے اس کی شکل بدلتی ہے۔ لیکن اگر ہم چاہیں تو اس میں ایک قطری سلاخ

ل ج کا اضافہ کرنے سے جس کے سرے قبضہ کے ذریعہ ل اور ج کے ساتھ وصل

کر دئے گئے ہیں اس کو استوار بنا سکتے ہیں۔ اب اگر قالب کے جوڑوں پر قوتوں

کا کوئی معلومہ نظام عمل کرے تو ہم قالب کے پانچ اضلاع کے ساتھ عمل کرنے والی

قوتوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ قطری سلاخ ل ج کے علاوہ ہم ایک اور قطری سلاخ ب د

لگا دیتے ہیں۔ اس صورت میں قالب کو دائرہ کہتے ہیں چونکہ اس میں سلاخوں کی اس تعداد کی نسبت جو اس کی شکل کو متعین کرنے کے لئے ضروری ہیں ایک سلاخ زیادہ ہے اب اس کے ہر رکن کے ساتھ جو قوتیں عمل کرتی ہیں ان کا تعین کرنا ممکن نہیں ہے۔ عام طور پر کوئی قالب صلب اس وقت ہوتا ہے جبکہ یہ مثلثوں کی کسی تعداد میں منقسم ہو سکے مگر ممکن ہے کہ یہ دائرہ ہو۔

۱۲۴۔ غیر زائد صلب قالب۔ دو ابعاد میں اگر جوڑوں کی تعداد n ہو تو قالب کے صلب اور غیر زائد بھی ہونے کے لئے سلاخوں کی تعداد $2n - 3$ ہونی چاہیئے کیونکہ اگر ہمارے پاس تین جوڑے a, b, c ہوں تو ان کو متعین کرنے کے لئے تین سلاخوں یعنی b, c, d اور a, b کی ضرورت ہوتی ہے۔ کسی اور جوڑے کا مقام متعین ہو جائے اگر ہیں d کو کسی دو گزشتہ جوڑوں کے ساتھ ملانے والی سلاخیں مثلاً a, d, b, d دی ہوئی ہوں۔ اسی طرح کسی اور جوڑے e کے لئے علیٰ ہذا القیاس پس پہلے تین جوڑوں کے بعد ہر ایک جوڑے کے لئے دو مزید سلاخوں کا ہونا ضروری ہے۔ اس لئے کل تعداد کی کل تعداد

(۱۱۶)

$$3 + 2(n - 3) = 2n - 3$$

تین ابعاد میں ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ تعداد مذکور $2n - 3$ ہوگی کیونکہ پہلے تین جوڑے a, b, c کے معلوم ہونے کے بعد چوتھے جوڑے کا مقام اس صورت میں متعین ہو سکتا ہے اگر ہیں سلاخیں a, d, b, d c, d معلوم ہوں کسی پانچویں جوڑے کا مقام معلوم ہو سکتا ہے اگر ہیں اس کو گزشتہ جوڑوں میں سے کسی تین کے ساتھ ملانے والی سلاخوں کے طول مثلاً a, c, b, c, d, e کے طول معلوم ہوں۔ اس لئے پہلے تین کے بعد ہر ایک جوڑے کے لئے ہمارے پاس تین مزید سلاخیں ہونی چاہئیں پس ہر تعداد مطلوبہ۔

$$3 + 2(n - 3) = 2n - 3$$

۱۲۵۔ دفعہ ۱۲۰ کی مثالوں میں بہت سے غیر زائد صلب قالب ہیں۔ بعض اوقات زائد قالب سہولت بخش ہوتا ہے مثلاً دفعہ ۱۲۰ کی مشق ۱ میں ۱۳ ایک بند ہیں اگر ۱۴ پر کے ۱۰ ہنڈرویت نکال دے جائیں تو ۱۴ صریحاً فشار بند بن جائیگا۔ لیکن اگر ۱۴ بہت جلد ہی مڑ جانے والا ہوتا تو یہ فشار بند کے طور پر اچھی طرح کام نہیں دے سکتا۔ اس صورت میں ایک مزید بند ۱۴ پر رکھنا مفید ہوتا، جب سب وزن ۱۴ پر ہوتا تو قوت ۱۴ ۱۴ پر عمل کرتی اور ۱۴ چپٹاں مفید نہ ہوتی اگر سب وزن ۱۴ پر ہوتا تو سلاح ۱۴ ۱۴ بے کار ہو جاتی اور عمل صرف ۱۴ ۱۴ پر ہوتا۔
۱۴ ۱۴ یا ۱۴ ۱۴ جیسے رکنوں کو جو صرف فشار بند یا بندن کے طور پر استعمال ہو سکتی ہیں نیم رکن کہتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ ایک ۱۰ فٹ لمبے شہتیر کے ایک سرے سے ۱ فٹ، ۳ فٹ، ۱ فٹ کے فاصلوں پر بالتربیع اوزان ۳، ۴، ۲، ۳ ہنڈرویت لٹکائے گئے ہیں۔ صحیح نقشہ کفی کے عمل سے حاصل کا خط عمل دریا فٹ کرو۔

(اس سرے سے ۳ و ۹ فٹ)

۲۔ ایک افقی شہتیر ۲۰ فٹ لمبا ہے اور اس کے ایک سرے سے بالتربیع ۱، ۲، ۳، ۴ فٹ کے فاصلوں پر ۳، ۴، ۲، ۳ ہنڈرویت وزن لٹک رہے ہیں۔
ریسمانی کثیر الاضلاع کے ذریعے دونوں سوں پر کے دباؤ معلوم کرو۔

(۱۵ و ۱۸ ہنڈرویت)

۳۔ ایک شہتیر ۱۵، ۱۱، ۱۲، ۱۸ پونڈ کے وزن اس کے ایک سرے سے بالتربیع ۱، ۲، ۳، ۴ فٹ کے فاصلوں پر گودیاں ہیں۔ شہتیر اپنے ایک سرے سے ۵ اور ۵ فٹ کے فاصلوں پر سہارا ہوا ہے۔ قریبی طور پر سہارے والی تونیں معلوم کرو۔

(۳ و ۴ اور ۱۸ پونڈ وزن)

۴۔ اب ج د ع ف ایک منظم صمدس ہے۔ اگر ع ج کے ساتھ ایک ہم پونڈ

وزن کی قوت عمل کرے تو ثابت کرو کہ متبادل قائم رکھنے کے لئے (ج، ٹ، د، ع،) پر بالترتیب ۱۰، ۳۲، ۱۷ اور ۶۳ و ۳۴ پونڈ وزن کی قوتیں عمل کر میں گی۔

۵۔ ذیل کی شکل (۱) میں ہلکی سلاخوں کا ایک متشکل نظام ہے جن کے سرے آزادانہ جوڑے گئے ہیں اور جسے سروں پر عمل کرنے والی انتصابی قوتوں کے ذریعے سہارا ہوا ہے۔ ۱۰ اور ۵ ہینڈرویت کے وزن ان نقطوں پر جو دکھائے گئے ہیں انتصابی سمت میں عمل کرتے ہیں۔

اگر جانبی سلاخیں افق کے ساتھ ۵ کا زاویہ بنائیں تو سلاخوں کے دباؤ اور تناؤ معلوم کرو۔

(ت = ۱۳۵.۵، ت = ۹۷.۹، ت = ۳۵.۶، ت = ۸۷.۳۹)

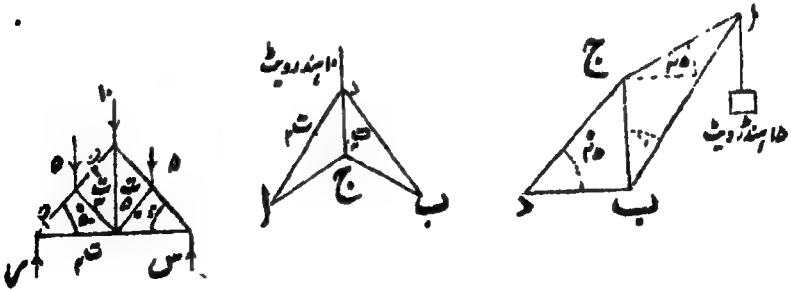
ت = ۵ ہینڈرویت، ت = ۱ اور ت = ۵ بندھن ہیں باقی فشار بند ہیں)

۶۔ شکل (۲) میں ہلکی سلاخوں کا ایک نظام ہے جس کے سرے آزادانہ جوڑے گئے ہیں اور جو سروں ۱ اور ۲ پر عمل کرنے والے انتصابی تقاطعوں سے سہارا ہوا ہے اگر ہینڈرویت کا ایک وزن ۵ پر رکھا جائے تو سلاخوں کے دباؤ اور تناؤ معلوم کرو۔

معلوم ہے کہ $d > a > b$ اور $e > f > c > a > b = ۳۵$

(ت = ۸۷.۳۹، ت = ۱۱۷.۹۸، ت = ۹۷.۹۲ ہینڈرویت، ت = فشار بند ہے)

اور ت = ۱ اور ت = ۵ بندھن ہیں)



۷۔ شکل (۳) میں ایک حامل کی شکل دکھائی گئی ہے اس میں (۱) ہینڈرویت کا

ایک وزن لنگ رہا ہے۔ حصوں (ج اور ا ب) پر عمل کرنے والی قوتیں معلوم کرو۔ اگر کھبا ب ج آزادانہ حرکت کر سکے اور ب د استوار طور پر ثابت ہو تو بندہ ج د پر کھچاؤ معلوم کرو۔

[۳۷۵ (۳۷۵) ۴۷۵ اور ۳۳۵ ہندرویت]

۸ — ایک دارن گرد کا ایک حصہ مین مساوی الاصلع مثلثوں (ب ج، ا د ج، ب ج ج ع پر مشتمل ہے جن کے خط ا ب، د ج ج ع افقی ہیں اور موخر الذکر سلاخ سب سے اوپر ہے۔ یہ انتصابی سہاروں ا اور ب پر ساکن ہے اور اس کے نقطہ د پر ہٹن اور ع پر ۳ ٹن وزن آویزاں ہیں۔ اس کے چار مائل رکنوں پر کے تعامل اور دباؤ معلوم کر کے (۶ ٹن اور ۲ ٹن ۷۷۵، ۵۷۵، ۱۵۵، ۱۵۵، ۱۵۵، ۱۵۵، ۳۴۳، ۳۴۳ ٹن) موخر الذکر

چار رکنوں میں سے پہلا، تیسرا اور چوتھا فشار بند ہیں اور دوسرا (بند نہیں ہے) ۹ — (ا ب ج د) ایک ذوالربعۃ الاصلع ہے جو چار ہلکی سلاخوں کو ڈھیلے طور پر جوڑنے سے بنایا گیا ہے اور جس کو سلاخ ب د سے صلب کیا گیا ہے۔ ا اور ج پر ۱۰ ٹن وزن کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ اگر یہ معلوم ہو کہ ا ب = ۲ فٹ، ب ج = ۳ فٹ، ج د = ۴ فٹ، د ا = ۵ فٹ اور د ب = ۵ فٹ تو سلاخوں کے تناؤ اور دباؤ معلوم کرو۔

(ا ب، ب ج، ج د اور د ا کے تناؤ ۳۲۱، ۳۲۱، ۳۶۷، ۳۶۷ اور ۲۵۵ پونڈ وزن ہیں، ب د کا دباؤ ۳۶۷ پونڈ وزن ہے)

۱۰ — دو یکساں مساوی سلاخیں ب د پر آزادانہ جوڑی گئی ہیں اور ایک کھونٹی یہاں طرح لنگ رہی ہیں کہ (کھونٹی پر ہے اور سلاخیں ا ب اور ب ج ایک سکیف رسی کے ذریعہ جو ج اور کھونٹی ا پر بندھی ہے ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتی ہیں) اگر ہر ایک سلاخ کا وزن د معلوم ہو تو ترسی طریق پر بتاؤ کہ رسی کا تناؤ (۷۶) وہوگا اور جوڑ ب پر کا دباؤ ۱۱ کے مساوی ہوگا۔

(۱۱۸) ۱۱ — (ب ج) ایک ایسا افقی خط ہے کہ ا ب = ۵ فٹ اور ب ج = ۱۵ فٹ، ب کے انتصاباً اوپر د ایک ایسا نقطہ ہے کہ ب د = ۱۰ فٹ اور ع، د ج کی تنصیف کرتا ہے۔ ا ج، ج د، د ا، ب د، ب ع سلاخیں ہیں جو ایک قالب بناتی ہیں۔

۱۰ ہندرویت کے اوزان نقاط د اور ع پر لگائے گئے ہیں اور قالب کو ل اور ج پر سہارا گیا ہے۔ مشکافی شکل کھینچو اور قالب کے تمام رکنوں میں دباؤ دریافت کرو۔
 ۱۲۔ ایک قالب کو جو پانچ سلاخوں ا ب، ب ج، ج د، د ا کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے بنایا گیا ہے انتصابی سطح مستوی میں رکھا گیا ہے۔ ل ب ج ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس کا ضلع ل ب افقی ہے اور ل ج انتصابی ہے اور ا ب = ل ج = ۱۰ فٹ، زاویہ ب ل د ۳۵° کے مساوی ہے اور ل ج د ۲۰° کے مساوی ہے۔ قالب کا ایک نقطہ د اٹن کے انتصابی وزن کو سہارے ہوئے ہے اور ل اور ب پر عمل کرنے والی انتصابی قوتوں کے ذریعے متبادل کو قائم رکھا گیا ہے۔ ان قوتوں کی مقدار اور قالب کی مختلف سلاخوں کے تعامل معلوم کرو۔

(۳۵، ۳۴، ۳۳، ۳۲، ۳۱، ۳۰ اور ۲۹ پونڈ وزن)

۳۱۔ ایک وارن گرڈ، مساوی الاضلاع مثلثوں سے بنا ہوا ہے، اس کے نیچے کے حصہ میں پانچ جوڑ ہیں اور اوپر کے حصہ میں چار بھلی لمبی سلاخ کے سرے دوہم ارتفاع ستونوں پر قائم ہیں۔ نیچے کے ہر ایک جوڑ پر تین ٹن کا وزن پڑا ہے اور اوپر کے حصہ میں بائیں طرف سے دوسرے جوڑ پر ۵ ٹن کا وزن پڑا ہے ترسیمی طریق سے ستونوں پر کے تعامل اور قالب کے ان چار رکنوں پر کے دباؤ معلوم کرو جو قالب کے بائیں جانب کوائل ہیں۔

(۶۲۵، ۶۱۵، ۶۰۵، ۵۹۵، ۵۸۵، ۵۷۵، ۵۶۵، ۵۵۵ پونڈ وزن)

۳۲۔ ایک وارن گرڈ کے چھ سروں کا درمیانی فاصلہ ۴۸ فٹ ہے اس کی بھلی لمبی سلاخ چار حصوں میں منقسم ہے اور اکل رکنوں کا طول ۱۲ فٹ ہے۔ اس پر مساوی طور پر تقسیم کیا ہوا ۲ ٹن فی فٹ کے حساب سے وزن لٹکا رہا ہے اور مرکز پر ۵۰ ٹن کا وزن یکجا لٹکا رہا ہے۔ رکنوں پر دباؤ کی مقدار درست معلوم کرو۔

(ہر ایک حصہ پر عمل کرنے والے وزن کی بجائے حصہ مذکور کے کناروں پر عمل کرنے والے دو نصف وزن فرض کرو)

۱۵۔ ایک چھت کی تراش نصف منظم منحن ا ب ج د ع ہے، نقطہ ل اور د اور نیز نقطہ ب اور ع ہندس سلاخوں سے مربوط ہیں۔ سب غہتیروں کو کناروں ل ا ب

ج، د، ع پر آزادانہ جوڑا گیا ہے اور کنارے د اور ع مساوی بلندی پر سہارے ہوئے ہیں چھت یکساں طور پر کھپرل سے ڈھکی ہوئی ہے۔ قالب کے وزن کو چھت کے وزن کے مقابلہ میں نظر انداز کر کے تیسری طریقہ سے یا کسی اور طرح چھت کے مختلف رکٹوں پر کے دباؤں کی مقداریں چھت کے وزن کی رقم میں حاصل کرو۔

شہتیروں (ا، ب، ج، د، ع کو ڈھکنے والی کھپرل کی ہر ترش کا وزن ہر ایک شہتیر کے وسطی نقطہ پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جاسکتا ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ قوتوں کے کسی نظام کے حاصل کا محض عمل نظام مذکور کے سب ریسائیوں کے آخری اضلاع کے تقاطع کا طریق ہوتا ہے۔

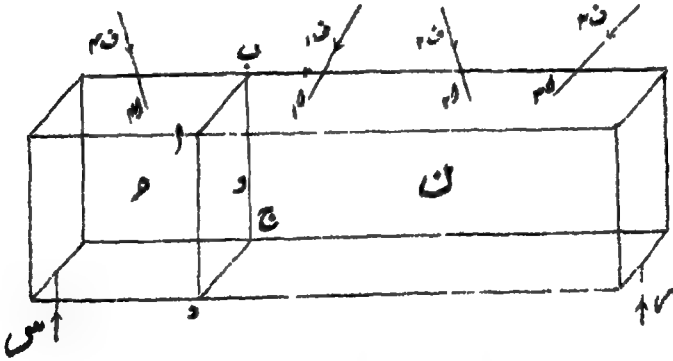


ساتواں باب

جذبی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر

(۱۱۹)

۱۲۶۔ اس باب میں ہم ایک شہتیر کی تراش پر عمل کرنے والے اندرونی تقاطعوں کی چند مثالوں پر غور کریں گے۔



ایک شہتیر پر غور کرو جس کی شکل اوپر دکھائی گئی ہے اس شہتیر کو کناروں پر سہا لگایا ہے اور اس کے نقطوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ پر ترقیوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ عمل کرتی ہیں۔ شہتیر کی کوئی تراش ۱ ب ج د و۔ تراش کے بائیں طرف کے حصہ کو ہ سے اور دائیں طرف کے حصہ کو ن سے موسوم کرو۔ ہر کا جو عمل ن پر ہے وہ ان بیشتر قوتوں پر مشتمل ہے جو شہتیر کی تراش ۱ ب ج د کو عبور کرنے والے ریشے لگاتے ہیں۔

(۲) ایک قوت میں جو اس کے طول پر عمود وار ہوتی ہے۔ اس کو جڑی زور کہتے ہیں۔

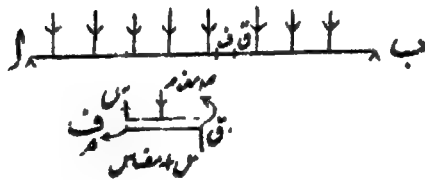
(۳) ایک حاصل جنت اُس خط کے گرد جو اس کے طول پر عمود وار ہو۔ اس کو جھکاؤ کا معیار اثر یا زور کا جھفت کہتے ہیں۔

۱۲۸۔ یہ بات اکثر مشاہدہ میں آتی ہے کہ سیسے کی پنسل جیسے اجسام کو توڑنے کا سبب جھکاؤ کا معیار اثر ہوتا ہے نہ کہ تناؤ کی قوت۔ لیکن دُوری کی صورت میں جھکاؤ کا معیار اثر کوئی وقعت نہیں رکھتا اور یہ صرف تناؤ کی قوت سے ٹوٹتی ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ سلاح کے ٹوٹنے کا میلان زیادہ ہوگا جیسے جھکاؤ کا معیار اثر زیادہ ہو۔ اس لئے ہمیشہ جھکاؤ کے معیار اثر کو سلاح کے ٹوٹنے کے میلان کا ناپ قرار دیا جاتا ہے۔

ترسیمی طور پر بدی زور اور جھکاؤ کا معیار اثر دونوں سلاح کے ہر ایک نقطہ پر معین نکال کر ان میں سے ہر ایک کو ان کے متناسب بنانے سے دکھائے جاسکتے ہیں۔ (۱۲۹)

۱۲۹۔ اگر کسی افقی شہتیر پر انتصابت وزن لا دیا جائے تو ثابت کر دو کہ انتصابتی جڑی زور سے $\frac{\text{فرہ}}{\text{فرلا}}$ کے مساوی ہوگا جہاں ہر نقطہ زیر بحث پر جھکاؤ کا معیار اثر ہے۔



شہتیر کے کنارہ ۱ سے فاصلہ لا پر کے چھوٹے مختصر قی (= مفت لا) پر غور کرو۔ فرض کر دو کہ رخ ف پر اوپر کی طرف کا جڑی زور سے ہے اور رخ قی پر نیچے کی طرف جڑی زور سے + مفت سے ہے۔ نیز فرض کر دو کہ ف پر کا جھکاؤ کا

معیار اثر یہ ہے اور اس لئے ق پر جھکاؤ کا معیار اثر مر + مع مر آ ہوگا۔
 (پچھلی شکل میں ق کو بڑے پیمانہ پر دکھایا گیا ہے)
 فرض کرو کہ ق پر فی اکائی طول وزن لا ہے اس لئے ق کے وزن
 کو لا مع لا کے مساوی فرض کر سکتے ہیں جو اس کے وسطی نقطہ پر عمل کرتا ہے تب
 ق کے لئے ق کے گرد معیار اثر لینے سے

$$م = مر + مع مر - (س + مع س) مع لا - لا مع لا \frac{مع لا}{۲}$$

$$س + مع س = \frac{مع مر}{مع لا} - \frac{۱}{۲} لا مع لا$$

انتہا لینے سے جب مع لا صفر ہو جائے تو کسی طرح محدود وزنوں سے لہی ہوئی صلاح
 کے لئے

$$س = \frac{فر}{فر لا}$$

اس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم جلدی زور کا منحنی کھینچیں اور نیز جھکاؤ کے معیار اثر کا
 منحنی کھینچیں تو پہلے منحنی کا مقبض دوسرے منحنی کی ڈھال کو تعبیر کرے گا۔
 نیز اگر اس عنصر ق پر عمل کرنے والی قوتوں کو انتصاباً تحلیل کریں تو

$$س = س + مع س + لا مع لا$$

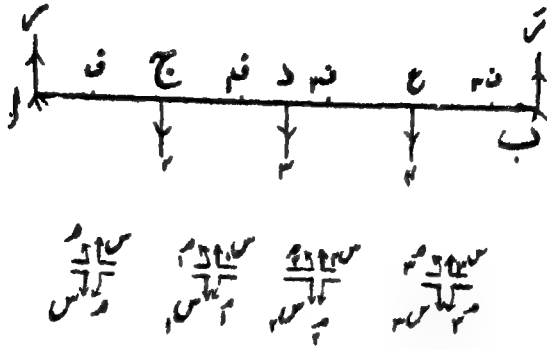
$$\frac{فر س}{فر لا} = - لا ، انتہا میں$$

۱۳۔ مشق ۱۔ ایک شہتیر جس کا وزن نظر انداز ہو سکتا ہے ۱۲ فٹ لمبا ہے۔ شہتیر

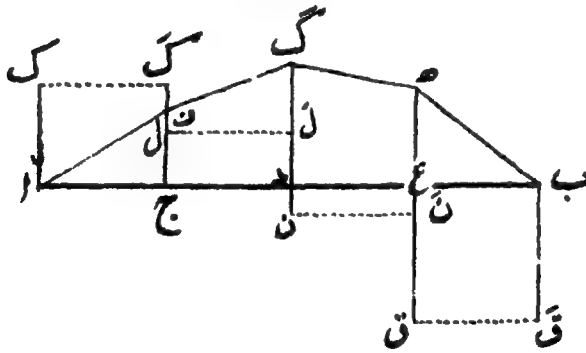
کو اس کے کناروں پر سہارا لگایا ہے اور اس کے ایک سرے سے چوتھائی فاصلہ پر ۲ ٹن
 کا وزن رکھا ہے اس کے وسطی نقطہ پر ۳ ٹن کا وزن اور اس کے دوسرے سرے سے
 چوتھائی فاصلہ پر ۲ ٹن کا وزن رکھا ہے۔ جھکانے والے معیار اثر اور جلدی زور کے منحنی
 پر سے شہتیر کے لئے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ س اور سہاروں کے تعامل ہیں۔ اس لئے ان کے

سروں کے گرد معیار اثر لینے سے ہیں آسانی سے حاصل ہوتا ہے کہ $سا = سم$ اور $سا = ۵ ٹن$



فرض کر کہ ا اور ج کے درمیان کسی نقطہ پر جہکاد کا معیار اثر اور جہتی زور
ہر اور س ہیں جیسے کہ شکل میں دکھائے گئے ہیں اسی طرح ج اور د کے درمیان کسی نقطہ
فم کے لئے یہ بالترتیب ہر اور س ہیں اور علیٰ ہذا القیاس -



فرض کر کہ ا ف = لا، ا ف م = لا، اور ا ف م = لا، ا ف م = لا
ن ہر کے جہکاد کے معیار اثر کو ف کے بائیں طرف کے حصہ کی قوتوں کے معیار اثروں کے مساوی
فرض کرنے سے

اور انتصابی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$\left\{ \begin{array}{l} ۵ = لا = لا = ۵ \\ ۴ = س = س = ۴ \end{array} \right. \dots (۱)$$

(۱۲۴)

ج اور ب کے درمیان کسی نقطہ ف کے لئے جہاں $اف = لا$ اسی طرح سے حاصل ہو سکتا ہے

$$مر = لا - و لا \times \frac{۱}{۳} - لا - \frac{۲۲}{۳} (لا - \frac{۱}{۳})$$

$$= - \frac{۲}{۳} (لا - \frac{۱}{۳} - \frac{۱۱}{۳} - \frac{۲}{۳}) \dots (۳)$$

$$اور مر - س = و لا + \frac{۲۲}{۳}$$

$$اس لئے س = - \frac{۲}{۳} (لا - \frac{۱}{۳}) \dots (۴)$$

کسی مناسب طول کے انقباضی خط کو جھکاؤ کے معیار اثر کی اکائی فرض کرو تو مساوات (۱) ایک مکافی کے قوس آگ کو تعمیر کرتی ہے جس کا رأس نقطہ ل پر ہے جو ب سے انقباضا اور پر ہے اور مساوات (۳) مساوی مکافی کے قوس ک ب ہے جس کا رأس ل پر ہے۔ انقباضی خط $لا = \frac{۱۱}{۳}$ پر ہے، یعنی ہل پر ہے۔

اسی طرح کوئی مناسب طول کے انقباضی خط کو جہزی زور کی اکائی مانو۔ تب (۲) خط مستقیم د ع کو اور (۴) خط مستقیم ف ہ گ کو تعمیر کریگا۔ حسب ذیل گزشتہ کسی نقطہ پر جہزی اسخنی کا معین متناظر نقطہ پر جھکاؤ کے معیار اور کے اسخنی کے ڈھال کے مساوی ہوتا ہے ہر دو اسخنی ج میں سے گزرنے والے معین پر عدم تسلسل رکھتے ہیں۔ بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اور

$$لا = \frac{۱۱}{۳} ، سے حاصل ہوتا ہے$$

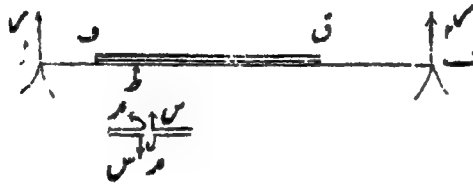
$$اور تب یہ مساوی ہوتا ہے و $\times \frac{۱۱}{۳}$ کے -$$

ان تمام صورتوں میں جبکہ شہتیر یکساں طور پر لدا ہوا ہو اور مختلف نقطہ پر سہارا ہوا ہو ہم دیکھیں گے کہ جھکاؤ کے معیار افراد کے اسخنی مکافوں کے حصے ہوتے ہیں

جن کا وتر خاص ایک ہی ہوتا ہے۔

مشق ۳۔ ایب اسی شہتیر لب کا طول ۲ ل ہے اور اس کا وزن نظر انداز ہو سکتا ہے۔ شہتیر دونوں سروں پر سہارا ہوا ہے اور اسپر کیساں کثافت کی متحرک گاڑی ف ق گزر رہی ہے گاڑی کا طول ۲ ل (۱ > ۲ ل) ہے۔

شہتیر کے کسی نقطہ پر بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ اس وقت واقع ہوتا ہے جب نقطہ ط گاڑی کے طول کو اسی نسبت سے تقسیم کرتا ہے جس میں یہ لب کو تقسیم کرتا ہے۔



فرض کرو کہ سہا اور سہا سہاروں پر کے تعامل میں اور لب = لا اور لب

$$\frac{P}{L} = \frac{P}{L} (1 - \frac{L}{L})$$

$$\text{اور سہا} = \frac{P}{L} (1 + \frac{L}{L})$$

فرض کرو کہ لا = لا ، اور ط پر جھکاؤ کا معیار اثر مر ہے۔ حصہ (ط کے لئے معیار اثر لینے سے

$$مر = سہا - لا = \frac{P}{L} (1 - \frac{L}{L})$$

$$\frac{P}{L} (1 - \frac{L}{L}) - لا = \frac{P}{L} (1 - \frac{L}{L}) \dots (۱)$$

نقطہ ط کے ایک معطر محل کے لئے مر بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ $\frac{مر}{لا} =$

(۱۲۵)

$$\text{یعنی جب } -\frac{1}{l} + (1 - \lambda) = 0$$

$$\text{یعنی جب } \lambda = 1 - \left(\frac{1}{l}\right) \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{اور تب } \frac{F}{P} = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{l}}$$

لا کی جو قیمت (۲) سے حاصل ہوتی ہے اسے (۱) میں مندرج کرنے سے

$$\text{ھر کی بڑی سے بڑی قیمت} = \frac{1}{l} \left(1 - \frac{1}{l}\right) (1 - \lambda)$$

پس بڑے سے بڑے جھکاؤ کے سیالاز کا منحنی مکانی ہوتا ہے جس کا اس (۱) کے وسطی نقطہ کے انتصاباً اور ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ط پر کا جزئی زور س ہے۔ حصہ لٹ کے لئے انتصاباً تحلیل کرنے سے

$$S = 1 - \lambda = \left(1 - \frac{1}{l}\right) \left(1 - \frac{1}{l}\right) = \left(1 - \frac{1}{l}\right)^2$$

نقطہ کے کسی معلوم محل کے لئے یہ صریحاً بڑھتا ہے جیسے لا بڑھتا ہے اور بڑے سے بڑا اس وقت ہوتا ہے جب ف نقطہ ط پر منطبق ہو اور اس وقت س کی بڑی سے بڑی قیمت

$$= \left(1 - \frac{1}{l}\right)^2$$

پس بڑے سے بڑے جزئی زور کا منحنی خط مستقیم ہے۔

مشق ۴۔ ایک صلب انحنی سلاح ایک کنارہ ۱ پر اور کسی دوسرے نقطہ ج پر پہاڑی لگتی ہے۔ اگر اس پر یکساں طور پر تقسیم کیا ہوا بڑے سے بڑا وزن اس طرح رکھا جائے کہ یہ نہ ٹوٹے تو ثابت کرو کہ ج سلاح کو نسبت ۱:۱+۲ میں تقسیم کرے گا۔

فرض کرو کہ ۱ = ب، ۲ = ل، ج = ۱، نیز فرض کرو کہ ل اور ج پر کے تقابل

$$\text{ساہ اور ساہ ہیں، پس اگر ل کی طول پر وزن و ہو تو ساہ} = \frac{1}{l} (1 - \lambda)$$

$$\text{اور } \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

اگر $\lambda > \lambda_1$ تو کسی ایسی ترازش کے لئے جس کا فاصلہ اسے لاہو جھکاؤ کا معیار اثر

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}$$

اور اس لئے یہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ $\lambda = \lambda_1$ ۔

اس لئے λ_1 کے لئے بڑے سے بڑے جھکاؤ کا معیار اثر

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_2} \quad (1)$$

یہ حصہ جب سے لئے بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر صریحاً λ_1 پر ہوتا ہے اور

$$= \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \quad (2)$$

اگر (۱) اور (۲) مساوی نہ ہوں تو ہم بڑے کو کم کر سکتے ہیں اور اس لئے λ_1 کو بدلنے سے ڈھنچے کے بڑے سے بڑے میلان کو کم کر سکتے ہیں۔

اگر وہ مساوی ہوں تو بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر حسب خواہش چھوٹا ہو سکتا ہے بشرطیکہ

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_2} \quad (3)$$

$$\text{اور تب } \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{یعنی } \lambda_1 = \lambda$$

$$\text{اس صورت میں } \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

(۳) کے باقی طوں سے نامکن نتائج حاصل ہوتے ہیں کیونکہ λ_1 کو صریحاً مثبت ہونا چاہیئے اور نیز λ سے بڑا اور λ_2 سے چھوٹا ہونا چاہیئے۔

مثالیں

۱۔ ایک سلاخ Δ ب اپنے کناروں پر اس طرح سہاری ہوئی ہے کہ یہ متوازی الافق ہے۔ جڑی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے معنی کھینچو

(۱) جبکہ سلاخ یکساں طور پر لدی ہوئی ہو۔ تاؤ کو F پر کا جھکاؤ کا معیار اثر ایسے بنتا ہے جیسے $\Delta F = F \Delta$ جبکہ اس کے اپنے وزن کو نظر انداز کر دیا جائے لیکن اس کے وسطی نقطہ پر ایک وزن دے۔

۲۔ ایک سلاخ Δ ب ایک نقطہ Δ پر اس طرح ثابت ہے کہ وہاں یہ افق کے متوازی ہے۔ جڑی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے معنی کھینچو

(۱) جبکہ یہ یکساں طور پر لدی ہوئی ہو
(۲) جبکہ اس کے وزن کو نظر انداز کیا جائے لیکن اس کے وسطی نقطہ پر ایک

وزن د ہو

۳۔ ایک شہتیر Δ فٹ لمبا اپنے وسطی نقطہ کے سہارے پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کے ایک سرے پر ۵۰ ٹن وزن لٹک رہا ہے اور دوسرے سرے پر ایک رسی کے ذریعہ زمین کے ساتھ بند رہا ہے اس کے جڑی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے معنی کھینچو۔

۴۔ ایک شہتیر ۲۵ فٹ لمبا ہر ایک طرف ایک سرے پر اور دوسری طرف دوسرے سرے سے ۵ فٹ کے فاصلہ پر سہارا ہوا ہے اس کے طول پر ۵۰۰ پونڈ فی فٹ کا یکساں وزن لدا ہوا ہے اور سہارے سے بڑھے ہوئے سرے پر (۱۰۰۰) پونڈ کا وزن لٹک رہا ہے یہاں پر کے دباؤ معلوم کرو، نیز بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر اور اس معیار اثر کی تراخ کا محل معلوم کرو۔

جھکاؤ کے معیار اثر اور جڑی زور کے معنی بھی کھینچو۔

[دباؤ ۵۱۸ ۴۱۵ پونڈ وزن اور ۲۰۳۱۲ پونڈ وزن میں جھکاؤ کا بڑے سے بڑا معیار اثر سہارے کے دوسرے نقطہ پر ہے]

۵ — ایک شہتیر ۱ ب ۱۰ ٹ لمبا ہے اور یہ دو ایسے نقطوں پر سہارا ہوا ہے جن کے فاصلے ۱ سے ۲ اور ۷ فٹ ہیں ۱ اور ۲ ب برابر بالترتیب ۱ اور ۲ ٹن کے وزن بندے ہیں اور علاوہ ازیں سہاروں کے درمیانی طول پر ۲ ٹن فی فٹ کا یکساں وزن لدا ہوا ہے۔ جھکاؤ کے معیار اثر اور جڑی زور کے نقشے کھینچو اور ترسیبی طریق پر یا کسی اور طرح سے معلوم کرو کہ جھکاؤ کا معیار اثر کہاں صفر ہے۔

۶ — ایک بیرم ۱ ب کے سرے ۱ کو رسی کے ذریعہ زمین کے ساتھ بازو دیا گیا ہے اور اسے وسطی نقطے ج پر سہارا گیا ہے جو ۱ کی ہمواری پر واقع ہے۔ جھکاؤ کے معیار اثر اور جڑی زور کے منحنی کھینچو

(۱) جبکہ ۱۰ ٹن کا وزن ۱ ب پر لٹکایا جائے اور ۵ ٹن کا وزن ۱ ج کے وسطی نقطہ پر لٹکایا جائے۔

(۲) جب ۱۰ ٹن کا وزن ۱ ب پر لٹکایا جائے اور ۵ ٹن کا تقسیم شدہ وزن لٹکایا جائے۔

دونوں صورتوں میں شہتیر کے وزن کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

۷ — ۱ ب ایک افقی شہتیر ہے جس کا طول ۱۸ فٹ ہے اور جو اپنے سروں ۱ اور ۲ ب پر سہارا ہوا ہے۔ اس پر دو نقطے ج اور د ایسے ہیں کہ $۱ ج = ۶$ فٹ اور $۱ د = ۱۰$ فٹ ج اور د پر دو وزن ۴ اور ۵ ٹن کے رکھے ہیں اور اس پر ۱ سے ج تک ۱ ٹن فی فٹ کے حساب سے ۱ ج سے د تک ۵ ٹن فی فٹ کے حساب سے اور د سے ب تک ۲ ٹن فی فٹ کے حساب سے یکساں وزن لدا ہے ہوئے ہیں شہتیر کے مختلف حصوں کے لئے جڑی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو۔

۸ — ایک برقی ٹرام کا کھمبا انتصاباً لگا ہوا ہے اور اس کے اوپر کے سرے پر ایک بازو باہر کو نکلا ہوا ہے۔ جو کھمبے کے مرکزی خط سے ۱۰ فٹ کے فاصلہ پر تاروں کو سہارا ہوئے ہے۔ ہر ایک کھمبا ۲۰۰ پونڈ تار کو سنبھالے ہوئے ہے اور باہر نکلے ہوئے بازو کا وزن ۲۰۰ پونڈ ہے۔ یہ فرض کر کے کہ بازو کا وزن اس کے تمام طول پر یکساں طور پر منقسم ہے بازو کے طول پر جڑی زور اور جھکاؤ کے منحنی کھینچو اور کھمبے کے چمکے پر جھکاؤ کا معیار اثر محسوب کرو۔

۹۔ ایک افقی شہتیر ۲۵ فٹ لمبا ہے، ایک طرف ایک سرے ل پر اور دوسری طرف ایک نقطہ ج پر جو دوسرے سرے ب سے ۵ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہے سہارا ہوا ہے۔ وزن کی شدت ب سے ل تک بتدریج $\frac{1}{2}$ ٹن فی فٹ سے $\frac{1}{4}$ ٹن فی فٹ تک بڑھتی ہے۔ شہتیر میں بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر اور جزی زور معلوم کر دینا چھکاؤ کے معیار اثر اور جزی زور کے معنی کھینچو۔

۱۰۔ اب ایک سخت یکساں شہتیر ہے جس کا وزن د اور طول ۲ ل ہے۔ اسے دونوں سروں پر اس طرح سہارا گیا ہے کہ یاق کے متوازی ہے۔ ایک شخص جس کا وزن $\frac{1}{2}$ ہے شہتیر کے ایک ایسے نقطہ پر کھڑا ہے کہ $\frac{1}{2}$ ل = (۱) ثابت کر کے جھکاؤ کے معیار اثر کا معنی دو ایسے مکانیوں کی دو قوسوں پر منتقل ہے جن کے وتر خاص مساوی ہیں اور جھکاؤ کا معیار اثر اُس نقطہ پر بڑے سے بڑا ہوتا ہے جس کا فاصلہ ل سے ل - $\frac{3}{4}$ ہے۔

۱۱۔ ایک شہتیر کے سروں کے درمیان ۸۰ فٹ کا فاصلہ ہے اور اس کا وزن فی فٹ طول ایک ٹن ہے۔ شہتیر کے اوپر دس فٹ لمبا متحرک بوجھ ہے جس کا وزن $\frac{1}{2}$ ٹن فی فٹ طول ہے۔ تقریبی بیان پر بڑے سے بڑے مثبت اور منفی جزی زور کا معنی کھینچو جبکہ متحرک بوجھ ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے۔

۱۲۔ ایک ریل گاڑی جو $\frac{1}{2}$ ٹن فی فٹ طول کے متحرک بوجھ کے مساوی ہے ایک ایسے گاڑ پر سے گزرتی ہے جس کے سروں کا درمیانی فاصلہ ۱۲۰ فٹ ہے شہتیر کے ہر نقطہ کے لئے بڑے سے بڑے جزی زور اور بڑے سے بڑے جھکاؤ کے معیار اثر کے معنی کھینچو جبکہ (۱) متحرک بوجھ ۱۲۰ فٹ سے زیادہ طول رکھتا ہو نیز جبکہ (۲) اس کا طول ۹۰ فٹ ہو۔

۱۳۔ ۱۰ ٹن اور ۵ ٹن کے دو متحرک بوجھ ایک دوسرے سے $\frac{1}{2}$ فٹ کے فاصلہ پر ۵ فٹ لمبے گاڑ کو اس طرح عبور کرتے ہیں کہ بڑا وزن آگے چلتا ہے۔ تمام گاڑ کے لئے بڑے سے بڑے جھکاؤ کے معیار اثر اور جزی زور کے معنی کھینچو۔

۱۴۔ ایک مسلسل بوجھ جس کا وزن ۱ ٹن فی فٹ طول ہے ایک ہوا ریل پر کھینچا گیا

پہلے پل و فٹ طول کے ایک واحد استوار گاڈر پر مشتمل ہے۔ بوجھ استوار نہیں ہے اور پل سے زیادہ لمبا ہے۔ پل کے اپنے وزن کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔ گاڈر پر ایک نقطہ ن ایسا ہے جو نزدیک کے سرے سے ک فٹ کے فاصلہ پر ہے، ثابت کر دو کہ ن پر بڑے سے بڑا جزی جزو $\frac{W}{2} (1 - \frac{N}{L})$ اٹھتا ہے اور دکھاؤ کہ جب متحرک بوجھ کسی مقام

پر ہو اور اس کے ایک سرے سے ایک خط انتصابی وس کھینچا جائے جو ن پر کے جزی جزو کے متناسب ہو تو وس سے جو سختی مرتسم ہوتا ہے وہ چار مکافاتی کی قوسوں اور ایک خط مستقیم پر مشتمل ہوتا ہے۔

۱۵۔ ایک یکساں گاڈر اپنے سروں کے سہارے ساکن ہے اور وزن اس کے وسطی نقطہ پر مرکوز ہے۔ ثابت کر دو کہ بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر اس صورت کی نسبت جب کہ وزن یکساں طور پر تقسیم شدہ ہو دو چند بڑا ہوگا۔

۱۶۔ ایک پتلی یکساں سلاخ کے نچلے سرے کو ایک چکنبے قبضہ کے ساتھ دھل کر دیا گیا ہے اور اس کا اوپر کا سراپ ایک چکنبی انتصابی سطح مستوی پر ساکن ہے۔ ثابت کر دو کہ کسی نقطہ ن پر ٹوٹنے کا میلان ایسے بدلنا ہے جیسے L اور ب سے ن کے فاصلوں کا حاصل ضرب۔

۱۷۔ ایک تختہ جس کا وزن N و اور طول L ہے متوازی الافقی محل میں اپنے سروں پر ساکن ہے۔ ایک آدمی جس کا وزن W ہے اس کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک اس طرح چل سکتا ہے کہ تختہ ڈھلنے کے عین قریب ہوتا ہے۔ اگر تختہ کے ایک سرے کو ثابت کر دیا جائے اور دوسرا سر آزادانہ حرکت کر سکے تو ثابت کر دو کہ اب آدمی صرف $\frac{L}{2} (1 - \frac{N}{W})$ فاصلہ تک چل سکتا ہے۔

۱۸۔ سیدھی بے وزن دھل کی ہوئی سلاخوں کے ذریعہ ایک محراب اس طرح بنانا مقصود ہے کہ اس کے کناروں کا درمیانی فاصلہ 1 اور ارتفاع h ہو اور اس میں $\frac{1}{2}$ کے باہمی افقی فاصلوں پر سات مساوی اوزان و بندھے ہوں اور سلاخوں کے کسی نقطہ پر کوئی جھکاؤ کا معیار اثر نہ ہو۔ بتاؤ کہ تریسیمی محل سے سلاخ کی شکل کس طرح متعین ہو سکتی ہے اور ثابت کر دو کہ سروں کو ساکن رکھنے کے لئے جو افقی قوتیں لگانی

پڑتی ہیں وہ $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہیں۔

۱۹۔ ایک یکساں سلاخ کا طول ۱ اور وزن دس ہے۔ اس کے سروں کے ساتھ مساوی طول ب کی رسیاں بندھی ہیں جن کے دوسرے سرے دو ایسے ثابت نقطوں کے ساتھ بندھے ہیں جن میں سے ایک دوسرے سے انتصافاً و فاصلہ اوستا ہے۔ اگر سلاخ کو یکساں زیادتی رفتار سے کے ساتھ انتصابی خط کے گرد گھمایا جائے تو

ثابت کر دو کہ کسی سرے سے فاصلہ ۱ پر جھکاؤ کا معیار اثر $\frac{1}{2}(1-1)$ اسے ہوگا جہاں

۲۰۔ ہر ایک رسی کا میلان ہے افق کے ساتھ۔ نیز بتاؤ کہ رسیوں کے تناؤ مساوی ہیں اور ب سا جم $\frac{1}{2}$ = ج

۲۰۔ ایک ہلکی افقی سلاخ جس کا طول ۱ ہے اپنے سروں پر ساکن ہے۔ سلاخ کو اس طرح درتی بنایا گیا ہے کہ کسی نقطہ پر ڈھلنے کا میلان نقطہ مذکور پر فی اکائی طول وزن کے تناسب ہے۔ ثابت کر دو کہ کسی نقطہ پر کا وزن ایسے بدلتا ہے جیسے جب $\frac{1}{2}$ جہاں لا اس نقطہ کا سلاخ کے ایک سرے سے فاصلہ ہے۔

(اگر ایک سرے پر کا تعال ہو اور اس نقطہ پر جس کا فاصلہ سلاخ کے ایک سرے سے لا ہوئی اکائی طول وزن ۱ ہو اور اس نقطہ پر جس کا فاصلہ اسی سرے سے لا ہے جھکاؤ کا معیار اثر ۱ ہو تو متوازن سوال کی رو سے

$$L \times W = L \times W \quad (1-1) \text{ و } \frac{1}{2} \text{ فرلا}$$

اس لئے لا کے لحاظ سے دو دفعہ تفریق کرنے سے

$$L \times \frac{1}{2} = W \times \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad (1-1) \text{ جہاں } L \text{ اور } W \text{ مستقل ہیں۔}$$

نیز چونکہ ہر ایک سرے پر جھکاؤ کا معیار اثر صفر ہوتا ہے اس لئے $\frac{1}{2}$ صفر ہونا چاہیے جب کہ $1 = 1$ یا

$$\text{اس لئے } 1 = 1 \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۲۱۔ ایک تار جس کا وزن W ہے نصف دائرہ کی شکل کا ہے جس کا نصف قطر r ہے تار ایک انتصابی سطح مستوی میں ایک سرے پر اس طرح لٹک رہا ہے کہ یہ آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ کسی نقطہ پر جھکاؤ کا معیار اثر معلوم کرو۔

[دفعہ ۴۶۱ میں یہ دکھایا جائے گا کہ تار کا مرکز ثقل S مرکز سے $\frac{r}{2}$ فاصلہ پر ہوتا ہے، نیز قاعدہ کے لئے ضروری ہے کہ S سہارے کے مقام A کے عین نیچے ہو۔ اس لئے A میں سے گزرنے والا قطر خط انتصابی کے ساتھ ایک زاویہ θ ایسا بنائے گا کہ $\cos \theta = \frac{r}{2}$

اگر تار کوئی نقطہ N ایسا ہو کہ N خط انتصابی کے ساتھ زاویہ θ بنائے تو N پر جھکاؤ کا معیار اثر $= N$ کی ایک طرف کی سب بیرونی قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ

$$= \frac{W}{2} \int_0^{\theta} r \cos \theta \, d\theta \quad (2 \text{ جب } \theta = 0 \text{ سے } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ تک})$$

$$= \frac{W}{2} \left[\frac{r \sin \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{W}{2} \left[\frac{r}{2} \right] = \frac{Wr}{4}$$

۲۲۔ ایک تہائی تین مساوی سخت یکساں سلاخوں پر مشتمل ہے تینوں سلاخوں کے ایک ایک سرے کو ایک جگہ آزادانہ وصل کر دیا گیا ہے۔ اس مقام وصل سے کیتلی لٹک رہی ہے۔ باقی سرے زمین پر ٹکے ہوئے ہیں اور انھیں پھسلنے سے روکنے کے لئے ایک چکنا مسٹریر حلقہ ان کے گرد زمین پر قائم ہے۔ ثابت کرو کہ ایک سلاخ کے جھکاؤ کا معیار اثر اس کے وسطی نقطہ پر بڑے سے بڑا ہوگا اور یہ سلاخ کے طول اور کیتلی کے وزن پر منحصر نہیں ہوگا۔

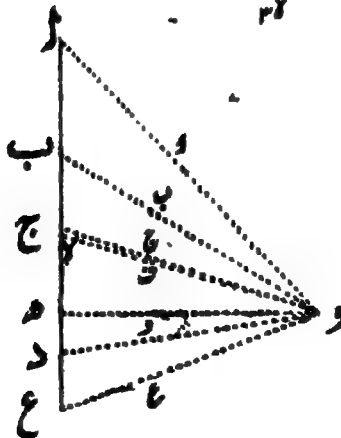
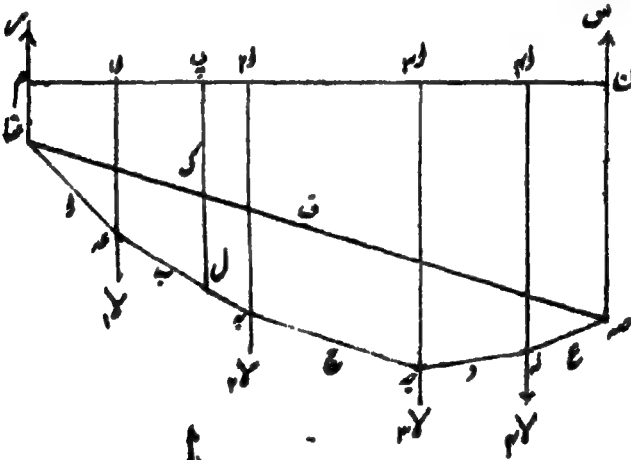
۲۳۔ 2 لمبوں کی ایک یکساں سلاخ دو کھونٹیوں پر جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ $2a$ ہے قشاکڑا پڑی ہے۔ اگر $l > 2a$ ج تو ثابت کرو کہ سلاخ کے ٹوٹنے کا بڑے سے بڑا میلان کھونٹی پر ہوگا اگر $l < 2a$ ج تو وہ سلاخ کے وسطی نقطہ پر ہوگا اگر $l > 2a$ ج لیکن اگر $l < 2a$ ج تو ٹوٹنے کا میلان بڑے سے بڑا کھونٹی پر ہوگا۔ اگر $l = 2a$ ج تو بتاؤ کہ کیا

واقع ہوگا ؟

(اگرل) $2 > 3$ تو ایک کھونٹی پر اور مرکز پر جھکاؤ کے معیار اثر مختلف العلامت ہوتے ہیں اور ان کی صرف مطلق قیمتوں کا مقابلہ کرنا چاہیئے

۲۴۔ ایک سلاح جس کا طول ۲ ل ہے یکساں طور پر لدی ہوئی ہے اور وزن کی شدت سلاح کے وسطی نصف حصہ پر سروں پر کے چوتھائی حصوں پر کی شدت کا دو چند ہے اسے مرکز سے متساوی الفضل دو ایسی کھونٹیوں پر سہارا مقصود ہے کہ سلاح کا جھکاؤ کا معیار اثر کم از کم ہو۔ ثابت کرو کہ ہر ایک کھونٹی مرکز سے $\frac{1}{4}$ فاصلہ پر ہونی چاہیئے۔

۳۱۔ ایک شہتیر جو اپنے دو نوں سروں پر سہارا ہوا ہے بہت سے مجتمع وزنوں سے لدا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ وزنوں کا اسیمائی کثیر الامتلاء شہتیر کے جھکاؤں کے معیار اثروں کا نقشہ ہے۔



= پس × ف ن - ل × ف و - ل × ف و - ل × ف و

$$= \frac{\text{ن} \times \text{ن}}{\text{م} \times \text{ن}} \times \text{پس} \times \text{ل} - \frac{\text{ف} \times \text{و}}{\text{م} \times \text{و}} \times \text{ل} \times \text{و} - \frac{\text{ف} \times \text{و}}{\text{م} \times \text{و}} \times \text{ل} \times \text{و} - \frac{\text{ف} \times \text{و}}{\text{م} \times \text{و}} \times \text{ل} \times \text{و}$$

پس ف پر کا جھکاؤ کا معیار اثر

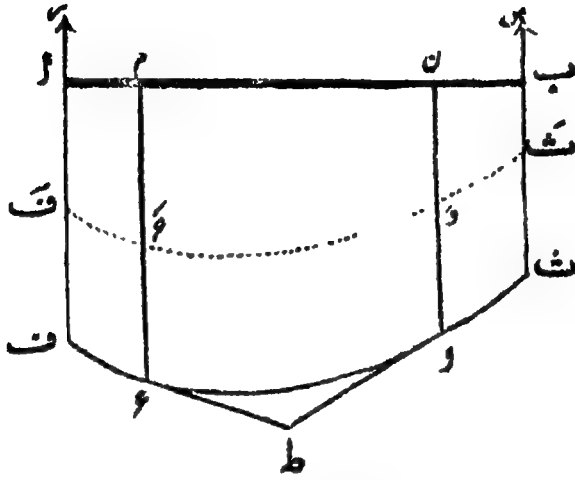
$$= \frac{\text{ف} \times \text{ن}}{\text{م} \times \text{ن}} \times \text{م} \times \text{ب} - \frac{\text{ف} \times \text{و}}{\text{م} \times \text{و}} \times \text{ب} \times \text{ب} - \frac{\text{ف} \times \text{و}}{\text{م} \times \text{و}} \times \text{ب} \times \text{ب}$$

- ف لا - لا - د - د - د
= ف ۶

اسی طرح سے شہتیر کے کسی اور نقطہ کے لئے۔

۳۳- دفعہ ۱۳ سے یہ ظاہر ہے کہ وزنوں ل، ل، ل، ل کا حاصل معادل ہے ع کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ب معہ صدر کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ع کے، یعنی وزنوں ل، ل، ل، ل کا حاصل ریشمانی کثیر الاضلاع کے اضلاع ب اور ع کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔ اسی طرح سے اضلاع کے کسی اور زوج کے لئے۔

پس ریشمانی کثیر الاضلاع کے کسی دو اضلاع ب اور ع کے نقطہ تقاطع میں سے اُن وزنوں کا حاصل گزرتا ہے جو ب اور ع کے درمیان واقع ہیں۔ اب فرض کرو کہ شہتیر کو مسلسل طور پر لاد اگیا ہے اس لئے ریشمانی کثیر الاضلاع مسلسل منحنی ہوگا اور اس کے نقاط ع، د پر کے دو محاسن اضلاع ب اور ع ہوں گے۔



تب م ن پر کے سب وزنوں کا حاصل ط میں سے گزرتا ہے

وزنوں کا منحنی ف ع و ث کہیں

م ن کے حاصل وزن کام سے افقی فاصلہ

$$\frac{م ل + و ل + ل ل + \dots}{م + و + ل + \dots} = \frac{ک م فر ل \times ل}{ک م فر ل}$$

= وزنوں کے منحنی کے مرکز ثقل کا م سے فاصلہ ۱ جیسا کہ دفعہ ۱۴۵ سے ظاہر ہو گا۔

اس لئے ط میں سے گزرنے والا انتصابی خط وزنوں کے منحنی کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے یعنی جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کے کوئی دو ماس ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتے ہیں جو وزنوں کے مرکز ثقل کے انتصابی بیچ واقع ہوتا ہے۔

آکھواں باب مرکز ثقل

۱۳۴۔ مادہ کا ہر ایک ذرہ زمین کے مرکز کی طرف کھینچتا ہے اور وہ قوت جس سے زمین کسی ذرہ کو اپنی طرف کھینچتی ہے ذرہ کی کثیت کے متناسب ہوتی ہے۔ ہر ایک جسم کو ذرات کا ایک مجموعہ خیال کیا جاسکتا ہے۔ اگر جسم زمین کے مقابلہ میں چھوٹا ہو تو اس کے اجزاء کو زمین کے مرکز کے ساتھ ملائے والے خطوط تقریباً متوازی ہونگے، باب ہذا میں ہم ان کو عین متوازی تصور کریں گے۔ پس ایک استوار جسم کے ہر ایک ذرہ پر ایک قوت انتصاباً نیچے کی طرف عمل کرتی ہے جس کو اس کا وزن کہتے ہیں۔ یہ سب قوتیں متوازی قوتوں کو ترکیب دینے کے طریقے سے جو دفعہ ۳۳ میں بیان کیا گیا ہے ترکیب یا کرا ایک واحد قوت میں تحویل ہو جاتی ہیں جو بلحاظ مقدار کے سب انفرادی قوتوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے اور جسم کے ایک خاص نقطہ پر عمل کرتی ہے۔ اس نقطہ کو جسم کا مرکز ثقل کہتے ہیں۔

مرکز ثقل۔ تعریف۔ کسی جسم کا یا ذروں کے کسی ایسے نظام کا جو باہم استوار طور پر مربوط ہوں مرکز ثقل وہ نقطہ ہوتا ہے جس میں سے جسم کے وزن کا خط عمل ہمیشہ گزرتا ہے۔

۱۳۵۔ چونکہ متوازی قوتوں کے حامل کا خط عمل معلوم کرنے کا عمل صرف قوتوں کے نقاط عمل اور مقداروں پر موقوف ہوتا ہے اور قوتوں کی سمت پر موقوف نہیں

ہونا اس لئے مرکز ثقل کا نقطہ وہی رہتا ہے خواہ ہم جسم کو کسی زاویہ میں سے گھا دیں کیونکہ سو غرض الذکر صورت میں بھی جسم کے حصوں کے وزن متوازی ہونگے۔ اگرچہ ان کی سمت جسم کے بلحاظ دونوں صورتوں میں ایک ہی نہیں ہوگی۔ اس سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ جسم کا صرف ایک ہی مرکز ثقل ہو سکتا ہے کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ اس کے دو مرکز ثقل S_1 اور S_2 ہیں، اب جسم کو اس طرح گھاؤ کہ S_1 افقی ہو جائے۔ اس طرح سے ہمیں انتصابی قوتوں کا ایک ایسا نظام مل جائے گا جن کا حاصل S_1 اور S_2 دونوں میں سے گزرے گا۔ لیکن چونکہ حاصل قوت خود لازمی طور پر انتصابی ہوئی چاہیئے اس لئے یہ قوت افقی خط S_1 میں سے نہیں گزر سکتی۔

اس لئے ہر جسم کا صرف ایک ہی مرکز ثقل ہو سکتا ہے۔
۱۳۶۔ اگر جسم اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کے سب جزدی حصوں کے وزنوں کو تقریباً متوازی خیال کیا جاسکے تو جسم کا مرکز ثقل ہونا ضروری نہیں ہے۔
بہر حال جسم کا وہ نقطہ جو ہمیں دفعہ ۳۳ کے عمل سے حاصل ہوتا ہے بہت ضروری اور اہم خواص رکھتا ہے، اس کو جسم کا مرکز کیت یا مرکز جمود بھی کہتے ہیں۔ اگر جسم یکساں کثافت کا ہو تو اس کا مرکز کیت مرکز ہندسی یا اوسط مرکز پر منطبق ہوتا ہے۔
۱۳۷۔ پتلی یکساں صلاح ρ اب۔ اس کا مرکز ثقل صریحاً اس کا وسطی نقطہ S ہے کیونکہ S اور ρ کے درمیان ہر ایک ذرہ کے متناظر دوسری طرف S اور ρ کے درمیان S سے اُسی فاصلہ پر ایک مساوی ذرہ موجود ہے۔

ایک یکساں متوازی الاضلاع ا ب ج د کے متوازی

خط کھینچنے سے متوازی الاضلاع کو بہت سے نیلے ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔ اب چونکہ ہر ایک ٹکڑے کا مرکز ثقل اس کا وسطی نقطہ ہے اس لئے کل شکل کا وسطی نقطہ S اور ب ج کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خط پر واقع ہے۔ اسی استدلال سے مرکز ثقل S اور ج د کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خط پر بھی واقع ہے۔ اس لئے مرکز ثقل مطلوبہ دونوں کے تقاطع پر واقع ہے۔

یکساں مثلثی پیرا ا ب ج - فرض کرو کہ ب ج اور ج ڈ کے
نقطے د اور ع ہیں - ب ج کے متوازی خاکینچ کر شکل کو بہت سے
روں میں تقسیم کرنے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ان سب ٹکڑوں کے مرکز ثقل
علیہ کل شکل کا مرکز ثقل ڈ پر واقع ہے - اسی طرح سے یہ ب ج
قع ہے - پس مطلوبہ مرکز ثقل ڈ اور ب ج کے نقطہ وصل پر واقع
مشابہ مثلثوں ث (ب اور ث د ع سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{1}{2} \text{ ث ڈ} = \frac{1}{3} \text{ ڈ ڈ} = \frac{1}{3} \text{ ڈ ڈ}$$
اس سے ث کا مقام

ہو جاتا ہے -
ظاہر ہے کہ اگر ا ب اور ج پر مساوی وزن رکھے جائیں تو ان کا مرکز ثقل
نقطہ ث ہوگا، کیونکہ ب اور ج پر دو مساوی وزن دہ کا ہر ایک وزن
بے مساوی ہوئے ہیں اور یہ وزن اور ڈ پر کا ایک وزن دہ دونوں ل کر ث
ایک وزن ۳ د کے معادل ہو جائے ہیں (دیکھو دفعہ ۳۱) اس لئے
ماں مثلث جہاں تک اس کے وزن سے تعلق ہے تین ایسے وزنوں کے
کے معادل تصور ہو سکتا ہے جن میں سے ہر ایک مثلث مذکور کے وزن کا
نی ہو اور اس کے کوڑوں پر رکھا جائے -

س چار سطحی ا ب ج د - فرض کرو کہ رخوں ا ب ج اور د ا ب
ثقل مشابہ اور مشابہ ہیں یعنی ا ب ج کے متوازی بہت سی مستوی
تکینچ کر بہت سے پتلے ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ
ٹکڑے کا مرکز ثقل اور بناؤ علیہ کل چار سطحی کا مرکز ثقل د ث پر واقع
ہے - اسی طرح سے یہ ج ث پر بھی واقع ہوتا ہے - پس مطلوبہ مرکز ثقل
ن خطوط کا نقطہ تقاطع ہے - اب مشابہ مثلثوں سے ظاہر ہے کہ اگر
کا وسطی نقطہ ع ہو تو

$$\frac{\text{ث ث ث}}{\text{ث د}} = \frac{\text{ث ث ث}}{\text{ج د}} = \frac{\text{ع ث ث}}{\text{ع ج}} = \frac{۱}{۳}$$

پس ث ث ث = ث = $\frac{۱}{۳}$ ث ث ث جس سے ث کا مقام معلوم ہو جاتا ہے۔
چار سطحی کو چار ایسے وزنوں کے مساوی خیال کیا جاسکتا ہے جن میں سے ہر ایک
چار سطحی کے وزن کا ایک چوتھائی ہو اور ہر ایک کو جدا گانہ اس کے کوزوں پر
رکھا جائے۔ کیونکہ ا ب ج میں سے ہر ایک پر ایک وزن د، ر خ
ا ب ج کے مرکز ثقل ث ث ث پر ایک وزن ۳ د کے مساوی ہے اور ث ث ث
پر کا وزن ۳ د اور د پر کا وزن د ل کر ث پر کے ایک وزن ۴ د کے مساوی
ہیں۔ (دیکھو دفعہ ۳۱)۔

کسی قاعدہ پر مخروط مضلع۔ ٹھوس مخروط۔ اگر مخروط مضلع کا قاعدہ مستوی
شکل ا ب ج ل م ن ہو جس کا مرکز ثقل ث ث ث ہو تو اسی قسم کے متوال
سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ مرکز ثقل د اور ث ث ث کو ملانے والے خط پر واقع ہوگا۔
نیز مستوی سطوح د ا ث، د ب ث، د ج ث، د ل ث، د م ث، د ن ث
مخروط مضلع کو مثلثی قاعدوں والے مضلع مخروطوں میں منقسم کیا جاسکتا ہے جن میں
ہر ایک کا مرکز ثقل ا ب ج ل م ن کے متوازی اُس سطح مستوی میں واقع ہے
جس کا فاصلہ د سے ہر خالہ کے سطح مستوی ا ب ج ل م ن کے فاصلہ کا تین چوتھائی
ہے۔ پس کل حجم کا مرکز ثقل خط ث ث ث پر واقع ہے اور اس کو نسبت ۱:۳ میں
تقسیم کرتا ہے۔

اب فرض کرو کہ مستوی قاعدہ کے اضلاع ایک منظم کثیر الاضلاع بناتے
ہیں اور ان کی تعداد کو لا انتہا بڑھایا گیا ہے بالآخر مستوی قاعدہ دائرہ بن جاتا ہے
اور مخروط مضلع مجسم مخروط بن جاتا ہے جس کا راس د ہے، نیز نقطہ ث ث ث
اب مستوی قاعدہ کا مرکز ہو جاتا ہے۔

اس لئے ایک ٹھوس قائم مستوی مخروط کا مرکز ثقل اُس خط پر واقع ہوتا ہے

جو قاعدہ کے مرکز کو اس کے ساتھ ملاتا ہے اور قاعدہ سے اس کا فاصلہ اس خط کے طول کا ایک چوتھائی ہوتا ہے۔

قائم مستدیر مخروط کی سطح - چونکہ مخروط کے راس کو اس کے مستدیر قاعدہ پر کے لائنہا قریب قریب کے نقطوں کے ساتھ ملانے سے اس کی سطح کو لا انتہا مثلثی پتروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے اور ان سب کے مرکز ثقل مخروط کے قاعدہ کے متوازی اس سطح مستوی میں واقع ہوتے ہیں جس کا فاصلہ قاعدہ سے قاعدہ اور راس کے فاصلہ کا ایک تہائی ہو اس لئے کل مخروط کا مرکز ثقل بھی اسی طرح اس مستوی میں واقع ہوگا لیکن تشاکل سے ظاہر ہے کہ مرکز ثقل مطلوبہ مخروط کے محور پر واقع ہے اس لئے یہ وہ نقطہ ہے جہاں مذکورہ بالا سطح مستوی محور سے ملتی ہے۔ پس مطلوبہ مرکز ثقل محور پر کا وہ نقطہ ہے جس کا فاصلہ قاعدہ سے مخروط کے ارتفاع کا ایک تہائی ہو۔

۱۳۸۔ مرکز ثقل معلوم کرنے کے لئے عام ضوابط - ذروں کا ایک نظام ہے جن کے وزن $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$ ہیں اور جن کے محدود ثابت محوروں $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ ہیں کے لحاظ سے $(O_1, W_1), (O_2, W_2), (O_3, W_3), \dots, (O_n, W_n)$ ہیں ان کے مرکز ثقل C کے محدود (C, W) حسب ذیل طور پر حاصل ہوتے ہیں۔

$$C = \frac{W_1 O_1 + W_2 O_2 + \dots + W_n O_n}{W_1 + W_2 + \dots + W_n} = \frac{\sum (W_i O_i)}{\sum W_i}$$

$$C = \frac{\sum (W_i O_i)}{\sum W_i} \quad \text{اور} \quad C = \frac{\sum W_i O_i}{\sum W_i}$$

ان ضابطوں کو دفعہ ۳۴ میں ثابت کیا گیا ہے کیوں کہ ذروں کے وزن متوازی قوتوں کے نظام کی ایک خاص صورت ہیں۔

اگر سب ذرے ایک خط مستقیم پر واقع ہوں تو پہلے ضابطہ سے ثقل کا مقام معلوم ہو سکتا ہے۔

اگر سب ذرے ایک سطح مستوی میں واقع ہوں تو صرف پہلے دو ضابطوں کی ضرورت پڑتی ہے۔

۱۳۹۔ جسم کے دو حصوں کا مرکز ثقل معلوم ہے کل جسم کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ معلوم مرکز ثقل \bar{x} اور \bar{y} ہیں اور دو حصوں کے وزن W_1 اور W_2 ہیں تب مطلوبہ نقطہ ثقل دفعہ ۳۸ کی رو سے \bar{x} اور \bar{y} کو اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ

$$\frac{\bar{x}}{W} = \frac{\bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2}{W_1 + W_2}$$

نقطہ ثقل دفعہ ۳۸ کے استعمال سے بھی معلوم ہو سکتا ہے۔

مشق۔ ایک ہی قاعدہ \bar{x} پر اس کی مختلف اجائیوں پر دو مساوی الساقین مثلث

۱ \bar{x} اور ۲ \bar{x} بنائے گئے ہیں جن کے ارتفاع بالترتیب ۱۲ انچ اور

۶ انچ ہیں۔ \bar{x} سے دو مربع الاضلاع ج ۱ اور ج ۲ کے مرکز ثقل کا فاصلہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ج ۱ اور ج ۲ \bar{x} پر عمود ہے

اور \bar{x} سے \bar{y} پر قائم ہے اور دونوں مثلثوں

ج ۱ اور ج ۲ کے مرکز ثقل بالترتیب

\bar{x}_1 اور \bar{x}_2 ہیں تب

$$\bar{x} = \frac{W_1 \bar{x}_1 + W_2 \bar{x}_2}{W_1 + W_2}$$

$$\bar{x} = \frac{W_1 \bar{x}_1 + W_2 \bar{x}_2}{W_1 + W_2} = \frac{12 \times 2 + 6 \times 6}{12 + 6} = 4$$

مثلثوں کے وزن ان کے رقبوں کے متناسب

ہوتے ہیں، اس لئے بالترتیب $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{6}$ \bar{x} کے مساوی ہیں۔



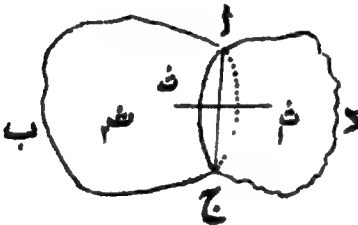
اگر کل شکل کا مرکز ثقل ہوتو

$$ج \text{ ث} = \frac{\Delta \text{ ج اب} + ج \text{ ث} + \Delta \text{ د اب} \times ج \text{ ثم}}{\Delta \text{ ج اب} + \Delta \text{ د اب}} = \frac{۱۳ \times ۶ + ۸ \times ۱۲}{۶ + ۱۲}$$

اس لئے ل ث = ج ل - ج ث = ۲ لے

اس شکل کو پتلے مقوے میں کاٹ کر اس نتیجہ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔
۱۴۔ کسی پورے جسم کا مرکز ثقل اور اس جسم کے ایک حصہ کا مرکز ثقل دونوں معلوم ہیں۔ باقی ماندہ حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ایک جسم ا ب ج د کا مرکز ثقل ہے اور حصہ ا د ج کا مرکز ثقل ہے۔ نیز فرض کرو کہ کل جسم کا وزن و اور حصہ ا ب ج کا وزن و ہے۔ پس و (و - و) حصہ ا ب ج کا وزن ہے۔
فرض کرو کہ حصہ ا ب ج کا مرکز ثقل ہے چونکہ ثا پر و اور ثم پر و کا مرکز ثقل ہے اس لئے ثا لازمی طور پر خط ثا ثم پر واقع ہوگا۔ اور



$$و \times ثا - و \times ثم = و \times ج$$

اس لئے اگر

ثا ثم معلوم ہیں تو ہمیں

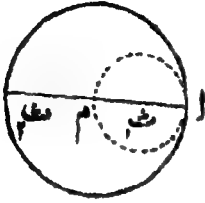
ثا کو ثم تک

خارج کرنے سے ثم ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ثا - ثم = \frac{و}{و - و} \times ثا - \frac{و}{و - و} \times ثم$$

مطلوبہ نقطہ دفعہ ۱۳۸ کے ضابطہ سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

مشق۔ ایک مستطیل پر قوس ہے جس کا نصف قطر ہے اس میں سے ایک دائرہ ا ب طرچ کا ماسک ہے کہ دائرہ کا قطر قوس کا ایک نصف قطر ہے۔ باقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔



چونکہ دائروں کے رتبے اُن کے نصف
قطروں کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں
اس لئے منقطعہ حصہ کل قرص کا ایک چوتھائی
ہے اور باقی ماندہ حصہ کا تین چوتھائی ہے۔

$$\text{پس } م = \frac{1}{4} \text{ ث}$$

$$\text{اس لئے } م \times م \text{ ث} = م \times م \text{ ث} = \frac{1}{4} \text{ ث} \times \frac{1}{4} \text{ ث}$$

$$\text{م} \text{ ث} = \frac{1}{4} \text{ ث}$$

تجربہ سے اس نتیجہ کی تصدیق ہو سکتی ہے۔

۱۴۱۔ اگر ایک استوار جسم متبادل میں ہو اور اس کا صرف ایک نقطہ ثابت ہو تو
جسم نہ گرنے کا مرکز ثقل ثابت نقطہ میں سے گزرنے والے انتصابی خط پر واقع ہوگا۔
فرض کرو کہ جسم کا ثابت نقطہ وہ ہے اور اس کا مرکز ثقل ث ہے اب
جسم پر عمل کرنے والی صرف دو قوتیں ہیں جن میں ایک قوت جسم کو سہارے
والے ثابت نقطہ میں سے گزرنے والا متقابل ہے اور دوسری قوت جسم کے
ترکیبی حصوں کے وزنوں میں جو جسم کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والی ایک واحد
انتصابی قوت کے معادل ہیں۔

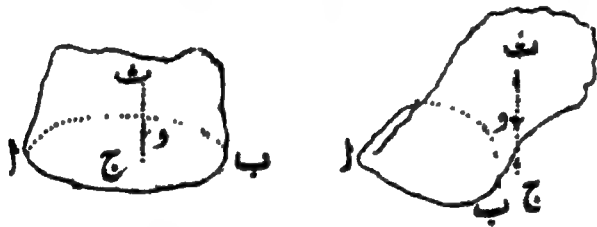


اب ظاہر ہے کہ جب دو قوتیں جسم کو متبادل میں رکھیں تو ضروری ہے کہ وہ

مساوی اور متقابل ہوں اور اُن کا خط عمل ایک ہی ہو، پس ثقل میں سے گزرنے والے انتصابی خط کو لازماً نقطہ د میں سے بھی گزرنا چاہیئے۔

اب دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں پہلی وہ جس میں مرکز ثقل ثقل سہارے کے مقام د سے نیچے ہو اور دوسری وہ جس میں نقطہ د کے اوپر ہو۔ پہلی صورت میں اگر جسم کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو یہ پھر خود بخود اپنے اصلی مقام کی طرف آنے کو رجوع ہوگا لیکن دوسری طرف اگر جسم کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو یہ تعادل کے اہتلائی محل میں واپس نہ آنے گا۔

۴۲۔ اگر ایک جسم کو افقی سطح مستوی پر اس طرح رکھا جائے کہ جسم کا مستوی قاعدہ سطح مذکور سے مس کرے اور اگر اس کے مرکز ثقل ثقل میں سے ایک انتصابی خط کھینچا جائے تو جسم کھرا رہے گا اگر یہ انتصابی خط سطح مستوی سے جسم کے قاعدے کے اندر ملے اور گر جائیگا اگر یہ قاعدہ کے باہر ملے۔



جسم پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ یہ ہیں جسم کا وزن جو اس کے مرکز ثقل میں سے عمل کرتا ہے اور سطح مستوی کے تعادل جو جسم کے قاعدہ کے مختلف نقطوں پر عمل کرتے ہیں۔ تعادل سب انتصابی ہیں اور اس لئے ان کی ترکیب سے ہمیں ایک واحد انتصابی قوت حاصل ہوتی ہے جو قاعدہ کے کسی نقطہ پر عمل کرتی ہے۔ چونکہ دو یکساں متوازی قوتوں کا حاصل ہمیشہ ان قوتوں کے اندر کے کسی نقطہ پر عمل کرتا ہے اس لئے جسم کے قاعدے کے تمام تعاملوں کا حاصل قاعدے کے باہر کے کسی نقطہ میں سے نہیں گزر سکتا۔

اس لئے اگر جسم کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والا انتصابی خط سطح مستوی

سے قاعدہ کے باہر کے کسی نقطہ پر ملے تو یہ حاصل تعال سے متبادل نہیں ہو سکتا اور اس لئے جسم کھڑا نہیں رہ سکتا بلکہ لادنا گر جائے گا۔ اگر جسم کا قاعدہ ایک ایسی شکل ہو جس کا ایک زاویہ متداخل زاویہ ہو جیسا کہ ساتھ کی شکل میں دکھایا گیا ہے تو اس صورت میں نقطہ "قاعدہ" میں وہ رقبہ شریک ہو گا جو ہندسی قاعدہ کے گرد مضبوطی سے بندھے ہوئے تانے کے اندر واقع ہے۔ پس اوپر کی شکل میں "قاعدہ" سے شکل (ب) دفع (ا) کا رقبہ مراد ہے۔



مثلاً نقطہ ج جس پر حاصل تعال عمل کرتا ہے رقبہ (ا) ب کے اندر واقع ہو سکتا ہے مگر خط (ب) کے باہر واقع نہیں ہو سکتا۔ اگر نقطہ ج خط (ب) پر واقع ہو تو جسم گرنے کے عین قریب ہو گا۔

مثالیں

- ۱۔ ایک مثلث کا قاعدہ ثابت ہے اور اس کا راس ایک معلوم خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے ثابت کرو کہ مرکز ثقل بھی ایک خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے
- ۲۔ ایک مثلث کا قاعدہ ثابت ہے اور اس کا راسی زاویہ لمباظ مقدار کے معین ہے ثابت کرو کہ اس کا مرکز ثقل ایک خاص دائرہ کی قوس پر حرکت کرتا ہے۔
- ۳۔ ایک مثلث پر کسی جگہ ایک معلوم وزن رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کل نظام کا مرکز ثقل ایک خاص مثلث کے اندر واقع ہوتا ہے۔
- ۴۔ ثابت کرو کہ تین یکساں سلاخوں سے بنے ہوئے مثلث کا مرکز ثقل اس مثلث کے اندر دینی دائرہ کا مرکز ہو گا جس کے راسی نقطے سلاخوں کے وسطی نقطے ہیں۔
- ۵۔ اگر تین قوتیں ایک نقطہ پر عمل کریں اور بالترتیب m ، n ، p اور m ، n ، p سے تعبیر ہوں تو ثابت کرو کہ حاصل m ، n ، p سے تعبیر ہو گا جہاں m ، n ، p کا مرکز ثقل ہے۔
- ۶۔ ایک ذرہ m نقطہ (ب) ج... کی طرف ان قوتوں سے جولا m ، n ، p

مر = ن ب + سم = ن ج ، سے قیصر ہونی میں کھنچ رہا ہے ثابت کرو کہ ان کا حاصل (ل + مر + سم +) = ن ث سے قیصر ہوتا ہے جہاں ث مرکز ثقل ہے اُن وزلوں کا جو ل، ب، ج پر رکھے جائیں اور بالترتیب ل، مر، سم کے متناسب ہوں۔

(یہ دفعہ ۲۵ کی تقییبی صورت ہے اور اس دفعہ کے نتائج کے متواتر استعمال سے ثابت ہو سکتی ہے۔)

۷۔ ایک منحرف پترے کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

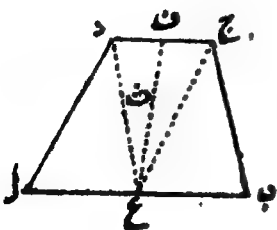
فرض کرو کہ ل ب ج د ایک منحرف ہے جس کے اضلاع ل ب اور ج د متوازی ہیں اور بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ کے مساوی ہیں۔

فرض کرو کہ ل ب اور ج د کے وسطی نقطے بالترتیب ع اور ف ہیں اور ج ع کو ملاؤ مثلثوں ل ج ع، ج ع ف اور ب ع ج کے رقبے ان کے متوازن ل ع، ج اور ب کے متناسب ہیں یعنی ۱، ۲، ۳، ۴ کے متناسب ہیں۔ اب ہر ایک مثلث کی بجائے اس کے وزن کا ایک تہائی اس کے راسوں پر رکھو۔

اس طرح سے ہیں ج اور د پر $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ کے، ل اور ب پر $\frac{1}{3}$ کے اور ع پر $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ کے متناسب وزن حاصل ہوتے ہیں۔

۳ نیز ج اور د پر کے مساوی وزلوں کی بجائے ج کے وسطی نقطہ ف پر

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ کے متناسب وزن لے لو



اور ل ب پر کے مساوی وزلوں کی بجائے ب کے وسطی نقطہ ع پر $\frac{1}{3}$ کے متناسب وزن رکھو اس طرح سے ہیں ف پر $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ کے اور ع پر $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ کے متناسب وزن حاصل ہوتے ہیں۔

پس مطلوبہ مرکز ثقل خط ع ف پر ایسی جگہ ہے کہ

$$\frac{\text{ع ف}}{\text{ث ف}} = \frac{\text{ع ہرکا وزن}}{\text{ہرکا وزن}} = \frac{۱۲۲ + ۱}{۱۲ + ۱}$$

۸۔ ایک مستوی ذوار بجہ الاصلاح پترے کے راسی نقطوں اور وتروں کے نقطہ تقاطع کا فاصلہ اسی سطح مستوی میں ایک خط ولا سے بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ اور ۹ ہے ثابت کرو کہ مرکز جمود کا فاصلہ اسی خط سے $\frac{۱}{۱۲}$ (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸) ہے۔ فرض کرو کہ راسی نقطہ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ ہیں اور قطروں کا تقاطع ع ہے تب

$$\frac{\Delta (ج د) دے (ج ہر جمود) د ع}{\Delta (ج ب) بے (ج ہر جمود) ع ب} = \frac{د - ع}{ع - ب}$$

دفعہ ۱۴۸ کی مدد سے $\Delta (ج د)$ کے مرکز ثقل کا فاصلہ ولا سے

$$\frac{۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸}{۳} \text{ ہے اور } \Delta (ج ب) \text{ کا فاصلہ } \frac{۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸}{۳} \text{ ہے۔}$$

اس لئے ولا سے مطلوبہ مرکز ثقل کا فاصلہ

$$\frac{\Delta (ج د) \times \frac{۱}{۱۲} (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸) + \Delta (ج ب) \times \frac{۱}{۱۲} (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸)}{\Delta (ج د) + \Delta (ج ب)}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۱۲} (د - ع) (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸) + (ع - ب) (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸)}{(د - ع) + (ع - ب)}$$

۹۔ ایک مستوی ذوار بجہ الاصلاح اب ج د کے رقبہ کا مرکز ثقل مف معلوم کرنے کے لئے ذیل کا عمل ثابت کرو۔ فرض کرو کہ مثلثوں اب ج اور اد ج کے مرکز ثقل اور م ہیں اور ل م، اج سے ن پر ملتا ہے تب مرکز ثقل خط ل م پر ایسے واقع ہوگا کہ م ث = ل ن

۱۰۔ ایک مثلثی رقبہ اب ج میں ب ج کے متوازی ایک خط مستقیم کھینچے سے اس کے رقبہ کا ن واں حصہ منقطع کرو یا گیا ہے ثابت کرو کہ باقی ماندہ حصہ کا مرکز ثقل افسل ل میں سے گزرے والے وسطی خط کو نسبت ن + ۱ : ۲ : ۲ (ن + ۱) میں تقسیم

کرتا ہے۔

۱۱۔ کا فذ کے ایک مثلثی پترے کو دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خط پر تہ کیا گیا ہے اور اس طرح مثلث کے راس کو اس کے قاعدہ پر لایا گیا ہے ثابت کرو کہ مثلث کے قاعدہ سے اس محل میں کا فذ کے مرکز جمود کا فاصلہ ابتدائی حالت میں مثلثی پترے کے مرکز جمود کے فاصلہ کا تین چوتھائی ہے۔

۱۲۔ ایک یکساں مسلخ دو رسیوں کے ذریعے جو اس کے سروں کے ساتھ بندھی ہیں اور دوسری طرف ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھی ہیں لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ رسیوں کے متناؤ ان کے طوؤں کے متناسب ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر ایک مثلثی پترے کو اس کے تینوں کونوں کے ساتھ رسیاں بانٹ کر ایک کھونٹی سے لٹکایا جائے تو بھی رسیوں کے متناؤ ان کے طوؤں کے متناسب ہوں گے۔

۱۳۔ چاند کی کمیت زمین کی کمیت کا ۱۳۰ گنا ہے۔ اگر زمین کے نصف قطر کو ۴۰۰۰ میل مان لیا جائے اور زمین اور چاند کے مرکروں کے درمیانی فاصلہ کو زمین کے نصف قطر کا ۶ گنا فرض کیا جائے تو زمین اور چاند کے مرکز ثقل کا فاصلہ زمین کے مرکز سے معلوم کرو۔ (۳۰۸۰ میل تقریباً)

۱۴۔ بتاؤ کہ ایک مخروط کا راسی زاویہ کیا ہونا چاہیے کہ اس کی کل سطح (بشمول اس کے مستوی قاعدہ کے) کا مرکز ثقل اس کے حجم کے مرکز ثقل پر منطبق ہو (۲ جب ۱/۳)۔

۱۵۔ ایک ٹھوس قائم مستدیر مخروط کے قاعدہ کو اس طرح پھیلا دیا گیا کہ مجوف حصہ اسی قاعدہ پر ایک قائم مخروط ہے بتاؤ کہ کتنا حصہ پھیلا جائے کہ باقی ماندہ حصہ کا مرکز ثقل مجوف حصہ کے راس پر منطبق ہو۔

(اندرونی مخروط کا ارتفاع = بیرونی مخروط کا ارتفاع)

۱۶۔ بتاؤ کہ ایک ٹھوس یکساں اسطوانہ سے ایک مخروط کس طرح کاٹا جائے جس کا قاعدہ اسطوانہ کے قاعدہ پر منطبق ہو اور باقی ماندہ مجسم کا مرکز ثقل مخروط کے راس پر منطبق ہو۔

م * ا ق * ن * ب ق * ک * ج ق * ...

$$m = (n \times \text{ب} + k \times \text{ج} + \dots + (m+n+k) \times \text{ق})$$

۲۳۔ ایک ٹھوس قائم منقطع مخروط ایک کھردی نال سطح مستوی پر پڑے۔ سطح نال کے

میلان کو تدریج بڑھایا جاتا ہے اگر مقطوع کی بڑی اور چھوٹی تراشوں کے نصف قطر بالترتیب سہ اور دو ہوں اور مقطوع مجسم کا ارتفاع ۵۵ ہو تو ثابت کر دو کہ بالآخر مقطوع مجسم الٹ جائے گا یا پھسل جائے گا اگر رُز کی قدر

$$\frac{y+1\sqrt{y}+2\sqrt{y}}{y^3+1\sqrt{y^2}+2\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{y}}{y} \gg$$

۲۲۔ ایک قائم مخروط کا راسی زاویہ ۲۰° ہے اس کو ایک سطح مستوی سے جو اس کے محور کے ساتھ زاویہ θ پر بنائی ہے کاٹا گیا ہے اس مجسم کو ایک مکمل گھردری سطح مائل پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور خط میلان اعظم پر واقع ہوتا ہے۔ اس محل میں یہ لگنے کے عین قریب ہے۔ ثابت کرو کہ افق کے ساتھ سطح مائل کے میلان کا محاسن ان میں سے ایک قیمت رکھتا ہے

۴ جب ۲ غم ۱ جب ۲ یہ

۲۵۔ ایک پتیلے اسطوانہ کے مناظر کے اندر جس کا وزن ۱ و ۱ عراض س ہے اور جس کے مرکز نقل کا فاصلہ اس کے قاعدہ سے ب ہے کثافت ک کا مانع ڈالا گیا ہے۔ جب کل کے مرکز نقل کا ارتفاع کم سے کم ہو تو ثابت کر دو کہ مانع کا وزن

$\sqrt{(2+3)k} - \text{ہوگا}$

معلوم ہے۔ دفعہ ۱۳۸ کے ضوابط کی مدد سے معلومہ مشکل کی کسی قوس یا رقبہ یا مجسم کا مرکز ثقل معلوم کیا جاسکتا ہے۔
 کسی قوس کا مرکز ثقل۔ اگر ایک مستوی قوس پر کوئی نقطہ (لا، نا، ہو

اور فن ق چھوٹا تو سی جزد مع س ہو جس کی کثافت نقطہ ن پر ک ہو اور اس کے
جس کا وزن ک مع س کے متناسب ہو تو مذکور بالا ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{L} = \frac{\sum (ک مع س \times لا)}{\sum ک مع س} = \frac{ک لا فرس}{ک ک فرس}$$

جب کہ اس میں نکلات کی انتہائیں قوس زیر بحث کے ایک سرے سے دوسرے
سے تک لی جائیں۔

اسی طرح $\bar{A} = \frac{ک لا فرس}{ک ک فرس}$

نیز $\frac{فرس}{فرلا} = \sqrt{1 + \left(\frac{فرلا}{فرلا}\right)^2}$ اور $\frac{فرلا}{فرلا}$ کی قیمتیں منحنی کی مساوات سے

معلوم ہو سکتی ہیں۔

اگر قوس یکساں کثافت کی ہو جیسا کہ عام طور پر ہوتا ہے تو ک مستقل رہیگا
اور اوپر اور نیچے سے کٹ جائے گا۔ اگر قوس کی کثافت متغیر ہو تو ک کی قیمت
لا، ا، گ کی رقوم میں معلوم ہونی چاہیئے۔

اسی قسم کے ضوابطین ابعاد کے منحنی پر صادق آتے ہیں لیکن اب

$$\frac{فرس}{فرلا} = \sqrt{1 + \left(\frac{فرلا}{فرلا}\right)^2 + \left(\frac{فرمی}{فرلا}\right)^2}$$

اگر قوس کی مساوات قطبی محدودوں میں معلوم ہو

یعنی اس کی مساوات $r = f(\theta)$ ہو تو

$$مع س = مع ر + ر مع ط$$

اعداد ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{آ} = \text{ک} \text{ رجب ط فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} \text{ اور } \frac{\text{ک} \text{ رجب ط فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}}$$

اسی قسم کے ضوابط تین ابعاد کے لئے بھی حاصل ہو سکتے ہیں۔
۱۴۴- مشتق ۱- مکانی ۲- ۴ ولا کی اس قوس کا مرکز ثقل معلوم کرو جو اس اور اس سے افقی فاصلہ ۱۲ پر کے سین کے درمیان منقطع ہوتی ہے۔

$$\text{یہاں } ۱۲ = \frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}}$$

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فر}} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}}$$

$$\frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}}$$

$$\frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}}$$

$$\text{اب ک} \text{ ک فرس} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}}$$

$$\left[\frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} + \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} + \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} + \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} \right] = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}}$$

$$\left[\frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} + \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} + \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} + \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}} \right] = \frac{\text{ک} \text{ ک فرس}}{\text{ک} \text{ ک فرس}}$$

$$\text{نیز } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \quad \text{فرا } = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{فرا}$$

اخراج ۱ = ۱ و ۱ کی رو سے

$$1 = [1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}] \text{ لوک } (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = [1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}]$$

$$\text{اگر } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{فرا } = \left[\frac{1}{2} (1 + 1) \right] = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{فرا } = [1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}] = 1$$

یہ قیمتیں مدراج کرنے سے

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{فرا } = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{فرا}$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{فرا } = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{فرا}$$

مشق ۲۔ زنجیر ۱ = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ کی اس قوس کا مرکز نقل معلوم کرو جو بعد لاورد کسی نقطہ (۱، ۱) کے درمیان ہو۔

$$\text{یہاں } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1 \quad \text{فرا } = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{فرا}$$

$$\text{پس } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{فرا } = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{فرا}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{فرا } = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{فرا}$$

$$\frac{\text{ج} + \text{جیز ج} - \text{ج} + \text{جیز ج} + \text{ج}}{\text{ج جیز ج}} = \frac{\text{ج} (1 - \text{ج})}{\text{س}}$$

$$\frac{\text{یز آ} = \frac{\text{ک افس}}{\text{ک فرس}} = \frac{\text{ک ج جیز ج فلا}}{\text{ک جیز ج فلا}}$$

$$\frac{\text{ج}}{2} \times \frac{\text{ک} (1 + \text{جیز ج})}{\text{ک جیز ج فلا}} = \frac{\text{ج} + \frac{\text{ج}}{4} \text{جیز ج}}{2 \text{جیز ج}}$$

$$\frac{\text{ج} + \text{ج جیز ج} + \text{جیز ج}}{2 \text{جیز ج}} = \frac{\text{ج}}{2} + \frac{1}{4}$$

مثالیں

ذیل کی قوسوں کے مرکز ثقلوں کے مقام معلوم کرو۔

۱۔ خطہ دیرا = (ط + جب ط) ، ا = (۱ - جم ط) کی دو قوس جو مثبت ربع میں ہے۔

$$[(1 - \pi) - \frac{\pi}{2}] \text{ و } [\frac{\pi}{2}]$$

$$2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2} \text{ دو قوسوں کے درمیان } [(1 - \pi) - \frac{\pi}{2}]$$

۳۔ مخروط = ا = جم ط ، ا = جب ط ، ی = ب ط کی دو قوس جو مثبت ربع میں ہے۔

$$[(1 - \pi) - \frac{\pi}{2}] ، \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} ، \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

۴۔ اگر ایک مکمل سستیر قوس کی کثافت قوس پر کے ایک ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مربع کے تناسب بدلے تو ثابت کرو کہ اس کا مرکز ثقل وہیں سے گزرنے والے

قطر کو نسبت ۱:۳ میں تقسیم کرتا ہے۔
 ۵۔ ایک کاگ نکالنے کے پیچ کا طول نصف قطر اور گھائی معلوم ہیں اور پیچ کی چوڑی کے کسی نقطہ پر چوڑی کی موٹائی ب + ن سی کے مساوی ہے (جہاں سی اس نقطہ کا پیچ کے ایک سرے سے محور کے متوازی فاصلہ ہے) تار کے مرکز ثقل کا مقام معلوم کرو۔

۱۳۵۔ کسی مستوی رقبہ کا مرکز ثقل۔ کارٹیزی محدودوں میں رقبہ کا جزو

معرف لا معن ما ہوتا ہے اور اگر اس کی کثافت ک ہو تو اس جزو کا وزن گ × معرف لا معن ما کے مناسب ہوگا۔ اس لئے اساسی ضابطے ہو جاتے ہیں

$$\frac{\text{ک} \times \text{ک} \times \text{لا} \times \text{فرلا} \times \text{فرلا}}{\text{ک} \times \text{ک} \times \text{فرلا} \times \text{فرلا}} = \frac{\text{ک} \times \text{ک} \times \text{لا} \times \text{فرلا}}{\text{ک} \times \text{ک} \times \text{فرلا} \times \text{فرلا}}$$

اور $\frac{\text{ک} \times \text{ک} \times \text{لا} \times \text{فرلا}}{\text{ک} \times \text{ک} \times \text{فرلا} \times \text{فرلا}}$

جہاں انتہائیں اس طرح منتخب کی گئی ہیں کہ ان کے اندر زیر غور پورا رقبہ آجاتا ہے۔
 اگر رقبہ یکساں کثافت کا ہو اور لا فاصلہ کا معین منحنی کو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے ان کے معین ما اور ماہ ہوں تو ہم رقبہ کے جزو کو (ماہ - ماہ) معرف لا کے مساوی لے سکتے ہیں اور انتہائیں جبکہ معرف لا بہت چھوٹا ہو تو اس جزو کے مرکز ثقل کے محدود لا اور $\frac{ماہ + ماہ}{۲}$ ہونگے۔

اب اساسی ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ک} \times \text{ک} \times \text{لا} \times \text{فرلا}}{\text{ک} \times \text{ک} \times \text{فرلا} \times \text{فرلا}} = \frac{\text{ک} \times \text{ک} \times \text{لا} \times \text{فرلا}}{\text{ک} \times \text{ک} \times \text{فرلا} \times \text{فرلا}}$$

$$\text{اور } \bar{A} = \frac{\sum (m_1 - m_2) \text{ مف لاء } \frac{m_1 + m_2}{2}}{\sum (m_1 - m_2) \text{ مف لا}} = \frac{1}{4} \times \frac{K (m_1 - m_2) \text{ فرلا}}{K (m_1 - m_2) \text{ فرلا}}$$

ماہ اور ماہ کی قیمتیں منحنی کی مساوات سے معلوم ہوتی ہیں اور لا کی انتہائیں ایسی
یعنی چاہئیں کہ سب رقبہ شامل ہو جائے۔

اگر منحنی قطبی محدودوں میں دیا ہوا ہو اور اس کی مساوات بلحاظ قطب دے کے
ر = ف (ط) ہو اور اگر ف اور ق ایسے نقطے ہوں جن کے سمتی زاوے ط
اور ط + مف ط ہوں تو رقبہ کا قطبی جزو $\frac{1}{4}$ ر مف ط ہوگا اور اس کا مرکز ثقل جبکہ
مف ط بہت چھوٹا ہو وہ نقطہ ہوگا جس کے قطبی محدود $\frac{1}{4}$ ر اور ط ہیں اور جس کے
کارٹیزی محدود $\frac{1}{4}$ ر جم ط اور $\frac{1}{4}$ ر جب ط ہیں۔

$$\therefore \bar{A} = \frac{\frac{1}{4} \text{ ر مف ط} \times \frac{1}{4} \text{ ر جم ط}}{\frac{1}{4} \text{ ر مف ط}} = \frac{K \frac{1}{4} \text{ ر جم ط فرط}}{K \frac{1}{4} \text{ ر مف ط}}$$

جہاں ر = ف (ط) نیز اسی طرح کی ایک مساوات مآ کے لئے ہے جس سے قطاعی رقبہ
اوب کا مرکز ثقل معلوم ہوتا ہے۔ ط کی انتہائیں ا ادب کے سمتی زاوے
ہونی چاہئیں۔

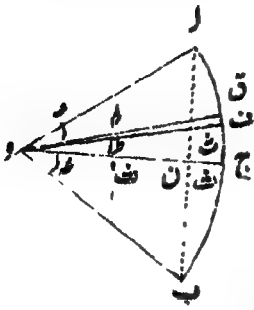
اگر یہ قطاعی رقبہ متغیر کثافت یا موٹائی کا ہو تو ہمیں رقبہ کے جزو ر مف ط مسدود کو کثافت
ک کا لینا چاہیئے اور تب قطاعی رقبہ اوب کے لئے

$$\bar{A} = \frac{\sum \text{ر مف ط} \times \text{مف رک} \times \text{ر جم ط}}{\sum \text{ر مف ط} \times \text{مف رک} \times \text{ط}} = \frac{K \int \text{ر مف ط فرط}}{K \int \text{ر مف ط فرط}}$$

اور اسی طرح مآ کے لئے ک کی قیمت ر اور ط کے تفاعل کے طور پر دی ہوئی
ہوگی۔ ر کے لئے ممکنہ کی انتہائیں صفر سے ف (ط) تک ہونی چاہئیں اور

ط کی انتہائیں ا ادب کے سمتی زاوے ہونی چاہئیں

۴۱۔ مشق ۱۔ ایک دائرہ کی قوس، قطاع اور قطعہ کا مرکز ثقل معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ قوس ا ج ب کے
محاذی دائرہ کے مرکز و پر زاویہ ۲۰۰ درجہ ہے
اور ج قوس کا وسطی نقطہ ہے۔
وجہ کر لاکہ محور مانو، تب قوس

$$\text{قوس کے لئے} \\ \text{قوس کے مرکز سے لاکہ} = \frac{\text{قوس کے مرکز سے لاکہ} \times \text{قوس کے مرکز سے لاکہ}}{\text{قوس کے مرکز سے لاکہ}} = \frac{\text{قوس کے مرکز سے لاکہ} \times \text{قوس کے مرکز سے لاکہ}}{\text{قوس کے مرکز سے لاکہ}}$$

قطاع ا و ب کے لئے

$$\text{قطاع ا و ب کے لئے} \\ \text{قطاع ا و ب کے لئے} = \frac{\text{قطاع ا و ب کے لئے} \times \text{قطاع ا و ب کے لئے}}{\text{قطاع ا و ب کے لئے}}$$

فرض کرو کہ مثلث ا و ب کا مرکز ثقل ہے۔ اس لئے

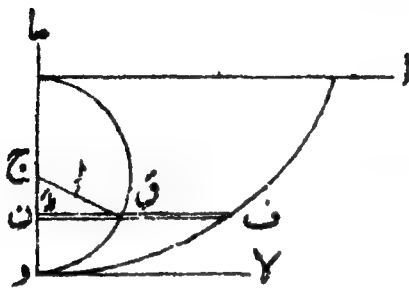
$$\text{و ش} = \frac{2}{3} \text{ و ن} = \frac{2}{3} \text{ و ج م}$$

تب قطعہ ا ن ب ج کا وزن جو اس کے مرکز ثقل ش پر عمل کرتا ہے اور مثلث
ا و ب کا وزن دو وزنوں ش کے گرد متوازن ہیں۔

$$\frac{2}{3} \text{ و ج م} = \text{و ش} \times \text{قطاع ا و ب} + \text{و ش} \times \text{قطاع ا و ب} - \text{و ش} \times \text{قطاع ا و ب}$$

$$\text{اس سے حاصل ہوتا ہے و ش} = \frac{2}{3} \times \text{و ج م} - \text{و ج م}$$

نتیجہ صریح - $\frac{\pi}{4}$ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ نصف دائرہ کی قوس کا مرکز نقل



مرکز سے $\frac{1}{3}$ فاصلہ پر ہے اور نصف دائری

رقبہ کے مرکز نقل کا فاصلہ مرکز سے $\frac{1}{3}$ ہے۔

مشق ۲ - خط تدویر $\frac{1}{3}$ (ط + جب ط)

$\frac{1}{3}$ = (۱- حجم ط) اور اس کے قاعدہ
اور با محور سے گھرے ہوئے رقبہ کا
مرکز نقل دریافت کرو۔
ظاہر ہے کہ

$$\frac{\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{3} \times (ط + جب ط)^2}{\frac{\pi}{4} \times (ط + جب ط)^2} = \frac{\frac{1}{3} \times (ط + جب ط)^2}{(ط + جب ط)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{3} \times (ط + جب ط)^2}{\frac{\pi}{4} \times (ط + جب ط)^2} = \frac{\frac{1}{3} \times (ط + جب ط)^2}{\frac{\pi}{4} \times (ط + جب ط)^2}$$

اب تکمل بالمحصص کے توسیع شدہ قواعد کے مطابق

$$\frac{1}{3} \times (ط + جب ط)^2 = ط^2 \times (ط + جب ط)^2 + ط^2 \times (ط + جب ط)^2 + ط^2 \times (ط + جب ط)^2$$

$$\frac{1}{3} \times (ط + جب ط)^2 = ط^2 \times (ط + جب ط)^2 + ط^2 \times (ط + جب ط)^2 + ط^2 \times (ط + جب ط)^2$$

$$\frac{1}{3} \times (ط + جب ط)^2 = ط^2 \times (ط + جب ط)^2 + ط^2 \times (ط + جب ط)^2 + ط^2 \times (ط + جب ط)^2$$

$$\frac{1}{3} \times (ط + جب ط)^2 = ط^2 \times (ط + جب ط)^2 + ط^2 \times (ط + جب ط)^2 + ط^2 \times (ط + جب ط)^2$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{4} = \frac{[\pi (\frac{1}{4} - \text{جم } \pi) + \pi (\text{جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi) - \frac{5}{8} \text{ جم } \pi - \frac{1}{8} \text{ جم } \pi + \frac{1}{8} \text{ جم } \pi]}{[\pi (\frac{1}{4} - \text{جم } \pi) + \pi (\text{جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi) - \frac{1}{8} \text{ جم } \pi]} \\ & \frac{1}{4} \times \frac{14 - 2\pi}{\pi} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} \times \frac{1}{4} = \\ & \frac{\text{تیرا} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \\ & \frac{[\pi (\text{جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \text{ جم } \pi - \text{جب } \pi \text{ جم } \pi]}{[\pi (\text{جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \text{ جم } \pi]} \\ & \frac{[\pi (\frac{1}{4} \text{ جم } \pi - \frac{1}{4} + \text{جم } \pi) + \pi (\text{جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi) - \frac{1}{8} \text{ جب } \pi]}{[\pi (\frac{1}{4} \text{ جم } \pi - \frac{1}{4} + \text{جم } \pi) + \pi (\text{جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi) - \frac{1}{8} \text{ جب } \pi]} \\ & \frac{1}{4} = \frac{[\pi (\frac{1}{4} \text{ جم } \pi - \frac{1}{4} + \text{جم } \pi) + \pi (\text{جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi) - \frac{1}{8} \text{ جب } \pi]}{[\pi (\frac{1}{4} \text{ جم } \pi - \frac{1}{4} + \text{جم } \pi) + \pi (\text{جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi) - \frac{1}{8} \text{ جب } \pi]} \\ & \frac{1}{4} = \frac{[\pi (\frac{1}{4} \text{ جم } \pi - \frac{1}{4} + \text{جم } \pi) + \pi (\text{جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi) - \frac{1}{8} \text{ جب } \pi]}{[\pi (\frac{1}{4} \text{ جم } \pi - \frac{1}{4} + \text{جم } \pi) + \pi (\text{جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi) - \frac{1}{8} \text{ جب } \pi]} \end{aligned}$$

مشق ۳۔ منحنی ر = ۱ جم ۲ ط کے اُس علاقہ کا مرکز نقض معلوم کرو جس کے اندر ابتدائی خطا ہے۔ ط کی وہ قیمتیں جن سے یہ علاقہ حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{\pi}{4}$ سے $\frac{3\pi}{4}$ تک ہیں۔

$$\begin{aligned} & \text{اس لئے } \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \\ & \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \\ & \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \\ & \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

$$[\frac{5}{2} = \bar{1}]$$

۷ - منحنی $\lambda^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ اور اس کے متقارب کے درمیان -

$$[\frac{15}{3} = \bar{1}]$$

۸ - منحنی $\lambda^2 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$ کا ایک حلقہ -

$$[\frac{8 - \pi^2}{\pi - 2} \times \frac{1}{3} = \bar{1}]$$

۹ - خط منبری $r = (1 + \text{جم ط})$ ، $[\frac{15}{4} = \bar{1}]$

۱۰ - $r = 2$ جم ط کا ایک حلقہ

$$[\frac{1}{\pi} \times \frac{2 \times 128}{105} = \bar{1}]$$

۱۱ - بریلی کے اثیرن $r = 2$ جم ط کا ایک حلقہ -

$$[\frac{2 \times 128}{8} = \bar{1}]$$

۱۲ - $r = 2$ جم ط کا ایک حلقہ -

$$[\frac{\pi}{2} \times \frac{14}{(1 - 2)(1 - 3)} = \bar{1}]$$

۱۳ - $(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{3})^n = 1$ کا درجہ جو محوروں کے مثبت ربع میں ہے -

$$[\frac{\{ (\frac{2}{3}) \}}{(\frac{1}{3})} = \bar{1}]$$

ذیل کے منحنیوں کے درمیان جو تہہ مگر جاتے ہیں ان کے مرکز کمیت کے مقام معلوم کرو -

۱۴ - $\lambda = 1$ اور $\lambda = 2$ ب

$$[\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \bar{1}]$$

۱۵ - $\lambda = 1$ اور $\lambda = 2$ محور کی مثبت جانب میں -

$$\left[\frac{1}{8-3\pi} = \bar{A} = \frac{\bar{A}5}{32-315} \right]$$

۱۶۔ $\bar{A} + \bar{A}^2 + \bar{A}^3 = 0$ اور $\bar{A} + \bar{A}^2 + \bar{A}^3 = 0$ محو لا کے مثبت میں حصہ

$$\left[\frac{\bar{A}^2 + \bar{A} + 1}{(\bar{A} + 1)\pi} = \bar{A}^2, \frac{\bar{A}^2 + \bar{A} + 1}{\bar{A} + 1} = \bar{A} \right]$$

۱۷۔ $\bar{A} = \bar{A}^2, \bar{A} = \bar{A}^3, \bar{A} = \bar{A}^4$

$$\left[\frac{1}{\bar{A}} = \bar{A}, \frac{1}{\bar{A}^2} = \bar{A} \right]$$

۱۸۔ $\bar{A} = \bar{A}^2, \bar{A} = \bar{A}^3, \bar{A} = \bar{A}^4$ اور $\bar{A} = \bar{A}^5$ دیا

$$\left[\frac{(\bar{A}^2 - \bar{A})(\bar{A}^3 - \bar{A})}{(\bar{A} - \bar{A})(\bar{A} - \bar{A})} = \bar{A} \right]$$

۱۹۔ ایک مستدیر پترے کے کسی نقطہ پر کثافت ایسے بلیتی ہے جیسے اس کے محیط پر کے ایک ثابت نقطہ سے اس نقطہ کے فاصلہ کی n ویں قوت ثابت کر دے کہ پترے کا مرکز نقل و میں سے گزرنے والے قطر کو نسبت $n + 2$ میں تقسیم کرتا ہے۔

۲۰۔ نصف قطر کا ایک مستدیر قرص ہے جس کے کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے فاصلہ کے متناسب ہوتی ہے اس میں سے ایک دائرہ کاٹ لیا گیا ہے جس کا قطرب ہے اور جو قرص کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ قرص کے مرکز میں سے باقی حصہ

کے مرکز نقل کا فاصلہ $\frac{2}{3} \pi 15$ ہے

۲۱۔ ایک مستدیر قرص ہے جس کے کسی نقطہ پر کثافت قرص کی سطح مستوی میں کسی بیرونی نقطہ سے اس نقطہ کے فاصلہ کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہے۔

ثابت کرو کہ اس کا مرکز جو د قرص کے محیط کے لحاظ سے نقطہ کا معقول نقطہ ہے۔

۲۲۔ خط صنوبری $r = 1 + \cos \theta$ کے کسی نقطہ پر کثافت ایسے پڑتی ہے

جیسے نقطہ قرن سے نقطہ مرکز کے فاصلہ کی n ویں قوت کا۔ بتاؤ کہ مرکز نقل کا

فاصلہ قرن سے $\frac{(۲+۷۲)(۵+۷۲)}{(۳+۷۲)(۴+۷۲)} \times ۷۰$ ہے۔

۲۳۔ ایک منحنی کی شکل ناقص کا ایک ربع (اوب ہے اس کے کسی نقطہ پر اس کی موٹائی ۷۰ اور اوب سے نقطہ مذکور کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے متناسب ہے اس کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

$$\left[\frac{۱}{۱۵} = \frac{۱}{۲۰} = \frac{۱}{۳۰} \right]$$

۲۴۔ ایک پتر منحنی $\left(\frac{۱۱}{۴} \right) + \left(\frac{۱}{۲} \right) = ۱$ کے ایک ربع کی شکل کا ہے۔ اس کے مرکز ثقل کے محدد معلوم کرو جب کسی نقطہ پر کثافت ک = م لا

$$\left[\frac{۱۲۸}{۲۲۹} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \right]$$

۲۵۔ ناقص کا ایک وتر اس میں سے متعلق قبة کا ایک قطعہ کاٹ لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ قطعہ کے مرکز ثقل کا طریق ایک منشا بہ، منشا بہ طور پر رکھا ہوا اور ہم مرکز قطع ناقص ہے۔

۲۶۔ ایک مکانی سے مساوی رقبہ کے جتنے قطعے کاٹے جاسکتے ہیں ان کے مرکز ثقلوں کا طریق ایک مساوی قطع مکانی بنتا ہے۔

۲۷۔ اگر ایٹیرن زاویہ ۲۰ جم ۱۰ کی کسی قوس فوقی کا مرکز ثقل ث ہے تو ثابت کرو کہ وفش زاویہ فوقی کی تنصیف کرتا ہے جہاں و متحدہ و کا قطب ہے۔

۲۸۔ ایک منحنی ایسا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے جو دو سمتی نیم قطر مینچے جاسکتے ہیں اور ان قطروں کے اندر اس کا جو رقبہ منقطع ہوتا ہے اس کا مرکز ثقل ہمیشہ ان سمتی نیم قطروں کے درمیانی زاویہ کے خط نامعطف پر واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی کوئی دائرہ ہوگا یا برزنی کا ایٹیرن ہوگا

زاویہ ب کی تمام قیوں کے لئے ہیں معلوم ہے کہ مس $\frac{۲}{۳} = \frac{\text{گہ فوس رجب ط}}{\text{گہ فوس رجب ط}}$

مس لئے اگر $\frac{\text{فوس}}{\text{فوس}} = \text{ف (ط) تو}$

كُف (ط) جب (ط) فطر = مس ۛ كُف (ط) حم ط فطر

بہ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

ف (ب) جب ب = مس $\frac{2}{3}$ ف (ب) حجم = $\frac{1}{3}$ قط $\frac{2}{3}$ ف (ط) حجم ط فطر

جب بف (ب) = کف (ط) جم ط فرط
پھر تفرق کرنے سے

مجم بہ ف (ہ) + جب بہ ف (ہ) = ف (ہ) جم ؛
اس لئے ف (ہ) = . اور اس لئے ف (ہ) = مستقل

$$r_2 = \text{مستقل} = \sqrt{\left(\frac{r_1}{\text{قطر}}\right)^2 + r_1^2}$$

جس سے ہمیں آسانی سے حاصل ہوتا ہے کہ $\text{ریا} = \frac{1}{2}(\text{جھ} + \text{جہ})$
 ۲۹۔ ثابت کرو کہ دائرہ ہی مرث ایک ایسا سطحی ہے جس میں منحنی اور ایک ثابت
 نقطہ سے کھینچے ہوئے دو نیم قطروں کے درمیانی رقبہ کا مرکز ثقل ہمیشہ ان سمتی نیم قطروں
 کے درمیانی زاویہ کے خط تنصیف پر واقع ہوتا ہے۔

۱۴۷۔ کسی گروہی سطح یا گروہی مجسم کا مرکز ثقل۔

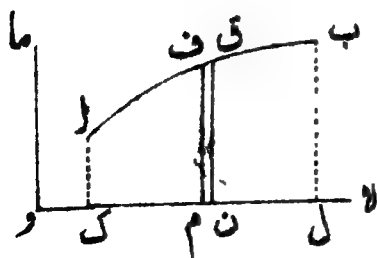
فرض کر دو کہ منحنی اب محورائے گرد و گوش کرتا ہے۔

محور سے فاصلوں لا اور لا + منف لا پر

مسین فہم اور قن نکالو۔

تب جزوی رقبہ قن م سے
حجم تکوین پاتا ہے اوس کا رقبہ π مانف لا
ہے اور اس کا مرکز ثقل و سے فاصلہ
لا پر ہے جسکے معن لا بہت چھوٹا ہو۔

پس اگر مجسم کیاں کثافت کا ہو تو



$$\frac{\text{لا} = \frac{\sum \pi \text{ا م ف لا} \times \text{لا}}{\sum \pi \text{ا م ف لا}}}{\frac{\text{لا} \text{ا فرلا}}{\text{ا م فرلا}}} = \frac{\text{لا} \text{ا فرلا}}{\text{ا م فرلا}}$$

جہاں ا کی قیمت منحنی کی مساوات سے لا کی رقوم میں حاصل ہو سکتی ہے اور لا کی انتہائیں وک اور ول ہیں۔
ولا کے گرد قوس ف ق (مف س) کی گردش سے جو سطح تکوین پائی ہے اس کا رقبہ $\sum \pi \text{ا م ف س}$ ہے اس لئے سطح کے لئے

$$\frac{\text{لا} = \frac{\sum \pi \text{ا م ف س} \times \text{لا}}{\sum \pi \text{ا م ف س}}}{\frac{\text{لا} \text{ا فرس}}{\text{ا م فرس}}} = \frac{\text{لا} \text{ا فرس}}{\text{ا م فرس}}$$

اب $\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = \left[1 + \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right]$ اور ا کی قیمت منحنی کی مساوات سے معلوم

ہے، اس لئے تکمل کا عمل ہو سکتا ہے۔

اگر کوئی منحنی کی مساوات قطبی محدودوں میں $r = f(\theta)$ دی ہوئی ہو تو قطبی عنصر r مف θ رکو گردش دینے سے یہ نصف قطر رجب θ کا ایک دائرہ مرسم کرتا ہے۔ اس لئے

$$\frac{\text{حجم کا لا} = \frac{\sum \text{ر مف} \theta \text{ مف} r \times \pi \text{ا رجب} \theta \text{ رجب} \theta}{\sum \text{ا رجب} \theta \text{ رجب} \theta} = \frac{\sum \text{ا رجب} \theta \text{ رجب} \theta \text{ رجب} \theta \text{ رجب} \theta}{\sum \text{ا رجب} \theta \text{ رجب} \theta}$$

ر کی انتہائیں صفر سے $f(\theta)$ ہیں اور θ کی انتہائیں زیر خود منحنی کے حصہ بد منحصہ ہیں۔
اسی طرح

$$\frac{\text{سطح کا لا} = \frac{\sum \text{مف س} \times \pi \text{ا رجب} \theta \times \text{رجم} \theta}{\sum \text{مف س} \times \pi \text{ا رجب} \theta}}{\frac{\text{ا رجب} \theta \text{ رجب} \theta \text{ رجب} \theta}{\text{ا رجب} \theta \text{ رجب} \theta}} = \frac{\text{ا رجب} \theta \text{ رجب} \theta \text{ رجب} \theta}{\text{ا رجب} \theta \text{ رجب} \theta}$$

جہاں $r = f (ط)$ اور $(\frac{f}{r})^2 = \frac{1}{r} + (\frac{f}{r})^2$

۱۳۸- مشتق ۱- ایک کرہ کا نصف قطر

رہے۔ اس کا جو حصہ مرکز سے فاصلوں ب

اور ج پر متوازی سطحوں کے درمیان منقطع

ہوتا ہے اُس کی سطح اور حجم کے مرکز ثقل معلوم کر دو۔

کرہ کو نصف قطر کے نصف دائرہ کی

گردش سے مکعبین یافتہ خیال کرو تب $a = a' + r$

$$\frac{a}{r} = \frac{a'}{r} + 1 = \left(\frac{f}{r}\right)^2 + 1 = \frac{f^2}{r^2} + 1$$

$$\frac{a}{r} = \frac{a'}{r} + 1 = \left(\frac{f}{r}\right)^2 + 1 = \frac{f^2}{r^2} + 1$$

یہ آ صریحاً صفر ہے۔

اس لئے کہ کسی منقطعہ کا مرکز ثقل اس کی مستوی سطحوں کے عین بیچ میں ہوتا ہے

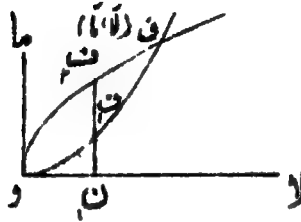
$$\frac{a}{r} = \frac{a'}{r} + 1 = \left(\frac{f}{r}\right)^2 + 1 = \frac{f^2}{r^2} + 1$$

$$\frac{a}{r} = \frac{a'}{r} + 1 = \left(\frac{f}{r}\right)^2 + 1 = \frac{f^2}{r^2} + 1$$

یہ توضیح ہو اگر ج = ۱ اور ب = ۰ رکھا جائے تو ہمیں نصف کرہ حاصل ہو جاتا ہے اگر

$$\frac{a}{r} = \frac{a'}{r} + 1 = \left(\frac{f}{r}\right)^2 + 1 = \frac{f^2}{r^2} + 1$$

مشق ۲۔ اس حجم کا مرکز ثقل معلوم کرو جو مکافین $\lambda = \mu$ والا اور $\lambda = \mu$ ب م سے گھرے ہوئے رقبہ کو محور لاکے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔



ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں سطحیوں کے نقطہ تقاطع ف کے محدد ہیں۔

$$\lambda = \mu \text{ و } \lambda = \mu, \lambda = \mu \text{ و } \lambda = \mu$$

اگر $\lambda = \mu$ ، $\lambda = \mu$ ، $\lambda = \mu$

$$\lambda = \mu, \lambda = \mu, \lambda = \mu$$

$$\lambda = \mu, \lambda = \mu, \lambda = \mu$$

$$\lambda = \mu, \lambda = \mu, \lambda = \mu$$

مثالیں

ذیل کے سطحیوں کی گردش سے جو سطحیں بنتی ہیں ان کے مرکز ثقل معلوم کرو۔
۱۔ مکافی $\lambda = \mu$ والا کو لا ج سے کاٹ کر محور کے گرد گھمانے سے

$$\lambda = \mu, \lambda = \mu, \lambda = \mu$$

۲۔ خط $\lambda = \mu$ و $\lambda = \mu$ (ج ب ط) و $\lambda = \mu$ (ج ب ط) کو محور کے گرد۔

$$\left[\frac{8-3\pi}{4} \times \frac{4}{15} = \bar{a} \right]$$

۳۔ منبری $r=1$ (۱+جم ط) کو اس کے محور کے گرد۔ $\left[\frac{5}{4} = \bar{a} \right]$

۴۔ $r=2$ (۲+جم ط) کا ایک حلقہ خط ابتدائی کے گرد۔ $\left[\frac{1}{4} = \bar{a} \right]$

ذیل کے منحیث کی گردش سے جو جسم بنتے ہیں ان کے مجموعوں کے مرکز نقل معلوم کرو۔
۵۔ مکانی $r=2$ والا کا وہ حصہ جو معین $r=1$ سے منقطع ہوتا ہے اور محورا کے گرد گھمائے سے۔ $\left[\frac{5}{4} = \bar{a} \right]$

۶۔ $r=1$ والا کو محورا کے گرد $\left[\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \bar{a} \right]$

۷۔ $r=1$ والا $r=2$ والا کو محورا کے گرد

$$\left[\frac{3}{4} = \bar{a} \right]$$

۸۔ نصف قطر کے دائرہ کو خط مماس کے گرد دو قاتوں میں سے گھمانے سے جو جسم

$$\left[\frac{1}{4} = \bar{a} \right]$$

۹۔ خطہ دیر $r=1$ (ط+جب ط) $r=2$ (۱+جم ط) کو محورا کے گرد گھمانے سے۔

$$\left[\frac{1}{4} \times \frac{4-3\pi}{4} = \bar{a} \right]$$

۱۰۔ $r=1$ (۱+جم ط) کو اس کے محور کے گرد $\left[\frac{1}{4} = \bar{a} \right]$

۱۱۔ ثابت کرو کہ کرہ کی ایک پھانک کا مرکز نقل جس کا زاویہ 2π ہے اس کے محور سے

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} \text{ فاصلہ پر ہوتا ہے۔}$$

۱۲۔ ثابت کرو کہ نصف قطر کے ایک کرہ کے قطاع کے مرکز نقل کا فاصلہ مرکز سے

$$\frac{\pi}{2} (1+جم ط) \text{ ہے جہاں } \pi \text{ وہ زاویہ ہے جو قطاع کے کردی قاعدہ پر ہے کسی}$$

نقطہ میں سے گزرنے والا نصف قطر قطاع کے محور کے ساتھ بناتا ہے۔

۱۳۔ ایک کرہ کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہے اس کے کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کے متناسب ہے اگر اس میں ایک کرہ جس کا قطر اول الذکر کرہ کا نصف قطر ہو کاٹ لیا جائے تو ثابت کرو کہ باقی ماندہ مجسم کا مرکز ثقل مرکز سے $\frac{3}{4}$ فاصلہ پر ہوگا۔
۱۴۔ ایک کرہ کے کسی نقطہ پر کثافت سطح پر کے ایک ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز ثقل ثابت نقطہ میں سے گزرنے والے نصف قطر کی تنصیف کرتا ہے۔

۱۵۔ ایک نصف کرہ کی کثافت کسی نقطہ پر مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کی n ویں قوت کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز ثقل اس نصف قطر کی نصف کرہ کی مستوی سطح پر عمود وار ہے نسبت $n + 3 : n + 5$ میں تقسیم کرتا ہے۔

۱۶۔ اگر زمین کو نصف قطر $\frac{1}{2}$ کا ایک کرہ فرض کیا جائے تو لاپلاس کے کلیہ کی مطابق $k = \frac{1}{2}$ جب $\frac{1}{2}$ جہاں $\frac{1}{2}$ اور k فاصلہ لا پر کی کثافت ہے۔

ثابت کرو کہ نصف کرہ زمین کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے

$$\frac{(2-n)}{2} \text{ (جب } n=2 \text{) } \text{ جم } n=2 \text{ جب } n=2 \text{ ہے۔}$$

۱۷۔ نصف قطر $\frac{1}{2}$ کے ایک دائرہ کو اس کی سطح مستوی میں ایک ایسے خط کے گرد جس کا فاصلہ اس دائرہ کے مرکز سے $\frac{1}{2}$ ہے گھمانے سے ایک نامکمل حلقہ بنا لیا گیا ہے۔ اگر وہ زاویہ جس میں سے دائرہ گھومے 2π ہو تو

$$\text{مجسم کا مرکز ثقل خط مذکور سے } \frac{2}{3} \text{ ج } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ ہے}$$

۱۸۔ ایک یکساں مجسم ایسی سطح سے گرا رہا ہے جو خط تدویر کو قاعدہ کے گرد گھمانے سے بنتی ہے۔ محور گردش میں سے گزرنے والے مستوی سے اس مجسم کو دو حصوں میں کاٹا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مجسم کے دو حصوں کا مرکز ثقل مستوی رخ سے $\frac{4}{3}$ فاصلہ پر ہے

جہاں لا خط مدد پر کے تکونی دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۱۹۔ سنویری ر = ۱ (ا + حجم ط) کو محور کے گرد دھنکناؤں میں سے گمانے سے
 بنتی ہے اس کی نصف سطح اور محور میں سے گزرنے والے مستوی سے ایک مجہ
 گیا ہے ثابت کرو کہ محور سے اس کے مرکز ثقل کا فاصلہ $\frac{73}{138}$ ہے اور محور کے متوالہ
 سے اس کا فاصلہ $\frac{13}{138}$ ہے۔

۲۰۔ نصف قطر ا کے ایک ربع دائرہ کو مائل نصف قطروں میں سے ایک کے
 خط کے گرد گمانے سے ایک مجہم تیار کیا گیا ہے متوالی خط کا نصف قطر سے فاصلہ
 ہے جہاں ب < ثابت کرو کہ اس طرح سے جو مستوی سطح اور حجم پیدا ہوتا ہے ان
 مرکز ثقلوں کے فاصلے اس کی مستوی سطح سے بالترتیب $\frac{5}{42}$ (ب ۲) $\frac{5}{42}$
 $\frac{1}{42}$ (ب ۳) $\frac{1}{42}$ ہیں۔

۱۴۹۔ کسی حجم کے مرکز ثقل کے لئے عام ضوابط۔

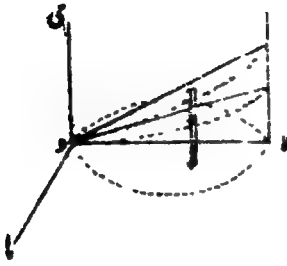
اگر حجم کا کوئی نقطہ (لا، ما، ی) ہو اور اس کے قریب کا لہ
 ق (لا + مع لا، ما + مع ما، ی مع ی) ہو تو ف اور ق میں
 ما و ی، ی و لا اور لا و ما مستویوں کے متوالی سطوح مستوی کیلئے
 جو چھوٹا سا متوالی السطوح بٹا ہے اُس کا حجم مع لا x مع ما x مع ی ہو جا
 ہے اگر اس کی کثافت ک ہے تو مندرجہ بالا اُکسا سی ضابطے یہ ہو جا۔

$$\frac{\text{مع لا} \times \text{مع ما} \times \text{مع ی} \times \text{ک}}{\text{ک}} = \frac{\text{مع لا} \times \text{مع ما} \times \text{مع ی} \times \text{ک}}{\text{ک}}$$

اسی طرح آ۔ $\frac{\text{ک} \times \text{لا} \times \text{فرما فری}}{\text{ک}} = \frac{\text{ک} \times \text{لا} \times \text{فرما فری}}{\text{ک}}$ اور ی۔ $\frac{\text{ک} \times \text{ما} \times \text{فرما فری}}{\text{ک}} = \frac{\text{ک} \times \text{ما} \times \text{فرما فری}}{\text{ک}}$

انہی ایسی ایسی ہوتی چاہئیں کہ اوپر کے تھکوں کے اندر سب حجم آ جائے۔

مشق ۲۔ اسطوانہ ۲ لا + ما = ۲ ولا کو سطوح مستوی ی = م لا اور ی = ن لا سے
کاٹنے سے جو مجسم حاصل ہوتا ہے اس کا
مرکز ثقل معلوم کرو۔



اگر ہم اس سطح مستوی لا سے اسطوانے
کی تراش کا کوئی غنصر معف لا معف مائیں
تو اس کے اوپر کا حجم صریحاً

معف لا معف ما × (م - ن) لا کے
مساوی ہے اور مستوی لا ما کے اوپر اس

مرکز ثقل کی بلندی $\frac{م + ن}{۲}$ لا ہے۔

اس لئے $\frac{لا (فرلا فرما (م - ن) لا \times لا}{لا (فرلا فرما (م - ن) لا}$ جہاں ما کی انتہائیں $۲ لا - لا$ سے

$۲ لا - لا$ اور لا کی انتہائیں صفر سے و تک ہیں۔

اس لئے $\frac{ک (لا \times لا - لا فرلا)}{ک (لا \times لا - لا فرلا)} = \frac{ک (جبت ذ فرذ)}{ک (جبت ذ فرذ)}$
اگر لا = و جب ذ تو

$\frac{و (جبت ذ - جبت ذ) فرذ}{ک (جبت ذ - جبت ذ) فرذ} = \frac{و}{ک}$

اسی طرح ی = $\frac{لا (فرلا فرما (م - ن) لا \times \frac{م + ن}{۲} لا)}{لا (فرلا فرما (م - ن) لا)} = \frac{م + ن}{۲} لا = \frac{۵}{۱۹} (م + ن)$

مشق ۳۔ اگر ناقص نما $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$ کے ایک فن کے کسی نقطہ پر کثافت

لاٹاقی کے متناسب ہو تو ثابت کر دو کہ

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})} = \frac{1}{1}$$

نیز ان صورتوں پر غور کرو جبکہ $1 = 1$ ، $2 = 2$ ، $3 = 3$ ، $4 = 4$

$1 = 1$ ، $2 = 2$

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})} = \frac{1}{1}$$

جہاں لا، ا، ی مشروط

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

کے تحت سب مثبت قیمتیں اختیار کر سکتے ہیں۔

$$1 = 1، 2 = 2، 3 = 3، 4 = 4$$

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})} = \frac{1}{1}$$

جہاں لا، ا، ی سب مثبت قیمتیں اختیار کر سکتے ہیں جو شرط لا + ما + ع = 1

کو پورا کریں

اس لئے ڈریفٹلے کے ٹکسوں کی رو سے

ہے ن کا اور رگرو کا نصف قطر ہے۔

$$\therefore \text{ی} \times \text{مف س} = \text{ر} \times \text{مف ص}$$

اس لئے اگر قی مطلوبہ مرکز ثقل کا معین ہو تو

$$\frac{\text{ی} \times \text{مف س}}{\text{مف س}} = \frac{\text{ر} \times \text{مف ص}}{\text{مف س}} \dots (1)$$

جہاں س مثلث کا رقبہ ہے اور ص سطح لا و ما پر اس مثلث کے ظل کا رقبہ ہے۔

اب ص = رقبہ ا و ب کا ظل مستوی لا و ما پر

= رقبہ ا و ب کا ظل مستوی لا و ما پر

$$= \frac{1}{2} \times (\text{زاویہ ا و ب}) \times \text{جم (اس زاویہ کا جو ا و ب اور لا و ما کے درمیان ہے)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{راج} \times \text{جب (اس زاویہ کا ج و ج اور ا و ب کے درمیان ہے)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{راج} \times \text{جب ر ج جہاں ر ج وہ قوس ہے جو ج سے ا و ب پر عمود وار نکلی جائے۔}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{راج} \times \text{جب ا و ب}$$

نیز س = ر ج ذ جہاں ذ کو دی اصافہ ہے

$$\therefore \text{ی} = \frac{\frac{1}{2} \times \text{راج} \times \text{جب ا و ب}}{\text{و}}$$

اس سے وجہ پر مرکز ثقل کے ظل کا و سے حاصلہ معلوم ہوتا ہے اسی قسم کے مضابطوں سے و ا اور و ب پر ظلوں کے حاصلہ معلوم ہوتے ہیں۔ اس لئے اس کا مقام معلوم ہو گیا۔

۱۵۲۔ دفعہ گزشتہ کا ربط (۱۱) یقیناً گروہ پر کے ہر ایک رقبہ پر صادق آتا ہے خواہ وہ رقبہ مثلث ہو یا نہیں۔

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر گروہ کی سطح پر کوئی رقبہ س ہو تو اس کے مرکز ثقل کا

فاصلہ سطح مستوی لاوا سے جو کرہ کے مرکز میں سے گزرتی ہے مساوی ہوتا ہے
اس حاصل ضرب کے جس کا ایک جزو کرہ کا نصف قطر ہے اور دوسرا جزو وہ نسبت
ہے جو سطح لاوا پر رقبہ میں سے ظل کو خود رقبہ میں سے ہے۔
مشق۔ ثابت کرو کہ کروی مثلث کے مرکز نقل کا فاصلہ اس سطح مستوی سے جو مثلث
کے منبع اب اور کرہ کے مرکز میں سے گزرتی ہے

$$\frac{1}{2} \times (ج - ب - ج - ا) = ج - ب - ا$$

۱۵ پے پس کا مسئلہ۔ اگر کوئی مستوی رقبہ اپنے مستوی میں کسی محور کے گرد
کسی زاویے میں سے گھومے (۱) جو حجم اس طرح سے تشکیل پائے گا وہ رقبہ اور
رقبہ کے مرکز نقل نے جو فاصلہ طے کیا ہے ان دونوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا
اور (۲) جو سطح اس طرح مرتسم ہوگی اس کا رقبہ گھومنے والے رقبہ کے محیط اور جو
فاصلہ محیط کے مرکز نقل نے طے کیا ہے ان دونوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا۔
فرض کرو کہ منحنی کا رقبہ ا اور منحنی کا محیط س ہے اور گھومنے کے محور سے
جس کو لا کا محور مانا گیا ہے منحنی کے رقبہ کے مرکز نقل کا فاصلہ تا اور منحنی کے محیط
کے مرکز نقل کا فاصلہ تا ہے۔

(۱) فرض کرو کہ رقبہ کا کوئی نقطہ ن ہے جس کا سین ما ہے تب اگر گھومنے

کا زاویہ ط ہو تو ن سے جو قوس

ہے اس کا طول = ما ط

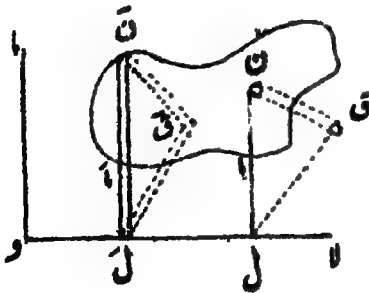
اس لئے رقبہ کے عنصر فرد

سے جو حجم مرتسم ہوتا ہے وہ مساوی

ہے ما ط × ل کے۔

اس لئے کل حجم جو رقبہ مرتسم

کتاب ہے



$$ج = ا ط \times ل = ج (ما \times فرد) = ط \times تا (دفعہ ۱۴ کی رو سے)$$

$$= ل \times ما ط$$

= منحنی کا قیہ اس قوس کا طول جو رقبہ کا مرکز نقل طے کرتا ہے۔
(۲) فرض کرو کہ منحنی کے محیط پر کوئی نقطہ N ہے جس کا معین M ہے۔ دوران گردش میں N جو منحنی مرتسم کرتا ہے اس کا طول = MA
اس لئے N پر محیط کے عنصر ds سے جو سطح مرتسم ہوتی ہے وہ
= $MA \times ds$

اس لئے محیط سے کل سطح جو مرتسم ہوتی ہے وہ
= $\int (MA \times ds) = \int MA \times ds$ (دفعہ ۱۳ کی رو سے)
= $MS \times MA$
= منحنی کا محیط \times اس قوس کا طول جو محیط کا مرکز نقل طے کرتا ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک لنگر چیلے کا حجم اور سطح معلوم کرو۔
ایک لنگر چیلے سے وہ سطح مراد ہوتی ہے جو کوئی دائرہ اپنی سطح میں ایک محور کے گرد گھومنے سے تشکیل کرتا ہے۔ اگر دائرہ کا نصف قطر a ہو اور اس کے مرکز کا فاصلہ گردش کے محور سے b ہو تو ایک مکمل گردش میں دائرہ کا مرکز جو فاصلہ مرتسم کرتا ہے وہ $2\pi b$ اس لئے لنگر چیلے کا حجم = $2\pi a^2 \times b$ اور

اور اس کی سطح = $2\pi a^2 \times b$ = $2\pi a^2 b$
۲۔ ایک کرہ کا نصف قطر a ہے اس میں سے ایک ٹھوس قطاع کاٹ لیا گیا ہے جس کے قاعدہ کا محیط مستدیر ہے اور اس محیط کے قطر کے محادی کرہ کے مرکز پر زاویہ 2α بنتا ہے ثابت کرو کہ قطاع کا حجم $\frac{2}{3}\pi a^3 \sin^3 \alpha$ جب $\frac{\pi}{2}$ ہے اور اس کی منحنی سطح $\pi a^2 \sin^2 \alpha$ جب $\frac{\pi}{2}$ ہے (دائرہ کے ایک قطاع کو اس کے ایک نصف قطر کے گرد گھاؤ)

۳۔ پے پس کے مسئلہ کی مدد سے ایک قائم مخروط کے مقطوع کی سطح اور حجم اس کے

مستوی سروں کے نصف قطروں اور ارتفاع کی رقوم میں معلوم کرو۔
 ۴۔ پے پس کے مسئلوں سے ایک نصف دائرہ کی قوس اور رقبہ کے مرکز ثقلوں کے مقام معلوم کرو۔

۵۔ ایک مثلث کا رقبہ ق ہے اور یہ اپنی سطح مستوی میں ایک خط کے گرد گھومتا ہے مثلث کے رأسوں سے اس خط پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان کے طول بالترتیب

ع' ع' ع' ہیں۔ ثابت کرو کہ حجم $\frac{\pi}{3} ق \times (ع' + ع' + ع')$ ہے۔

۶۔ صفحہ (۲۲۱) مثال (۱) اور صفحہ (۲۲۵) مشق ۲ کے نتیجوں کا استعمال کرنے سے اس جسم کا حجم اور سطح معلوم کرو جو ایک خط تدویر کو اس کے قاعدہ کے گرد مکمل گردش دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

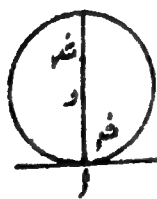
نواں باب

قائم اور غیر قائم تعادل

۴۵۱۔ ہم چھ ۱۴ میں بتا چکے ہیں کہ اگر اس دنگہ کی شکل (۱) کے جسم کو خفیف سا ہٹا دیا جائے تو وہ اسی محل تعادل میں واپس آنے کی کوشش کرتا ہے اگر شکل (۲) کے جسم کو دھسا ہٹا دیا جائے تو وہ ابتدائی محل میں آنے کی کوشش نہیں کرے گا۔ بلکہ اس محل تعادل سے اور دور ہٹ جائیگا۔

پہلے جسم کے تعادل کو قائم تعادل اور دوسرے جسم کے تعادل کو غیر قائم تعادل کہتے ہیں۔

اب ایک وزنی کرہ پر فور کر دو افقی مستوی پر رکھا ہوا ہے اور جس کا مرکز ثقل اس کے مرکز پر مطبق نہیں ہے۔



فرض کرو کہ پہلی شکل سے کرہ کا محل تعادل ظاہر کیا گیا ہے اور کرہ کا مرکز ثقل یا تو کرہ کے مرکز سے بیچے نقطہ ثقل پر ہو گا یا اوپر نقطہ ثقل پر ہو گا۔ نیز فرض کرو کہ دوسری شکل میں کرہ کا محل جبکہ وہ چھوٹے زاویہ میں سے گھوم جاتا ہے دکھایا گیا ہے۔

اب کرہ اور مستوی سطح کا نقطہ تماس ب ہوگا۔
 سطح مستوی کا تعادل اب بھی کرہ کے مرکز میں سے گزرے گا۔
 اگر جسم کا وزن ث میں سے عمل کرے تو ظاہر ہے کہ جسم اپنے ابتدائی محل
 توازن میں واپس آجائے گا اور جسم کی ابتدائی حالت قائم تعادل کی تھی۔
 اگر وزن نقطہ ث میں سے عمل کرے تو جسم ہٹاؤ کے بعد اپنے ابتدائی
 محل توازن سے اور دور ہٹ جائیگا۔ اس لئے ابتداً جسم غیر قائم تعادل کی حالت
 میں تھا۔

اگر جسم کا مرکز ثقل دہر ہوتا تو دوسری شکل میں بھی جسم کا وزن سطح مستوی کے
 تعادل کے ساتھ متوازن ہوتا۔ اس لئے نئے محل میں بھی جسم تعادل میں رہتا ایسی
 صورت میں تعادل کو تبدیلی تعادل کہتے ہیں۔

۱۰۵۔ تعریف۔ کوئی جسم قائم تعادل میں اُس وقت ہوتا ہے جبکہ محل تعادل میں
 سے ہٹاؤ سا ہٹانے کے بعد جسم بر عمل کرنے والی قوتیں جسم کو ابتدائی محل تعادل
 میں لانے کی طرف میلان رکھتی ہوں۔ یہ غیر قائم تعادل میں اُس وقت کہلاتا ہے جبکہ
 خفیف سے ہٹاؤ کے بعد جسم بر عمل کرنے والی قوتیں جسم کو ابتدائی محل تعادل سے
 اور پرے ہٹانے کا میلان رکھتی ہوں۔ یہ تعادل تبدیلی میں اُس وقت کہلاتا ہے جبکہ
 ذرا سے ہٹاؤ کے بعد اس بر عمل کرنے والی قوتیں متوازن ہوں۔

عام طور پر ان اجسام کا تعادل جو اوپر سے بھاری ہوں یا جن کے پینڈے
 چھوٹے ہوں غیر قائم ہوتا ہے۔

پس نظری طور پر ممکن ہے کہ ایک پن افقی میز پر نوک کے بل تعادل حالت
 میں سیدھی کھڑی رہ سکے۔ لیکن عمل میں ”قاعدۃ اتقا چھوٹا ہوگا کہ ذرا سے ہٹاؤ
 سے بھی اس کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والا انتصابی خط اس کے قاعدہ
 کے اوپر سے گزرے گا اور پن گر جائے گی۔ اور یہی کیفیت بلینچال کی چھڑی کی ہوتی
 ہے جبکہ اس کو ایک سرے کے بل میز پر انتصاباً رکھا جائے۔

عام اصول یہ ہے کہ جسم قائم تعادل میں اُس وقت ہوتا ہے جبکہ اس کا مرکز ثقل
 ان سب مقاموں سے جو یہ اختیار کر سکتا ہے زیر تر مقام میں ہو اس کی مستالیں

دفعہ ماقبل کی صورت اور گھڑیاں کا رقص ہیں۔ گھڑیاں کا رقص ہٹاؤ کے بعد ہمیشہ اپنے ابتدائی محل سکون کی طرف آتا ہے۔

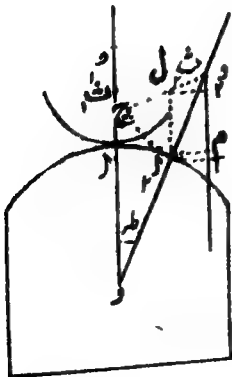
اب اُس آدمی کی حالت پر غور کرو جو ایک کسے ہوئے رستے پر چل رہا ہو عام طور پر اس کے ہاتھ میں ایک بانس ہوتا ہے جس کا ایک سرا بہت دزنی ہوتا ہے وہ اسے اس طرح رکھتا ہے کہ اس کا ادا بانس کا مرکز نقل ہمیشہ پاؤں کے نیچے رہتا ہے۔ جب وہ ایک طرف کو گرنے لگتا ہے تو وہ بانس کے مقام کو اس طرح بدلتا ہے کہ اس کا ادا بانس کا مرکز نقل اس کے پاؤں کی دوسری جانب آجاتا ہے اور حاصل وزن پھر اس کو مینج کر سیدھے محل میں لے آتا ہے۔

اگر نظری طور پر جسم کے ایک سے زیادہ محل توازن ہوں تو وہ محل جس میں اس کا مرکز ثقل سب سے پہلے مقام پر ہو بالعموم تعادل قائم کا محل ہوگا اور وہ محل جس میں اس کا مرکز ثقل بلند ترین مقام پر ہو تعادل غیر قائم کا محل ہوگا۔

۱۵۶۔ ایک جسم دوسرے ثابت جسم پر حالت توازن میں ساکن ہے اور دونوں جسموں کے جو حصے ایک دوسرے سے مس کرتے ہیں وہ کرے ہیں جن کے نصف قطر بالترتیب r اور R ہیں اور دو خط مستقیم جو کروں کے مرکزوں کو ملاتا ہے انصافی ہے اگر آپر کے جسم کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو معلوم کرو کہ تعادل قائم ہو گا یا غیر قائم اجسام اس قدر کھدے ہیں کہ پھسلنا ممکن نہیں ہے۔

فرض کر کے غلجے جسم کی کردی سطح
کا مرکز ہے اور ابد کے جسم کا وائیز
اس کا طول ہے

فرض کرو کہ اوپر کے جسم کو اڑھکا کر
 ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے اب اوپر کے جسم
 کے مرکز ثقل کا نیا محل وہ ہوگا نیا نقطہ تمام
 اہم مرکز ثقل کا نیا محل مشد اور کم مقام
 ج ہوگا۔ اس لئے ج مشد کا
 طول ہوگا۔



لہل انتصاباً کھینچو جو ج سے ل پر ملے اور وہم انتصاباً کھینچو جو لہ
میں سے گزرنے والے افقی خط سے م پر ملے۔

فرض کرو کہ $لہ > لہ = ط$ اور $لہ > لہ = ج = ف$

اس لئے زاویہ ج لہ م = (ط + ف)

چونکہ جسم دوسرے محل میں لٹھک کر آیا ہے اس لئے

قوس لہ لہ = قوس ج لہ ، اس لئے

سراط = رف = " " " " " " " " (۱)

جہاں سہ اور ر بالترتیب بھلی اور اوپر کی سطحوں کے نصف قطر ہیں۔
اب متبادل کا قائم یا غیر قائم ہونا اس بات پر منحصر ہے کہ ث م خط لہ ل کے بائیں
طرف واقع ہے یا دائیں طرف واقع ہے

یعنی ث م کا فاصلہ وہم سے $< یا > لہ م$

یعنی (ر - ہ) جب (ط + ف) $< یا > ر جب ط$

یعنی (ر - ہ) جب $(\frac{س + ر}{ط}) < یا > ر جب ط$

یعنی زاویہ کی جیب کے پھیلاؤ کو زاویہ مذکور کی رفوم میں مندرج کرنے سے

$$(ر - ہ) \left[\frac{س + ر}{ط} - \frac{۱}{ط} \right] \left(\frac{س + ر}{ط} \right) ط^۲ + \dots$$

$$< یا > ر [ط - \frac{ط^۲}{س} + \dots] \dots (۲)$$

$$(ر - ہ) \left[\frac{س + ر}{ط} - \frac{۱}{ط} \right] \left(\frac{س + ر}{ط} \right) ط^۲ + \dots < یا > ر [ط - \frac{ط^۲}{س} + \dots] \dots$$

یعنی (ر - ہ) (س + ر) (س + ر) یا در

یعنی $س < یا > ہ (س + ر)$

$$یعنی \frac{۱}{ط} < یا > \frac{۱}{ط} + \frac{۱}{ط} \dots \dots (۳)$$

اس خاص صورت میں جبکہ $\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{h}$ یعنی $h = \frac{r}{2}$

تو ہمیں مساوات (۲) پر پھر غور کرنا چاہیئے لہذا تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا

اگر بالترتیب $\frac{r}{r+h} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{h} \right] \left(\frac{r}{r} \right)^2 + \dots$

$< یا > r \left(\frac{r}{h} - \frac{r}{h} \right) + \dots$

یعنی اگر بالترتیب $-\frac{1}{4} (r+h)^2 + ط$ کی بڑی قوتیں

$< یا > -\frac{1}{4} r^2 + \dots$

یعنی اگر بالترتیب $(r+h)^2 - ط$ کی دوسری قوت وغیرہ $< یا > r^2 - ط$ کی دوسری قوت وغیرہ سے

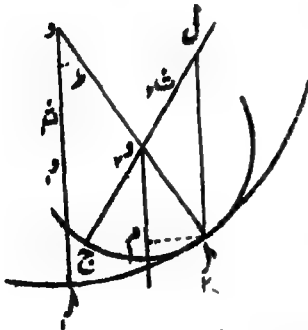
یعنی اگر $(r+h)^2 < یا > r^2$ جبکہ ط کو لا انتہا چھوٹا بنایا جائے

اس سے ظاہر ہے کہ اس صورت میں تعادل غیر قائم ہوگا۔ پس تعادل قائم

صرف اسی صورت میں ہوگا جبکہ $\frac{1}{h} < \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$ باقی تمام صورتوں میں یہ غیر قائم ہوگا۔

اگر نیچے کی سطح کا انحناء دوسری جانب ہو جیسے ذیل کی شکل دکھایا گیا ہے تو اس صورت میں زاویہ ج د م = ف - ط

$$\frac{r-h}{r} =$$



اور تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب
ش، خط لہلی کے بائیں طرف ہو یا دائیں
طرف ہو۔

یعنی اگر بالترتیب د ش، جب (ف - ط) > م لہ

یعنی اگر (ہ-ر) جب $\frac{ر-ط}{ر-ط}$ \geq ر جب ط

یعنی اگر (ہ-ر) $\left[\frac{ر-ط}{ر-ط} - \frac{1}{ر} \left(\frac{ر-ط}{ر-ط} \right) + \dots \right] \geq (ر-ط) - \frac{ط}{ر} + \dots + (م)$

یعنی اگر (ہ-ر) $\left[\frac{ر-ط}{ر-ط} - \frac{1}{ر} \left(\frac{ر-ط}{ر-ط} \right) + \dots \right] \geq (ر-ط) - \frac{ط}{ر} + \dots$

یعنی اگر (ہ-ر) $\geq \frac{ر-ط}{ر-ط}$ جبکہ ط کو لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائے

یعنی اگر (ہ-ر) $\geq \frac{ر-ط}{ر-ط}$ یعنی اگر $\frac{1}{ر} < \frac{1}{ر}$

انتہائی صورت میں جبکہ $\frac{ر-ط}{ر-ط}$ تو مساویست (م) میں ط کی اعلیٰ تر

تو ہیں یعنی جاہلیں۔

اس صورت میں مساوات (م) ذیل کی شکل اختیار کرتی ہے

$$\frac{ر}{ر-ط} \left[\frac{ر-ط}{ر-ط} - \frac{1}{ر} \left(\frac{ر-ط}{ر-ط} \right) + \dots \right] \geq (ر-ط) - \frac{ط}{ر} + \dots + (م)$$

یعنی اگر $\frac{ر}{ر-ط} - \frac{1}{ر} \left(\frac{ر-ط}{ر-ط} \right) + \dots \geq \dots + \frac{ط}{ر} + \dots$

یعنی اگر $\left(\frac{ر-ط}{ر-ط} \right) - ط$ کی قوتیں < 1 ط کی قوتیں

اس لئے جب مذکورہ بالا انتہا چھوٹا ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ تعادل قائم ہو گیا تو قائم

اگر بالترتیب (سا-ر) < 1

یعنی اگر $سا < ۲$

اس صورت میں جبکہ $سا = ۲$ اور اس لئے $سا = ۲$ تو

$$۲ - \frac{سا}{سا} = ط = ۲$$

اور ہم نشاء جب (قہ - ط) = (ہ - ر) جب (قہ - ط) = ر جب ط = ہم لہ ہمیشہ -

اس خاص صورت میں نشاء ہمیشہ لی پر منطبق ہوتا ہے اور اوپر کا جسم ہمیشہ تعادل میں رہے گا خواہ اس کو کسی زاویہ میں سے لگایا جائے کیونکہ ہر صورت میں اس کا مرکز ثقل نقطہ تماس کے انتصاباً اوپر ہوگا۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر اوپر کے جسم کی سطح تماس مستوی ہو جیسا کہ ذیل کی شکل میں، تو ر کی قیمت لا متناہی ہوگی۔ پس تعادل قائم ہوگا اگر

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{s} \text{ یعنی اگر } r > s$$

پس اگر اوپر کے جسم کے مرکز ثقل کا اس کی سطح مستوی سے فاصلہ نکلے جسم کے نصف قطر سے کم ہو تو تعادل قائم ہوگا ورنہ تعادل غیر قائم ہوگا۔



نتیجہ صریح ۲۔ اگر نیچے کا جسم مستوی ہو یعنی س لا متناہی ہو تو تعادل قائم ہوگا اگر

$$\frac{1}{s} < \frac{1}{r} \text{ یعنی اگر } s > r$$

اس لئے اگر کسی جسم کا پیندا کر دی ہو اور اس کو کسی میز پر رکھا جائے تو اس کا تعادل قائم ہوگا بشرطیکہ نقطہ تماس سے اس کے مرکز ثقل کا فاصلہ کر دی سطح کے نصف قطر سے کم ہو۔

۱۵۷۔ سطحوں کے دو حصے جو ایک دوسرے سے مس کرتے ہیں کر دی نہ ہوں بلکہ ایسی سطحیں ہوں جن کے انحناء کے نصف قطر بالترتیب س اور ر ہوں تو بھی اسی طرح سے معلوم ہو سکتا ہے کہ تعادل قائم ہوگا یا غیر قائم اگر بالترتیب

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{h}$$

تعدیل یا انتہائی صورت میں جبکہ $\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ تعادل کے قیام پر غور کرنا قدرے
 مشکل کام ہے۔ اس مسئلہ کے متعلق طالب علم کو چاہیے کہ اوپر دیے گئے تحلیل سکونما سے
 یا منشن Minchin کی سکونیات کا مطالعہ کرے۔

دواں یہ بتایا گیا ہے کہ تعادل قائم یا غیر قائم ہو گا اگر بالترتیب

$$\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} > 1$$

منفی ہو یا مثبت۔

اگر یہ شرط نامکام ہوئے بغیر یہ شرط یقیناً نامکام رہے گی جبکہ نقاط تماس اعظم اور اقل
 انحناء کے نقطے میں تو تعادل قائم یا غیر قائم ہو گا اگر بالترتیب

$$\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} > \frac{(r_1 + r_2)(r_1 + r_2)}{r_1 r_2}$$

منفی ہو یا مثبت ہو۔

امثلہ

۱۔ ایک جسم ایک نصف کرہ اور ایک مخروط کے مساوی مستوی قاعدوں کو جوڑنے سے
 بنا گیا ہے اور اسے ایک مستوی گھردری میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ نصف کرہ میز سے
 مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مخروط کی بڑی سے بڑی اونچائی جس سے جسم قائم توازن کی
 حالت میں ساکن رہ سکتا ہے نصف کرہ کے نصف قطر کی دو گنا ہے۔

۲۔ ایک نصف کرہ مساوی نصف قطر کے ایک کرہ پر کھایا توازن ساکن ہے۔ ثابت کرو
 کہ اگر نصف کرہ کی سطحی سطح کرہ سے مس کرتی ہو تو تعادل غیر قائم ہو گا اور اگر مستوی سطح
 کرہ سے مس کرتی ہو تو تعادل قائم ہو گا۔

۳۔ ایک یکساں سلاخ جس کی موٹائی ۲ ب سے نصف قطر کے بالکل گھردری سے نفی
 اسطرح اندر متشاکل ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل قائم یا غیر قائم ہو گا اگر بالترتیب

ب > ۱ یا ب < ۱۔

۴۔ ایک وزنی یکسان کعب ایک کرہ کے بالاترین نقطہ پر ساکن ہے کرہ کا نصف قطر رہے۔ اگر کرہ اس قدر کم درامد کہ کعب پھسل نہ سکے اور اگر کعب کا ہر ضلع $\frac{17}{14}$ ہو تو ثابت کرو کہ کعب گرنے کے بغیر ایک زاویہ قائمہ میں سے جمول سکتا ہے۔

۵۔ ایک مساوی الساقین مثلث کی شکل کا ایک پتہ ہے جس کا راسی زاویہ عم ہے اس کو ایک کرہ پر جس کا نصف قطر رہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کی سطح مستوی انتصابی ہے اس کے مساوی اضلاع میں سے ایک ضلع کرہ سے مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مثلث کو اپنی سطح مستوی میں ذرا سا ہلادیا جائے تو تعادل قائم ہوگا اگر جب عم کم ہو $\frac{17}{14}$ سے جہاں ۵ مثلث کے مساوی اضلاع میں سے ایک کا طول ہے۔

۶۔ ایک ٹھوس متجانس نصف کرہ کا نصف قطر رہے۔ اس کے مستوی قاعدہ پر ایسی شے کا ایک قائم مخروط بنایا گیا ہے اس جسم کو نصف قطر کے ایک دوسرے ثابت کرہ کی کعب سطح پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ مخروط کا محور انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ ذرا سے ہٹاؤ کے لئے تعادل قائم رکھنا مقصود ہو تو مخروط کا ارتداد زیادہ سے زیادہ

$$\frac{1}{4} \sqrt{1 + (3 + \sqrt{5})} (1 - \sqrt{5}) - 2 \quad \text{ہو سکتا ہے۔}$$

۷۔ ایک معلوم وزن کا ایک رسی کے ذریعے جو ثابت چرخہ پر سے گزرتی ہے اور جس کا مقام معلوم ہے کسی چکلی سطح بائل پر ایک اور وزن دیکو سنبھالے ہوئے ہے۔ سطح مستوی پر و کے تعادل کا محل معلوم کرو۔ بتاؤ کہ یہ قائم ہے۔

۸۔ ایک ٹھوس دایکساں مستطیر قوس ہے جس کا نصف قطر اور وزن ع ہے یہ قوس ایک ایسے نقطہ کے گرد جس کا فاصلہ اس کے مرکز سے ج سے حرکت کر سکتا ہے۔ ایک رسی جو اس قدر کھردری ہے کہ پھسل نہیں سکتی اس کے محیط پر لٹک رہی ہے اور اس کے سروں سے اوزان د اور د بند ہے ہیں۔ تعادل کے محل معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ قائم ہوگا یا غیر قائم۔

۹۔ ایک ٹھوس کرہ ایک اور ثابت کمرے نصف کرہ کی پیالی کے اندر جس کا نصف قطر اس کے نصف قطر کا دو چند ہے ساکن پڑا ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ کے بالاترین نقطہ پر خواہ کتنا ہی وزن رکھا جائے ہر حالت میں تعادل قائم ہوگا۔

۱۰۔ ایک پتلا نصف کر دی پالہ جس کا نصف قطر ب اور وزن W ہے ایک اور ثابت کر کے بالاترین نقطہ پر بحالت تعادل ساکن ہے ثابت کر کے نصف قطر W ہے اور یہ اس قدر کھردر اس پر ہے کہ پالہ پھسل نہیں سکتا پالہ کے اندر ایک چھوٹا اور چمکتا کرہ پڑا ہے جس کا وزن w ہے۔ ثابت کر کے تعادل قائم نہیں ہو سکتا باشتنا کے اس صورت کے جب کہ

$$W > \frac{1}{2}w$$

۱۱۔ ایک کرہ پانی کے ایک برتن کے اندر ڈوبا ہوا ہے ثابت کر کے قاعدہ کے کسی محذب حصہ کی چوٹی پر وہ بحالت قائم تعادل ساکن نہیں رہ سکتا۔

۱۲۔ تین مساوی ذرے ہیں جو ایک دوسرے کو ایسی قوتوں سے ہٹاتے ہیں جو ان کے فاصلوں کے n دیں قوت کی تناسب ہیں۔ ان کو تین مساوی پیکلہ اریسٹرون سے

مربوط کیا گیا ہے۔ تعادل کا محل معلوم کر کے ثابت کر کے کہ یہ قائم ہو گا اگر $n > \frac{1}{2}$

جہاں W کسی رسی کا بغیر کھچاؤ کے طول ہے اور w کھچاؤ کے بعد اس کا طول ہے۔
 ۱۳۔ ایک ٹھوس ناقص نما جس کے محوروں کے طول $2a$ و $2b$ جہاں $a > b$ ایک کھردری سطح مستوی پر اس طرح ساکن ہے کہ W کا محور انقباضی ہے۔ مرکز ثقل انقباضی محور پر پچھلے راس سے فاصلہ h پر ہے۔ ثابت کر کے تعادل قائم ہو گا اگر $h < \frac{a}{2}$ اور $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$ دونوں سے۔

۱۴۔ ایک وزنی مخروط ایک ثابت گردشی مکانی بنا پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کے قاعدہ کا مرکز مکانی مناسکے راس پر ہے۔ مخروط کی بلندی کمون مکانی کے وتر خاص کے دو چند ہے۔ ثابت کر کے پہلے قریب تک تعادل بعد میں ہے لیکن دراصل قائم ہے۔
 ۱۵۔ ایک وزنی جسم جس کی تراخی خط عمود پر ہے ایک کھردری افقی سطح مستوی پر ساکن ہے لہذا اس کا مرکز ثقل نقطہ تماس پر کے منحنی کے مرکز انحناء پر منطبق ہوتا ہے۔ ثابت کر کے تعادل غیر قائم ہے۔

۱۶۔ اگر دہشی مکانی نما کے ایک ٹھوس مقطوع کی بلندی h اور وتر خاص m ہے۔ یہ ایک اور گرجشی مکانی نما پر اس طرح ساکن ہے کہ دونوں کے راس ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ موزا الذکر مکانی نما کا وتر خاص m ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل قائم ہوگا۔

اگر $\frac{3}{2} > \frac{m}{h}$

۱۷۔ ایک پتہ خط دوزیر کی شکل کا ہے جس کا کمون دائرہ کا نصف قطر ہے۔ یہ ایک اور خط عمود پر جس کا کمون دائرہ کا نصف قطر ہے اس طرح ساکن ہے کہ دونوں کے راس ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ اور دونوں کے محور اقتصادی ہیں۔ اگر آپر کے خط دوزیر کے مرکز ثقل کی بلندی اس کے راس کے اوپر ہے تو ثابت کرو کہ تعادل قائم صرف اسی صورت میں ہوگا جبکہ $\frac{3}{2} > \frac{m}{h}$ ۔ ورنہ غیر قائم ہوگا۔

۱۸۔ ایک مکانی نما پیا لہجس کا وزن W ہے ایک انقی میز پر پڑا ہے۔ اس کے اندر کچھ پانی ہے جس کا وزن N ہے اگر پیا لہجس اور پانی کے مرکز ثقل کی بلندی h ہو تو ثابت کرو کہ تعادل قائم ہوگا اگر مکانی کا وتر خاص m $(2 + N)h$ سے زیادہ ہو۔

۱۵۸۔ فرض کرو کہ ہمارے پاس ایک جسم یا جسموں کا ایک نظام ہے جن پر سوائے ان کے وزنوں کے اور کوئی قوت عمل نہیں کر رہی ہے اور جو چٹائی ثابت سطحوں کے تعامل سے یا دیگر قوتوں سے جو موہوم کام کی مساوات میں نہیں آتیں سہارے ہوئے ہیں۔ تب اگر جسموں کے وزن W_1, W_2, \dots ہوں اور کسی ثابت سطح مستوی کے اوپر ان کے مرکز ثقلوں کی بلندیاں y_1, y_2, \dots ہوں تو موہوم کام کی مساوات ہو جاتی ہے

$$- W_1 y_1 - W_2 y_2 - \dots = 0$$

اگر پورے نظام کا کل وزن W ہو اور اس کے مرکز ثقل کی بلندی y ہو تو موہوم کام کی مساوات ہوتی ہے

$$- W y = 0$$

لیکن معنی ہے۔ اس بات کی ضرورت ہے کہ مرکز ثقل کی بلندی کی اعظم یا اقل قیمت ہو۔ اگر مرکز ثقل کی بلندی حقیقتاً بڑی سے بڑی ہے تو نظام کے کسی چھوٹے سے چھوٹے ہٹاؤ کے لئے مرکز ثقل نیچا ہو جائیگا۔ اب اگر اس قسم کے ہٹاؤ کے بعد نظام کو لمحہ بھر کے لئے ساکن کر کے چھوڑ دیا جائے تو ظاہر ہے کہ یہ اپنے ابتدائی محل تعادل کی طرف واپس نہیں آئے گا۔ کیونکہ یہ بات علم حرکت کے اس اصول کے خلاف ہے کہ اس قسم کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت انجام شدہ کام کے مساوی ہوتی ہے۔ پس نظام اپنے محل تعادل کی طرف واپس نہیں جائے گا بلکہ اس سے اور دور ہٹ جائے گا۔ ایسی صورت میں تعادل کو غیر قائم تعادل کہتے ہیں۔

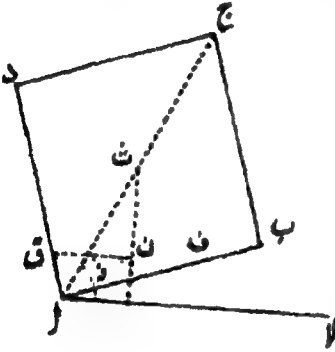
اگر مرکز ثقل کی بلندی حقیقتاً چھوٹی سے چھوٹی ہو تو کسی چھوٹے سے چھوٹے ہٹاؤ کے لئے مرکز ثقل کی بلندی بڑھ جائے گی۔ اس صورت میں اگر نظام کو ایک لمحہ کے لئے ساکن کر کے چھوڑ دیا جائے تو وہ اپنے ابتدائی محل تعادل کی طرف عود کر آئے گا۔ اس لئے اس صورت میں تعادل کو قائم تعادل کہتے ہیں۔

لہذا کسی جسم یا جسموں کے کسی نظام کا تعادل حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔ کسی ثابت سطح مستوی سے اوپر جسم کے مرکز ثقل کی بلندی حتیٰ کہ کسی غیر تابع متغیر ط کے تعادل کے طور پر بیان کردہ مساوات $\frac{W}{r} = \frac{W}{r_0}$ کو ط کے لئے حل کرو اور فرض کرو کہ ط = r_0 ، $r = r_0 + \Delta r$ ، اگر $\frac{W}{r} > \frac{W}{r_0}$ کی قیمت میں ط = r_0 درج کرنے سے یہ مثبت ہو جائے یعنی حقیقتاً اقل ہو تو ط = r_0 سے قائم تعادل کا ایک محل حاصل ہوگا۔

اگر $\frac{W}{r} < \frac{W}{r_0}$ کی قیمت میں ط = r_0 درج کرنے سے یہ قیمت منفی ہو جائے یعنی حقیقتاً اعظم ہو تو ط = r_0 سے غیر قائم تعادل کا ایک محل حاصل ہوگا۔

جیسے جیسے نظام حرکت کر کے مختلف محل اختیار کرے اس کا مرکز ثقل کوئی منحنی مرتسم کرے گا اور ہم جانتے ہیں کہ اس منحنی کے اعظم اور اقل معین اعتباراً

واقع ہونگے اس لئے ظاہر ہے کہ غیر قائم اور قائم تعادل کے محل متبادلاً واقع ہوتے ہیں۔
۵۹- مشتق ۱- ایک مربع پترا دو چکنی میخوں پر جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں
اس طرح ساکن ہے کہ اس کی سطح اتصالی ہے ثابت کر دو کہ تعادل کا مرکز ایک محل ہے
تا دقتیکہ میخوں کا درمیانی فاصلہ مربع کے قطر کے ایک چوتھائی سے بڑا نہ ہو لیکن اگر
بڑا ہو تو تعادل کے تین محل ہو سکتے ہیں جن میں سے متشاكل محل قائم تعادل کا محل ہوگا
اور باقی دو محل غیر قائم تعادل کے۔



فرض کر دو کہ ا ب ج د مربع ہے
اور ف اور ق دو میخیں ہیں۔
فرض کر دو کہ قطر ا ج = ۲ د اور
ا ج افقی خط لا کے ساتھ زاویہ ذ بناتا
ہے ف ق سے اوپر مرکز نقل مش کی
بلندی مش ن (= قی) جہ ذیل سے
حاصل ہوتی ہے

قی = ا ث جب ذ - ا ف جب (ذ - ۴۵)

= د جب ذ - ج جم (ذ - ۴۵) جب ذ - ۵۴ اگر ف ق = ج

یعنی قی = د جب ذ + ج جم ۲۴ - - - - - (۱)

۲۴ - - - - - = د جب ذ - ج جب ۲۴ - - - - - (۲)

۲۴ - - - - - = د جب ذ - ج جم ۲۴ - - - - - (۳)

اب چونکہ میخیں چکنی ہیں اس لئے موبوم کام کی سادات ہو جاتی ہے
دفعہ قی = ۰ اس لئے (۲) کی رو سے تعادل کے محل سادات ذیل سے معلوم ہوتے

جم ذ (د - ۲ ج جب ذ) = ۰ - - - - - (۴)

اس مساوات کے حل ہیں $ف = ۹۰$ اور جب $ف = \frac{۲}{ج ۲}$

آخری مساوات کی اہلیں حقیقی صرف اسی صورت میں ہو سکتی ہیں جبکہ $ج ۲ < د$

یعنی جبکہ $ف < \frac{۱}{ج ۲}$

اب اس صورت پر غور کرو جبکہ $ج ۲ < د$

اب تعادل کے تین محل ہیں۔ پہلا وہ ہے جس میں $ج ۲$ انتصابی ہے اور باقی دو محل وہ ہیں جن میں $ج ۲$ خط انتصابی کے دونوں طرف خط افقی کے ساتھ زاویہ

جب $\frac{۲}{ج ۲}$ بناتا ہے۔

جب $ف = ۹۰$ تو (۳) کی رو سے $\frac{ف}{ف ۲} = - د + ج ۲$ اور یہ مثبت ہے۔

اس لئے $ج ۲$ کی یہ قیمت اقل ہے اور اس لئے تعادل قائم ہے۔

اگر جب $ف = \frac{۱}{ج ۲}$ تو $\frac{ف}{ف ۲} = - د + ج ۲$ جب $ف = \frac{۲}{ج ۲}$ جب $ف = \frac{۲}{ج ۲}$

اور یہ منفی ہے اس لئے اس صورت میں $ج ۲$ اعظم ہے اور بناؤ علیہ تعادل غیر قائم ہے۔

اب وہ صورت لو جس میں $ج ۲ > د$ ۔

اس صورت میں تعادل کا صرف ایک محل ہے جو $ف = ۹۰$ سے حاصل ہوتا ہے اور تب

$\frac{ف}{ف ۲} = - د + ج ۲ =$ منفی

اس لئے $ج ۲$ اعظم ہے اور تعادل غیر قائم ہے۔

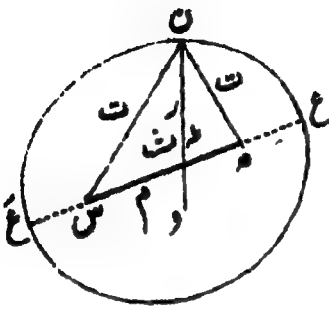
مشق ۲۔ ایک سلاخ $س$ جس کا طول $ج ۲$ ہے اور جس کا

مرکز ثقل $ث$ اس کے وسطی نقطہ $و$ سے فاصلہ $د$ پر ہے سلاخ کے دونوں

سروں سے $ج ۲$ قطعہ طول کی ایک رسی بائیں سرے کو ایک چکنی میخ $ن$ پر

لٹکایا گیا ہے تعادل کا محل معلوم کرو اور دکھاؤ کہ وہ محصل جو انتصابی نہیں ہے

غیر قائم ہے۔



چونکہ $س + ن = ۲$ ج قطع
اس لئے ضروری ہے کہ بیچ اس ناقص پر
کہیں نہ کہیں واقع ہو جس کے ماترے میں
اور $ھ$ ہیں اور جس کا نصف محور اعظم
ج قطع ہے۔

نیز اس کا نصف محور اصغر

$$= ۲ \text{ ج } ۲ \text{ قطع } ھ - م = ۲ \text{ ج } ۲ \text{ مس } ھ$$

پس ناقص کی مسادات ہے $ا$ جب $ھ + م = ۲$ ج ۲ مس $ا$ و یا $ث$ میں سے گزرنے
والے قطبی محوروں کے لحاظ سے

$$\text{جب } ھ \text{ (رجم } ھ + د) + \text{ رجب } ھ = ۲ \text{ ج } ۲ \text{ مس } ھ - (۱)$$

اگر $ھ$ کی وہ قیمت معلوم کر لیں جس کے لئے $ا$ اعظم یا اقل ہے اور ناقص پر کے متناظر
نقطہ $ن$ کو بیچ کا مقام تصور کریں اور $ن$ $ث$ کو انتصابی بنائیں تو ہمیں متبادل کا
نیز حاصل معلوم ہو جائے گا۔

(۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{رجم } ھ + ۲ \text{ ج } ۲ \text{ مس } ھ - ۲ \text{ ج } ۲ \text{ مس } ھ + \text{ رجب } ھ$$

$$\text{اس لئے رجم } ھ = \frac{\text{رجب } ھ + م - ۲ - (ج - د) \text{ مس } ھ}{\text{رجم } ھ}$$

$$\text{رک کی کم سے کم قیمت ہو گا } ۲ \text{ ج } ۲ \text{ مس } ھ - د = ۲ \text{ ج } ۲ \text{ مس } ھ \text{ ہے اور اس وقت رجم } ھ = \frac{\text{د مس } ھ}{۲ \text{ ج } ۲ \text{ مس } ھ}$$

چونکہ اس صورت میں $ا$ کی قیمت اقل ہے اس لئے سلاح کا مرکز نقل بیچ سے نیچے اپنی
کم سے کم گہرائی پر ہے اور اس لئے خط انقی سے اوپر بڑی سے بڑی اونچائی پر ہے،
لہذا متبادل غیر قائم ہے۔ متبادل کے بانی دو محل وہ ہیں جبکہ $ا$ $ع$ یا $ع$ پر منطبق

ہو۔ ان صورتوں میں سلاخ صریحاً انصافی ہوگی۔

اگر نشان اقل ہو تو ظاہر ہے کہ نشان ، ن پر کا عا د ہوگا۔ پس نقطہ ن کا مقام اس امر سے بھی معلوم ہو سکتا ہے کہ یہ وہ نقطہ ہے جس پر کا عا د محور اعظم پر کے ایک معلومہ نقطہ ن میں سے گزرتا ہے۔

۱۶۰۔ دفعہ ۵۶ کے سوال کے قیام تعادل پر بھی اسی طرح آسانی عور کر سکتے ہیں کیونکہ اگر صورت اول میں د کے اوپر شہ کا ارتعاع تھی ہو تو

$$\text{مقی} = (س + ر) \text{ جم ط} - (ر - ہ) \text{ جم } \frac{س + ر}{ط} \quad (۱)$$

$$\therefore \frac{\text{فرقی}}{\text{فرط}} = - (س + ر) \text{ جب ط} + (ر - ہ) \left(\frac{س + ر}{ط} \right) \text{ جب } \frac{س + ر}{ط} \quad (۲)$$

$$\therefore \frac{\text{فناقی}}{\text{فرط}} = - (س + ر) \text{ جم ط} + (ر - ہ) \left(\frac{س + ر}{ط} \right) \text{ جم } \frac{س + ر}{ط} \quad (۳)$$

مقی کی ایک اعظم یا اقل قیمت صریحاً ط = سے حاصل ہوتی ہے۔ تب مقی کی متناظر قیمت چھوٹی سے چھوٹی یا بڑی سے بڑی ہوگی اور بناؤ علیہ تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا

اگر بالترتیب $\frac{\text{فرقی}}{\text{فرط}}$ مثبت ہو یا منفی

یعنی اگر - (س + ر) + (ر - ہ) $\left(\frac{س + ر}{ط} \right)$ مثبت ہو یا منفی

یعنی اگر $ھ \geq \frac{س + ر}{ط}$

اگر ھ اس قیمت کے مساوی ہو تو $\frac{\text{فرقی}}{\text{فرط}} = ۰$ جبکہ ط =

اور احصائے تفرقات کے قواعد کی رو سے ہمیں بالا ترتیب کے تفرقی سرود پر غور کرنا چاہیئے۔

اس صورت میں

$$\frac{\text{فرقی}}{\text{فرط}} = (س + ر) - [جم ط + جم \left(\frac{س + ر}{ط} \right)]$$

$$\frac{F_1}{F_2} = (s+r) \text{ جب } P - \left(\frac{s+r}{r}\right) \text{ جب } \left(\frac{s+r}{r}\right) P$$

$$\frac{F_1}{F_2} = (s+r) \text{ جب } P - \left(\frac{s+r}{r}\right) \text{ جب } \left(\frac{s+r}{r}\right) P$$

اگر $P = 0$ تو $\frac{F_1}{F_2}$ صفر ہوگا اور $\frac{F_2}{F_1}$ منفی ہوگا۔

اس لئے T اعظم ہے اور تعادل غیر قائم ہے۔

دوسری صورت میں W کے نیچے W کی گہرائی T ہو تو

$$T = (s-r) \text{ جب } P - (h-r) \text{ جب } \frac{s-r}{r} P$$

اور تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب T اعظم یا اقل ہو

یعنی اگر بالترتیب $\frac{F_1}{F_2}$ منفی ہو یا مثبت ہو جبکہ $P = 0$ ۔

$$\frac{s}{r} \geq \frac{r}{s-r} \text{ یعنی اگر بالترتیب حسب سابق } h$$

اگر h اس قیمت کے مساوی ہو تو

$$\frac{F_1}{F_2} = (s-r) \text{ جب } P + \text{جب } \frac{s-r}{r} P$$

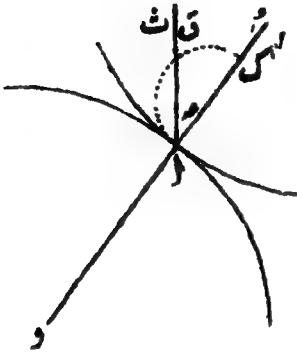
تب $\frac{F_1}{F_2}$ صفر ہوگا جبکہ P صفر ہو اور $\frac{F_2}{F_1}$ منفی یا مثبت ہوگا اگر بالترتیب

$$1 - \left(\frac{s-r}{r}\right)^2 \text{ منفی یا مثبت ہو}$$

یعنی اگر $s < r$

اس لئے T اعظم یا اقل ہوگا اور بناءً علیہ تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر $s < r$

۱۶۱۔ اگر ذہن ۱۵۶ کے سوال میں جسم کے محل توازن میں مشترک عماد انتصابی نہ ہو



تو اس صورت میں سوال پر ذیل کے طریقے سے غور کر سکتے ہیں بشرطیکہ مٹھاؤ ایسا ہو کہ مرکز ثقل کا مشترک عماد میں سے گزرنے والے انتصابی سطح مستوی میں حرکت کرے۔

فرض کرو کہ نقطہ تماس ل پر اوپر کے اور نیچے کے جسموں کے انحنائے نصف قطر بالترتیب مساوی ہیں۔ کیونکہ تقادل کا عمل ہے اس لئے ث انتصاباً ل کے اوپر ہو گا۔ فرض کرو کہ ل ث = ۵ اور ث ل = ۵

تو تقادل قائم یا غیر قائم ہو گا اگر اوپر کے جسم کو ذرا سا مٹھانے پر جسم کا مرکز ثقل ث بالترتیب اوپر یا نیچے کی طرف حرکت کرے یعنی اگر بالترتیب ث کے طریق کی تعمیر اوپر کی طرف یا نیچے کی طرف ہو یعنی اگر بالترتیب ث کے طریق کا مرکز انحنائے سے اوپر یا نیچے ہو۔ گردو نیات کے انحنائے کی رو سے ث کے طریق کا نصف قطر انحناء ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{\text{جم م}}{h} + \frac{\text{جم م}}{h}$$

$$\text{جس سے م} = \frac{h \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)}{\frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{\text{جم م}}{h}}$$

جاں ث سے ل کی طرف م کے ناچنے کو مثبت قرار دیا جائے اس لئے ہر مثبت ہو گا یا منفی جبکہ ث کے طریق کا مرکز انحنائے سے نیچے ہو گا یا اوپر

یعنی اگر بالترتیب $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} < \frac{\text{جم م}}{h}$ یا $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > \frac{\text{جم م}}{h}$

یعنی اگر بالترتیب $h < \frac{r}{r+h}$ جمہ

پس توازن قائم یا غیر قائم ہوگا جبکہ بالترتیب $h < \frac{r}{r+h}$ جمہ

اگر ہم $\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لکھیں کہ

اور اس لئے $\frac{r}{r+h} = \frac{1}{r}$ اور اگر اس دائرہ سے جو ایک کو قطر مان کر کھینچا جائے قی پر ملے تو

اق - ایک جمہ = $\frac{r}{r+h}$ جمہ

پس تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب $h < \frac{r}{r+h}$ (اق)
یعنی اگر بالترتیب اس دائرہ کے اندر یا باہر واقع ہو اس دائرہ کو اس بنا پر قیام کا دائرہ کہتے ہیں۔

اگر اس دائرہ پر واقع ہو تو اس کا تعادل تقرب کے پہلے درجہ تک تعدیلی ہوگا اس صورت میں اس کے طریق کا نصف قطر انحصار انتہائی ہوگا اور اس کے طریق پر نقطہ انعطاف ہوگا اس دائرہ کو اس لئے اکثر اوقات انعطافوں کا دائرہ بھی کہتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ ایک دہنی یکسان سلاخ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سر ایک چکنی انتصابی دیوار کے ساتھ ٹکا ہوا ہے اور اس کے طول پر کا ایک اور نقطہ ایک چکنی میخ پر ساکن ہے۔ تعادل کا محل معلوم کرنا ثابت کرو کہ یہ غیر قائم ہے۔

۲۔ دو مساوی یکساں سلاخوں کو ایک سرے پر مضبوطی سے جوڑ دیا گیا ہے اور ان کے درمیان زاویہ h بنا ہے اور یہ نصف قطر کے ایک چکنے کرہ پر انتصابی سطح مستوی میں ساکن ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ تعادل قائم یا غیر قائم میں ہوگی اگر بالترتیب ہر ایک سلاخ کا طول $\frac{r}{2}$ ہے

۳۔ ایک منہتیر کے سرے دو چکنی ہائل سطحوں پر جو افق کے ساتھ زاوے ۱ اور ۲ بنائی ہیں اور جن کا خط تقاطع افقی ہے ساکن ہیں۔ تقادل کا محل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ غیر قائم ہے۔

۴۔ ایک یکساں وزنی سلاح (ب قبضہ) کے گرد انتصابی سطح مستوی میں آزادانہ حرکت کر سکتی ہے دوسرے سرے ب کو ایک وزن کے ذریعہ جو اس کے انتصابی اوپر ایک چکنی چرخ ج پر سے گزرتا ہے سہارا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تقادل کا وہ محل جس میں لب سمت انتصابی کے ساتھ کوئی مسلمان رکھتا ہو غیر قائم ہے۔

۵۔ ایک چکنی سلاح لب ہے جس کا وزن ۱ ہے۔ اس کا ایک سر ۱ ایک چکنی افقی سطح مستوی (ج پر ساکن ہے اور دوسرا سر لب ایک چکنی انتصابی دیول لب ج کے ساتھ جکا ہوا ہے۔ سرے ۱ کے ساتھ ایک رسی بندھی ہوئی ہے جو ج پر ایک چکنی چرخ پر سے گزرتی ہوئی ایک وزن کو سہارے ہوئے ہے۔ (ب ج ایک انتصابی سطح مستوی میں ہیں۔ تقادل کا محل معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ غیر قائم ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۴ مشق ۲ کی سلاح کا تقادل قائم ہے۔

۷۔ چار یکساں سلاخیں ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ۲ ہے، ان کے سروں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے اور اس معین کو دو چکنی میخوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ ۱ ہے اس طرح ٹکا گیا ہے کہ میخیں مختلف سلاخوں سے مس کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ نظام تقادل میں ہوگا جبکہ معین مربع ہو لیکن یہ تقادل تمام ہٹاؤں کے لئے قائم نہیں ہے۔

۸۔ ایک مربع پتھر کے ایک کونے کے ساتھ ایک رسی بندھی ہے جس کا طول مربع کے ایک ضلع کے مساوی ہے۔ رسی کے ایک سرے کو دیوار کے ایک نقطہ کے ساتھ باندھ کر پتھرے کو اس طرح متبادل رکھا گیا ہے کہ اس کی سطح مستوی دیوار پر عمود وار ہے۔ تقادل کا محل معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ قائم ہے۔

۹۔ ایک یکساں سادی الساقین پتھر (ب ج ہے یہ پتھر دو چکنی میخوں پر جن کا درمیانی فاصلہ ج ہے اور جن کا خط وصل افقی ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کے ضلع لب اور (ج میخوں سے مس کرتے ہیں۔ اگر ب ج پر عمود (د) ا ہر

کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ تقادل کے تین محل ہیں ان میں ایک جس میں Δ انتصابی ہے قائم ہے اور باقی دو غیر قائم ہیں اگر $\angle 3$ قائم ہے۔ لیکن اگر $\angle 3$ قائم نہ ہو تو تقادل کا مرتبہ ایک محل ہے جو غیر قائم ہے۔

۱۰۔ ایک مربع تختہ کو ایک رسی کے ذریعہ جو اس کے اوپر کے دو کناروں کے ساتھ بندھی ہے اور ایک کھونٹی پر سے گزرتی ہے دیوار کے ساتھ اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ تختہ کی سطح دیوار سے مس کرتی ہے۔ اگر رسی کا طول تختہ کے بین زاویے سے کم ہو تو ثابت کرو کہ تقادل کے تین محل ہیں نیز بتاؤ کہ تشاکل کا محل غیر قائم ہے۔

۱۱۔ ایک مستطیل تصویر ہے جس کے اوپر کے کنارے کے دو متشاکل نقطوں کے ساتھ جن کا درمیانی فاصلہ 2 ہے ایک رسی کے دو سرے باغ و دئے گئے ہیں اور اس رسی کے ذریعہ تصویر کو ایک چکنی کھونٹی پر اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ تصویر انتصابی ہو۔

تک پہلی ہے اگر تصویر کی بلندی 1 ہو تو ثابت کرو کہ اگر $1 < 2$ جہاں 2 تقادل کا کوئی ایسا محل نہیں ہے جس میں تصویر کا ضلع افق کے ساتھ کوئی زاویہ بناتا ہو۔ لیکن اگر

$1 > 2$ جہاں 2 تقادل کے دو محل ہیں اور دونوں قائم ہیں جہاں رسی کا طول ہے۔

پہلی ثابت کرو کہ موخر الذکر صورت میں وہ محل جس میں یہ ضلع انتصابی ہے بعض مثالوں کے لئے قائم اور بعض کے لئے غیر قائم ہے۔

۱۲۔ ایک چمکا قطع ناقص ہے جس کا محور انتصابی ہے، اس کے اندر ایک سلاح رکھی گئی ہے جس کے دونوں سرے ناقص کی قوس پر ہیں۔ اگر سلاح کا طول ناقص کے وتر فاصل سے کم ہو تو ثابت کرو کہ تقادل کے محل میں یہ ماسک میں سے گزرے گی۔

۱۳۔ ایک یکساں سلاح کو جس کا طول 2 ہے ایک مکانی تار کے دونوں سروں کے ساتھ چمکنے والوں کے ذریعہ باغ و دیا گیا ہے۔ تار کا محور انتصابی ہے اس نیچے کی طرف اور وتر خاص 1 ہے، ثابت کرو کہ تقادل کے محل میں سلاح افق کے ساتھ جو زاویہ

طہ بناتی ہے وہ $\theta = \frac{1}{2}$ سے حاصل ہوتا ہے اور اگر یہ محل وجود رکھتے ہوں تو وہ

قائم تعادل کے محل ہونگے۔

۱۴۔ ایک یکساں سلاخ ایک چکنے گردشی مکافی نما کے اندر جس کا محور انتصابی اور اس نیچے کی طرف ہے متوازی الافق محل میں ساکن رہے۔ ثابت کرو کہ اگر سلاخ اس کے نیچے ہو تو انتصابی سطح مستوی میں سب ہٹاؤں کے لئے تعادل قائم ہوگا اور اگر اوپر ہو تو غیر قائم ہوگا۔

۱۵۔ ایک ٹھوس نصف کرہ ہے جو ایک سطح مستوی پر جوافق کے ساتھ زاویہ θ جب θ بناتی ہے ساکن رہے اور سطح مستوی اس قدر کھردری ہے کہ نصف کرہ پھسل نہیں سکتا۔ تعادل کا محل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ قائم ہے۔

۱۶۔ ایک مکمل طور پر کھردرا کرہ ہے جس کا نصف قطر r ہے، اسے ایک مستوی رخ والا جسم مس کرتا ہے اور نقطہ تماس پر کا عماد خط انتصابی کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ اگر مرکز ثقل نقطہ تماس سے انتصافاً اوپر h فاصلہ پر ہو تو ثابت کرو کہ تعادل قائم ہوگا اگر $h > r \sin \theta$ اور غیر قائم ہوگا اگر $h < r \sin \theta$ ۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ اگر کسی قطع ناقص کے قطر کے ذریعہ اس کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے اور ایک نصف کو اس کی منحنی سطح کے بل کسی افقی سطح مستوی پر رکھا جائے تو تعادل کا ایک محل قائم ہوگا اگر خروج المرکز $\frac{2}{3\pi}$ سے کم ہو۔

۱۸۔ ایک ناقصی اسطوانہ کو ایک مائل مستوی پر جوافق کے ساتھ رگڑ کے زاویہ سے کم زاویہ بناتی ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور متوازی الافق رہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ ساکن نہیں رہ سکتا اگر سطح مائل کا میلان جب $(\frac{\theta}{2} - \frac{\alpha}{2})$ سے کم ہو اور اگر میلان جب $(\frac{\theta}{2} + \frac{\alpha}{2})$ سے کم ہو۔

کے مساوی ہو تو تعادل پہلے قریب تک تبدیلی ہوگا۔

۱۹۔ ایک ناقصی قرص جس کے نصف محور a اور b ہیں ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح پھلتا ہے کہ ہیئت وہ چکنی سلاخوں ON اور OQ سے مس کرتا ہے جہاں سطح مستوی میں علی القوائم واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ قائم تعادل کے محلوں میں ناقص کا

محور اعظم ایک نہ ایک سلاخ کے متوازی ہوگا اور غیر قائم تعادل کے محل میں یہ ون کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے جہاں جب ط = $\frac{و-ب}{ب}$ جب ط = $\frac{و-ب}{ب}$ جہاں خط ون کا میلان ہے سمت انتقابی کے ساتھ۔

۲۰۔ نیم محوروں و اور ب کا ایک چکنا ناقصی اسطوانہ دو مستوی سطحوں کے درمیان پھسلتا ہے جن میں ہر ایک سمت انتقابی کے ساتھ زاویہ عم بناتی ہے۔

اگر مس عم اور $\frac{و-ب}{ب}$ کے درمیان واقع ہو تو ثابت کر دو کہ قائم تعادل کے محل میں اسطوانہ کا محور اعظم خط انتقابی کے ساتھ زاویہ

$$\text{مس عم} = \frac{و-ب}{ب} \quad \text{بناتا ہے}$$

میز جبکہ مس عم ان حدود کے اندر واقع نہ ہو تو قائم اور غیر قائم تعادل کے محل معلوم کرو۔

دسواں باب

تین ابعاد میں قوتیں

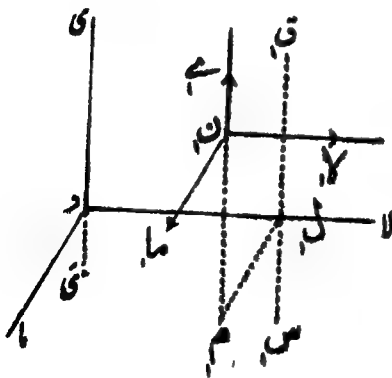
۱۶۲۔ ایک استوار جسم کے معلومہ نقطوں پر قوتوں کا ایک دیا ہوا نظام حاصل کر رہا ہے۔ ان کا حاصل معلوم کر۔
کسی موزوں نقطہ کو مبدایا اساسی نقطہ لہ اور اس میں سے محدودوں کے محور و لاہ و ما کوئی کھینچو۔

فرض کرو کہ جسم کے کسی نقطہ ن کے محدود (لا، ما، ی) ہیں اور اس پر دی ہوئی قوتوں میں سے ایک قوت قی عمل کرتی ہے جس کے اجزاء ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما، ی کے متوازی ہیں۔

سطح لا و ما پر ن، م عمود گراؤ اور خط و لا پر م، ل عمود کھینچو اور

قی، ل، س، خط وی کے متوازی کھینچو۔

خطوط وی، وی، وی، قی، ل، س کے ساتھ ایسی قوتیں حاصل کرو جن میں ہر ایک م کے مساوی ہو۔ چونکہ یہ قوتیں آپس میں متادل



میں ہیں اس لئے ان سے دی ہوئی قوتوں کے نظام پر کوئی اثر نہیں پڑتا اب قوتیں
 مے جون مے اور لی مے کے ساتھ عمل کرتی ہیں ایک جفت بناتی ہیں
 جس کا معیار اثر مے \times مے لی یعنی مے \times مے ہے اور جو اس سطح مستوی میں
 جو ولا پر عمود وار ہے ولا کے گرد مثبت سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے وہ
 اس جفت کے معادل ہیں جس کا محور ولا ہے اور جو مثبت ہے۔

لی، ق، اور وی کے ساتھ عمل کرنے والی قوتیں مے ایک جفت بناتی
 ہیں جس کا معیار اثر مے \times ول یعنی مے لا ہے اور جو ولا پر عمود وار
 سطح مستوی میں و ما کے گرد منفی سمت میں عمل کرتی ہے۔
 اس لئے ان پر عمل کرنے والی قوت مے ان کے معادل ہے
 و پر ایک قوت مے جو وی کے ساتھ عمل کرتی ہے

ولا کے گرد معیار اثر مے کا ایک جفت

و ما کے گرد معیار اثر - لا مے کا ایک جفت
 اسی طرح سے ن پر عمل کرنے والی قوت لا معادل ہے ان کے

و پر ولا کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت لا

و ما کے گرد معیار اثر + ی، لا کا ایک جفت

وی کے گرد معیار اثر - لا، لا کا ایک جفت

اسی طرح ن پر عمل کرنے والی قوت ما معادل ہے ان کے

و پر و ما کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت ما

وی کے گرد معیار اثر + لا، ما کا ایک جفت

ولا کے گرد معیار اثر - ی، ما کا ایک جفت

لا، ما، می میں [دفعہ ۲۶]

دفعہ ۲۶ کی رو سے تین ترکیبی جنت معادل ہیں ایک واحد جنت (ش) کے جو ایسا ہے کہ $ش = ل + م + ن$ اور جس کا محور وہ خط مستقیم ہے جس کی سمتیہ جوب التمام $\frac{ل}{ش}$ ، $\frac{م}{ش}$ ، $\frac{ن}{ش}$ ہیں۔

اس طرح توفیقوں کا نظام معلومہ ایک اختیاری طور پر منتخب کئے ہوئے نقطہ و میں سے گزرنے والی ایک واحد قوت اور ایک ایسے جنت میں تحویل ہو گیا جس کا محور وہیں سے گزرتا ہے۔

۱۶۳۔ ایک قوت اور ایک جنت کے اس اجتماع کو اصطلاح میں حرکت (Dyname) کہتے ہیں اور مقداریں لا، ما، می اور ل، م، ن اس کے اجزائے ترکیبی کہلاتی ہیں۔

محوروں کے ساتھ جو قوتیں عمل کرتی ہیں اور محوروں کے گرد جو جنت عمل کرتے ہیں ان کو اختصاراً نظام (لا، ما، می، ل، م، ن) سے موسوم کیا جاسکتا ہے۔

۱۶۴۔ کسی خط کے گرد قوت کے معیار اثر کی عام تعریف۔

کسی خط کے گرد قوت ف کا معیار اثر اس طرح معلوم کیا جاتا ہے قوت ف کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کرو جن میں سے ایک جزو قوت $\frac{ف}{ش}$ ہوئے خط کے متوازی ہو اور دوسرا $\frac{ف}{ش}$ اس پر عمود وار ہو، تب اس حاصل ضرب کو جس کو $\frac{ف}{ش}$ کے خط عمل اور خط معلومہ کے درمیان چھوٹے سے چھوٹے فاصلہ کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے معلومہ خط کے گرد قوت ف کا معیار اثر کہتے ہیں۔ مثلاً دفعہ ۱۶۲ کی شکل میں محور لا کے گرد معلومہ قوت ق کا معیار اثر جزو ترکیبی

ما، می + ل اور اس کے خط عمل اور لا کے درمیان جو چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے ان کے حاصل ضرب کے مساوی ہے اور اس لئے ل کے گرد

جزد ترکیبی $ما + مے$ کے معیار اثر کے مساوی ہے جو دفعہ ۳۸ کی رو سے
 ل کے گرد دو اجزائے ترکیبی $ما$ اور $مے$ کے معیار اثروں کے مجموعہ کے
 مساوی ہے اور یہ مجموعہ $ما + مے$ - $ی$ $ما$ کے مساوی ہے۔

۱۶۵۔ ایک استوار جسم کے تعادل کی عام شرائط۔

ایک قوت $سرا$ اور جنت $ث$ دونوں فکر تعادل پیدا نہیں کر سکتے۔ کیونکہ
 جنت $ث$ کی بجائے ہم ایسی دو مساوی اور غیر موافق قوتیں لے سکتے ہیں
 جن میں سے ایک قوت اس نقطہ $و$ میں سے گزرے جہاں قوت $سرا$ جنت کے
 مستوی سے ملتی ہے۔ یہ قوت اور قوت $سرا$ لکڑ ایک واحد قوت میں ترکیب
 پاسکتے ہیں جو $و$ میں سے گزرتی ہے اور جنت کی دوسری قوت سے نہیں ملتی
 اور اس لئے تعادل پیدا نہیں کر سکتی۔

اس لئے تعادل صرف اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ قوت $سرا$ اور جنت
 دونوں جداگانہ معدوم ہوں۔

لیکن دفعہ ۱۶۲ کی رو سے $ث = لا + ما + مے$

اور $ث = ل + ہ + ن$

اس لئے تعادل کے لئے ضروری ہے کہ

$لا = ما =$ اور $مے =$

$ل = ہ =$ اور $ن =$

یعنی محدودوں کے کسی تین محوروں کے متوازی قوتوں کے کسی نظام کے

تحلیلی حصوں کے مجموعے جداگانہ معدوم ہوں اور نیز انہی تین محوروں کے گرد قوتوں
 کے معیار اثروں کے مجموعے بھی جداگانہ صفر ہوں۔

مثالیں

۱۔ ایک مکعب کا مرکز ثابت ہے اور اس کا کنارہ ۲ ہے، اس کے دو متصل رخوں کے اُن بن زاویوں کے ساتھ جو ایک دوسرے سے نہیں ملتے دو مساوی قوتیں سر عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اس جفت کا معیار اثر جو مکعب کو ساکن رکھ سکتا ہے قوتوں کی سمتوں کے لحاظ سے مساویات یا مساوی ہوگا۔

۲۔ چھ قوتیں جن میں سے ہر ایک F کے مساوی ہے ایک ہی ترتیب میں ایک مکعب کے اُن کناروں کے ساتھ عمل کرتی ہیں جو ایک معلوم وتر سے نہیں ملتے۔ ثابت کرو کہ اُن کا حاصل ایک جنت ہے جس کا معیار اثر $2\sqrt{3} \times F$ ہے، جہاں $\sqrt{3}$ مکعب کے کنارہ کا طول ہے۔

۳۔ ایک مکعب کے مرکز کو کنارے DA ، DB ، DC ، DE ، DF ، DG اور DH کے ساتھ DB ، DC ، DE ، DF ، DG اور DH کے ساتھ قوتیں F ، $2F$ ، $3F$ ، $4F$ ، $5F$ ، $6F$ کے ساتھ عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ قوتیں D پر ایک واحد قوت $6\sqrt{3}F$ کے معادل ہیں جس کے خط عمل کی سمتی جیب التمام 30° ، 45° ، 60° کے تناسب میں مع ایک جفت کے جس کا معیار اثر $2\sqrt{3}F$ ہے اور جس کی سمتی جیب التمام مناسب ہیں 30° ، 45° ، 60° کے۔

۴۔ ایک چار سطحی کے رأسوں میں سے مقابل کے رخوں پر عمود وار اور ان کے متناسب قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ توازن میں ہونگی اگر یہ سب کی سب اندر کی طرف یا باہر کی طرف عمل کریں۔

۵۔ کسی مستقیم الاضلاع مجسم شکل کے ہر ایک رخ میں ایک ایسا جفت عمل کرتا ہے جس کا محور باہر کی طرف کھینچا گیا ہے اور جو اس رخ کے رقبہ کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ یہ باہم توازن میں ہیں۔

۶۔ ایک یک چادر سی زاید نما کے ایک ہی نظام کے چار کونوں کے ساتھ چار قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ان کی مقداریں ایسی ہیں کہ اگر ان کو ان محفوظ عمل کے متوازی

ایک نقطہ پر منتقل کر دیا جائے تو یہ متبادل ہوتی ہیں۔ ثابت کرو کہ کمونوں کے ساتھ عمل کرنے کی صورت میں بھی وہ باہم متبادل ہونگی۔

$$[\text{ایک چادری زائٹا} \frac{1}{19} + \frac{1}{17} - \frac{1}{13} = 1] \text{ کے کسی کمون کی مساوات ہے}$$

$$\frac{1 - \text{ب جب ط}}{\text{ب جب ط}} = \frac{1 - \text{ب جب ط}}{\text{ب جب ط}} = \frac{1}{\text{ب جب ط}}$$

۱۶۶۔ مقید اجسام۔ مقید جسم سے ایسا جسم مراد ہے جس کے ایک یا دو نقطے ثابت کر دئے گئے ہوں۔ مثلاً اگر ایک سلاخ دیوار کے ساتھ ایک گولہ خانہ قبضہ کے ذریعہ جوڑ دی جائے تو اس کا ایک نقطہ ثابت سمجھا جائے گا اور سلاخ مقید کہلا سکی۔ اگر ایک استوار جسم کے دو نقطے ۱ اور ۲ ثابت کر دئے گئے ہوں تو خط ۱ ب پر کے سب نقطے ثابت ہو گئے اور جسم کی حرکت کے لئے صرف محور ۱ ب کے گرد گھومنے کا طریقہ باقی رہ جائے گا۔ مثلاً ایک دروازہ جس کو چوکھٹ کے ساتھ دو قبضوں کے ذریعے حاصل کر دیا گیا ہو قبضوں میں سے گزرنے والے خط کے گرد گھوم سکتا ہے۔

اگر کوئی جسم ایسا ہو جس کے تین نقطے ثابت کر دئے گئے ہوں اور یہ تینوں نقطے ایک ہی خط میں واقع نہ ہوں تو یہ بھی جسم ناقابل حرکت ہوگا۔

۱۶۷۔ ایک استوار جسم کا ایک نقطہ ثابت ہے۔ اس کے متبادل کی شرائط معلوم کرو۔

ثابت نقطہ کو سہاء و مانہ اور اس میں سے گزرنے والے تین علی التوا تم خطوط کو محور فرض کرو۔ نیز فرض کرو کہ جسم پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں حسب دفعہ ۱۶۲ مقید نقطہ و پر عمل کرنے والی قوت کے علاوہ محوروں کے متوازی اجزائے ترکیبی لا، ما، مے میں اور ان محوروں کے گرد ترکیبی جنوں لی، ہر، ن میں تحلیل ہو جاتی ہیں۔

فرض کرو کہ جسم کو متبادل رکھنے کے لئے وہ جو قوت عمل کرتی ہے اس کے

اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما اور نئے ہیں تب حسب دفعہ ۱۶۵
تبادل کے لئے

$$\text{لا} + \text{لا} = \text{ما} + \text{ما} = \text{نئے} + \text{نئے} = (۱)$$

$$\text{ل} = \text{مر} = \text{ن} = (۲)$$

مساواتوں (۱) سے اوپر کے تعامل کے اجزاء بیرونی قوتوں کے رقوم میں معلوم
ہوتے ہیں۔

مساواتوں (۲) سے تبادل کی شرائط معلوم ہوتی ہیں یعنی یہ کتابت نقطہ و میں سے
گزرنے والے تین علی القوائم خطوط کے گرد بیرونی قوتوں کے معیار اثراتوں
کے مجموعے جداگانہ صفر ہونے چاہئیں۔

اگر سب بیرونی قوتیں ایک ہی سطح مستوی میں عمل کریں جو و میں گزرتی ہو تو اوپر
کی شرائط اس سادہ تر شرط میں تحویل ہو جاتی ہیں کہ و کے گرد معیار اثراتوں کا مجموعہ
صفر ہونا چاہئے۔

۱۶۸۔ ایک استوار جسم کے دو نقطے ل اور ب ثابت ہیں اور اس لئے جسم محور ل ب
کے گرد گھوم سکتا ہے۔ تبادل کی شرائط معلوم کرو۔

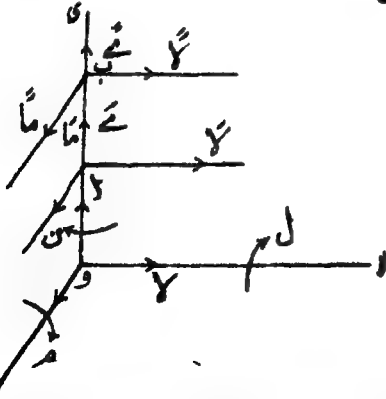
خط ل ب کو ی کا محور مانو اور اس پر کے کسی نقطہ کو مبدأ فرض کرو۔

فرض کرو کہ و = نئے، ب = نئے،

نیز فرض کرو کہ مقید کرنے والی قوتوں
کے اجزائے ترکیبی ل اور سب پر

لا، ما، نئے اور لا، ما اور

نئے ہیں۔



نیز فرض کرو کہ مقید کرنے والی
قوتوں کے علاوہ جسم پر عمل کرنے والی

بیرونی قوتیں حسب دفعہ ۱۶۲ حسب قوتوں اور جنقوں میں تحویل ہو جاتے ہیں

محوروں کے متوازی و پُرخل کرنے والی تین ترکیبی قوتوں لا، ما، مے اور محوروں کے گرد ترکیبی جفتوں لی، مر، ن۔
تب کل نظام کے لئے ترکیبی قوتیں یہ ہیں:-

$$لا + لا + لا، ما + ما + ما اور مے + مے + مے$$

اور ترکیبی جفت یہ ہیں:-

$$ل - مائی - مائی، مر + لائی + لائی اور ن$$

پس تعادل کی شرائط یہ ہیں

$$لا + لا + لا = لا \dots \dots \dots (۱)$$

$$ما + ما + ما = ما \dots \dots \dots (۲)$$

$$مے + مے + مے = مے \dots \dots \dots (۳)$$

$$ل - مائی - مائی = ل \dots \dots \dots (۴)$$

$$مر + لائی + لائی = مر \dots \dots \dots (۵)$$

$$ن = ن \dots \dots \dots (۶)$$

اور

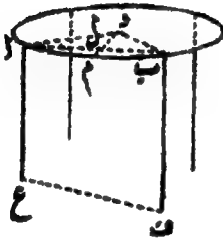
(۱) اور (۵) سے لا اور لا حاصل ہوتے ہیں، (۲) اور (۴) سے ما اور ما معلوم ہوتے ہیں۔ مے اور مے کے درمیان صرف ایک ہی رشتہ مساوات (۳) ہے، اس لئے ان کی قیمتیں غیر متعین ہیں۔

بالآخر بیرونی قوتوں کے درمیان صرف ایک ہی رشتہ مساوات (۶) ہے پس تعادل کی شرط یہ ہے کہ ثابت محور کے گرد بیرونی قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ صفر ہو۔

۱۶۹۔ تعادل مے اور مے کو ناقابل تعین ہی ہونا چاہیے تھا کیونکہ بطور مثال فرض کرو

کہ جسم ایک دروازہ ہے جو حسب معمول دو سہاروں ل اور ب پر تھا ہوا ہے اگر ل پر کی کھونٹی کو اپنے اصلی مقام سے ذرا اوسکا کر دیا جائے تو دروازہ کا کل بوجھ اس کھونٹی پر آ پڑے گا۔ اگر برعکس اس کے اسے اپنے اصلی مقام سے ذرا نیچے کر دیا جائے تو دروازہ کا کل بوجھ ب پر آ پڑیگا۔ اس لئے جب جو کھٹ کی کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ دروازہ کے چلوں کے درمیانی فاصلہ کے عین برابر ہو تو ہمیں لا دیا یہی توقع کرنی چاہیے کہ وزن کی تقسیم ناقابل یقین ہے۔

۷۰۔ مشق ۱۔ ایک مستدیر کیساں میز کا وزن ۸۰ پونڈ ہے۔ یہ چار پایوں پر جو اس کے کنارہ کے گرد تشاکلا گئے ہوئے ہیں سہارا ہوا ہے



فرض کرو کہ میز کا مرکز و ہے اور ل ع اور ب ف اس کی دو ٹانگیں ہیں اگر وزن کناہ کے اُس حصہ سے لٹکا یا جائے جو ل اور ب کے درمیان ہے تو میز اگر گھوم سکتی ہے تو نقاط ع اور ف کو ملانے والے خط کے گرد گھوم سکی نیز یہ گھومنے کے عین قریب اُس وقت ہوگی جب کہ خط ع ف کے گرد میز کے وزن کا میعار اثر لٹکائے ہوئے وزن کے میعار اثر کے ٹھیک مساوی ہو۔

اب لٹکائے ہوئے وزن کا میعار اثر صریحاً زیادہ سے زیادہ اُس وقت ہوگا جبکہ اسے قوس ل ب کے وسطی نقطہ پر رکھا جائے۔

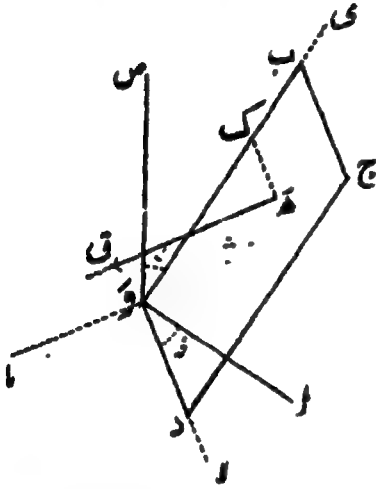
فرض کرو کہ و م، ل ب سے ل پر ملتا ہے اور مطلوبہ وزن لا ہے۔
ع ف کے گرد میعار اثر لینے سے

$$لا \times ل م = ۸۰ \times ول$$

$$لا (۱ - \frac{۱}{۲۲}) \times ول = ۸۰ \times \frac{۱}{۲۲} \times ول \text{ یعنی } لا = ۱۹۳ \frac{۱}{۲۲} \text{ پونڈ وزن}$$

مشق ۲۔ ایک دروازہ جس کا وزن و ہے اس طرح ٹک رہا ہے کہ اس کے قبضوں کو ملانے والا خط سمت انتظامی سے زاویہ ط بنتا ہے۔ قبضوں کا درمیانی فاصلہ

۲ھ ہے۔ دروازہ کو قبضوں میں سے گزرنے والے انصافی مستوی سے زاویہ ذی پر قائم رکھنے کے لئے ایسی قوت قی درکار ہوتی ہے جو دروازہ کے عمود وار ہے اور قوت کا خط عمل قبضوں کے خط اور دروازہ کے پچھلے کنارہ سے بالترتیب ب اور ج کے فاصلہ پر ہے۔ قوت قی کی مقدار اور قبضوں پر کے تعامل جہاں تک یہ معلوم ہو سکتے ہیں محسوب کرو۔



فرض کرو کہ د اور قبضوں و اور ب کو کٹانے والے خط پر عمود وار ہے اور اس مستوی میں واقع ہے جو و ب اور انصافی خط و ص میں سے گزرتا ہے نیز فرض کرو کہ و ب ج د دروازہ ہے اور اس لئے د = و ب
فرض کرو کہ و د ا و ب اور ان کے علی التوائم ایک خط بالترتیب لا، ی اور ما کے محور ہیں۔

وزن و کو و ب اور و ا کے متوازی تحلیل کرنے سے اجزائے تحلیلی۔ و جم ط اور و جب ط حاصل ہوتے ہیں۔ اس لئے و کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی و جب ط جم ف ا۔ و جب ط جب ف ا۔ و جم ط ہیں اور نقطہ سف پر عمل کرتے ہیں جس کے محور (و، ا، ہ) ہیں جہاں ۲ دروازہ کی جوڑائی ہے اور قبضے بجھا کا سف کے متشکل ہیں۔

سہارنے والی قوت قی جو ہ پر عمل کرتی ہے اُس کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی ا، ق، ی ہیں اور یہ نقطہ (ب، ا، ہ) پر عمل کرتی ہے۔ اس لئے دفعہ ۱۶۲ کی روش سے

$$\lambda = \lambda (ا) = \text{و جب ط جم ف}$$

$$\text{ما} = \lambda (ما) = \text{و جب ط جب ف} + ق$$

ے = ز (ے) = - - وجم ط

ل = ز (اے۔ ی، ما) = دھ جب ط جب ذ۔ ج، ق

مر = ز (ی، لا۔ لا، ے) = دھ جب ط جم ذ + ۱ دجم ذ

ن = ز (لا، ما۔ لا، لا) = - - د ۱ جب ط جب ذ + ب، ق

نیز دفعہ ۱۶۸ کی ترقیم کی رو سے ی = - اور ج = ۲ھ

اس نے لا، ما، ے قبضہ و پر ترکیبی تعادل ہیں اور لا، ما، ے قبضہ

ب پر ترکیبی تعادل ہیں۔

اس نے دفعہ ۱۶۸ کی سادات (۶) کی رو سے ق = $\frac{1}{2} \times$ جب ط جب ذ

ساداتوں (۱) اور (۵) سے حاصل ہوتا ہے

لا = $\frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} \text{جم ط} - \text{جب ط جم ذ} \right]$ اور لا = $\frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} \text{جم ط} + \text{جب ط جم ذ} \right]$

ساداتوں (۲) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے

ما = $\frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} \text{ج، ا} + \frac{1}{2} \text{ب، ا} \right]$ جب ط جب ذ، ما = $\frac{2}{3} \left[1 - \frac{1}{2} \text{ج، ا} \right]$ جب ط جب ذ

نیز (۳) سے حاصل ہوتا ہے ے + ے = دجم ط

مثالیں

۱۔ ایک مربع میز کے چار پائے ہیں جو بالترتیب اس کے اضلاع کے وسطی نقطوں پر لگے ہوئے ہیں۔ بتاؤ کہ اس کے ایک کونے پر زیادہ سے زیادہ کس قدر وزن رکھا جاسکتا ہے تاکہ میز نہ اٹھے۔

۲۔ ایک گول میز کی تین متساوی الفضل ٹیگس ہیں جو اس کے کنارہ پر لگی ہیں۔ ایک آدمی

اس کی ایک ٹانگ کے مقابل اس کے کنارہ پر بیٹھتا ہے جس سے میز الٹ کر کناہ اور دو ٹانگوں کے بل گرتا ہے پھر وہ اس کے بالا ترین نقطہ پر بیٹھتا ہے اور میز صین اوپر اٹھ کھڑا ہے۔ ثابت کرو کہ میز کا نصف قطر ٹانگ کے طول کا $\frac{1}{2}$ گنا ہے۔

۳۔ ایک دروازہ جس کا وزن W ہے ایک محور L ب کے گرد جو سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ θ بنا رہا ہے گھوم سکتا ہے دروازہ کو اس محل میں رکھنا منظور ہے جو L ب میں گزرنے والی انتصابی سطح مستوی کے ساتھ زاویہ θ بنائے۔ ثابت کرو کہ اس کے لئے قوت W جب θ جب θ ہوگی جہاں W دروازہ کے مرکز ثقل کا قاصد ہے (ب)۔

۴۔ ایک مستطیل دروازہ جب معمول در ایسے قبضوں پر سہارا ہوا ہے جن کو ملائے والا خط سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ θ بنا رہا ہے ثابت کرو کہ محل توازن سے دروازہ کو زاویہ θ میں سے گمانے میں W جب θ (۱۔ جم ط) کام کرنا پڑتا ہے جہاں W دروازہ کا وزن ہے اور W اس کی چوڑائی ہے۔

۵۔ ایک مستطیل چار ٹانگوں پر متوازی الاضلاع میں سہارا ہوا ہے۔ ٹانگیں اس کے کونوں پر ہیں۔ اس کے ایک معلومہ نقطہ پر معلومہ وزن رکھ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک ٹانگ پر کا دباؤ ناقابل تعین ہے نیز وزن کو ایک خاص مقام پر رکھنے سے اس دباؤ کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں معلوم کرو۔

۶۔ ایک استوار مستطیل کے چار کونوں پر چار ٹانگیں ہیں یہ تھوڑا سا دب سکتی ہیں۔ اور ہر ٹانگ کا پچکاوٹ اس پر رکھے دباؤ کے متناسب ہے۔ اگر میز کا مرکز ثقل اس متوازی الاضلاع کے اندر واقع ہو جو ان کے وسطی نقطوں کو ملائے سے بنتا ہے تو ہر ٹانگ پر کا دباؤ معلوم کرو۔ اگر مرکز ثقل اس متوازی الاضلاع کے اندر واقع نہ ہو تو ثابت کرو کہ میز دراصل صرف تین ٹانگوں پر کھڑا ہے۔

[چونکہ میز کا قطر سیدھا رہتا ہے اس لئے مقابل کی ٹانگوں کے ہر ایک زوج کا اوسط دباؤ اس گہرائی کے مساوی ہے جس میں سے میز کا مرکز حرکت کرتا ہے۔ اس لئے مقابل کے کونوں کے ہر زوج پر کے دباؤ مساوی ہیں]

۱۷۔ اگر کوئی جسم تین قوتوں کے زیر عمل متعادل ہو تو وہ قوتیں ایک ہی

مستوی سطح میں ہونگی۔

ف، ق، س ہیں اور ف اور ق کے خطوط مل
 پکڑی دو نقطے ف، ق ہیں۔

چونکہ قوتیں متبادل ہیں اس لئے مجموعی طور پر ان کا کوئی اثر جسم کو خطفہ ق کے گرد گھمانے کا نہیں ہے لیکن قوتیں ف اور ق اس خط سے ملتی ہیں اس لئے منفرداً ان میں سے کسی کا کوئی اثر جسم کو خطفہ ق کے گرد گھمانے کا نہیں ہے اس لئے تیسری قوت مرا کا بھی کوئی اثر جسم کو خطفہ ق کے گرد گھمانے کا نہیں ہے۔ اس لئے خطفہ ق لازماً قوت مرا سے ملے گا۔

اسی طرح اگر قسم، قسم... کوئی

اور لفظی کے خط عمل پر لئے جائیں تو خطوط

فراق، فراق، فراق... ہر سے ملنے

اس لئے قوتِ سما اس سطحِ مستوی میں واقع ہوگی جو فہمِ ادرق کے عظیم عمل میں سے گزرتی ہے یعنی قی ادر سما کے خطوطِ عمل اس سطحِ مستوی میں واقع ہونے کے جو فہمِ ا میں سے گزرتی ہے۔

لیکن ف، ق، ت کے خط عمل پر کا کوئی نقطہ ہے اس لئے مذکورہ بالا سطح مستوی ف کے خط عمل پر کے ہر ایک نقطہ میں سے گزرتی ہے یعنی ف کے خط عمل میں سے گزرتی ہے۔

نتیجہ صریح۔ دعوہ ۵ کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ تین قومیں یا ایک نقطہ میں سے گزریگی یا باہم متوازی ہونگی۔

۱۷۲۔ اگر کوئی جسم چار قوتوں کے زیرِ عمل متعادل ہو تو ثابت کر دو کہ اُن کے خطِ عمل ایک ہی زائد بنائے گئے انکون ہیں۔

فرض کرو کہ ان چار قوتوں کے خط عمل ف، ق، د، س ہیں، ان کے خط عمل پر کے کسی نقطہ سے ایک خط لکھیں جو جرف اور س دونوں سے ملے۔ چونکہ

چاروں قوتیں متبادل ہیں اس لئے ل کے گردان کے معیار اخروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیئے۔ اس لئے س لازماً ل سے ملے گی۔ ف پر کے کسی اور دو نقطوں سے شروع کرنے سے ہیں دو اور خطوط ہم اور ل حاصل ہو سکتے ہیں جو ف، ق، س، سے ملتے ہیں۔

اب تین غیر متقاطع خط ل، م، ن ایک ایک چادری زائد ناکہ کی تعین کرتے ہیں اور اس کے ایک ہی نظام کے کون ہیں۔ خطوط ف، ق، س، اس جول، م، ن سے ملتے ہیں وہ اس زائد کے کون ہیں جو دوسرے نظام کے رکن ہیں۔ یہ بات قابل غور ہے کہ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ان چادریوں میں سے کوئی سی دو قوتیں بھی ایسی نہیں جو باہم متوازی ہوں یا ایک نقطہ پر ملیں کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ان کی ترکیب سے ہیں ایک واحد قوت حاصل ہوتی اور ہمارے پاس صرف تین ہی قوتیں رہ جاتیں اور اس صورت پر دفعہ ما قبل میں بحث ہو چکی ہے۔

۳۷- اگر ایک جسم پر عمل کرنے والی پانچ قوتیں متبادل میں ہوں تو ان کو دو خطوط مستقیم سے کاٹ سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ان قوتوں کے خط عمل ف، ق، س، ہیں۔ ف، ق، س، میں سے ایک ایک چادری زائد ناکہ بنیو اور فرض کرو کہ س، اسے تقاطع اور ب پر ملتا ہے۔

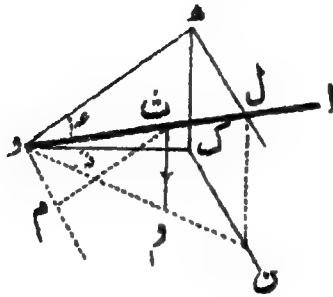
ا میں سے زائد ناکہ ایک کون گزرتا ہے جو ف، ق، س، کے نظام کے مخالفت نظام کا رکن ہے اور بناؤ علیہ ف، ق، س، سے ملتا ہے۔

چونکہ یہ کون ف، ق، س، سے ملتا ہے اس لئے ان کے معیار اخروں کا مجموعہ اس کے گرو صفر ہے۔

لیکن تمام نظام کے لئے اس کے گرو معیار اخروں سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کے گرد ف، ق، س، ط کے معیار اخروں کا مجموعہ صفر ہے اس لئے ط کا معیار اخرا اس کے گرو صفر ہے یعنی یہ ط سے بھی ملتا ہے۔

اسی طرح ب میں سے بھی ایک کون گزرتا ہے جو پانچوں قوتوں سے ملتا ہے۔ یہ بات قابل غور ہے کہ یہ خطوط مستقیم حقیقی، منطقی یا خیالی ہونگے اگر وہ

نقطے جہاں سے مکانی نما سے ملتا ہے حقیقی منطبق یا خیالی ہوں۔
 ۴۷-۱- مشق ۱- ایک وزنی سلاح و لا ایک ایسے نقطہ کے گرد آزادانہ گھوم سکتی
 ہے جس کا فاصلہ ایک کھردری دیوار سے کم ہے۔ دیوار کی بلندی h ہے سلاح
 اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک نقطہ دیوار کے بالائی کنارہ سے مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ سلاح
 اُس عمود کے ساتھ جو o میں سے دیوار کے بالائی کنارہ پر نکالا جائے جو پڑے سے بڑا
 زاویہ بنا سکتی ہے وہ جب $(\frac{m}{h})$ ہے۔



فرض کرو کہ سلاح کا نقطہ ل دیوار کے ساتھ مس کرتا ہے، وک دیوار پر عمود ہے اور وہ
 دیوار کے بالائی کنارے پر عمود ہے۔ لہذا وک = کم، کھ = ہم اور لھوک = ع
 فرض کرو کہ و م، ہ ل کے متوازی ہے اور ٹ م، و م پر عمود وار ہے۔
 ل پر جو عمودی تعامل سا ہے اُس کی سمت ول اور ہل دونوں پر عمود وار
 ہے اور اس لئے سطح مستوی ول ہ پر عمود وار ہے۔
 رگڑ نہ سرا اُس سمت کے مخالف ہے جس میں کل حرکت کرنا شروع کر چکا ہو
 اس لئے مستوی سطح ول ہ میں ول پر عمود وار ہے۔
 چونکہ ٹ م افق کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے اس لئے و م معادل ہے
 ٹ م کی سمت میں وجب ع کے اور ٹ م سے گزرنے والی سطح مستوی
 ول ہ پر عمود وار سمت میں وجب ع کے۔
 و م سے مستوی و ہ ل پر عمودی خط کے گرد معیار اتر لینے سے

مہ سر × ول = د جب ع × و ث جب ھ ول (۱)
نیز اس خط کے گرد جو ول پر عمود وار ہے اور مستوی سطح ھ ول میں واقع ہے
معیار افرینے سے

مہ سر × ول = د جم ع × و ث (۲)

جب ھ ول = مہ م ع = $\frac{\text{رک}}{\text{ھ}}$

نیز ھ ل = و ھ م س ھ ول = مہ م ک، $\frac{۲\text{ھ} + ۲\text{ک}}{۲\text{ھ} - ۲\text{ک}}$

اور اس دیوار کا طول جس پر سلاخ بحالت تقادل ساکن رہ سکتی ہے ھ ل کا دو چند ہے۔
متبادل ثبوت - یہ سوال دفعہ ۱۷۱ کے استعال سے بھی آسانی حل ہو سکتا ہے۔
سلاخ تین قوتوں کے زیر عمل متبادل ہے۔ اس لئے یہ تینوں قوتیں یعنی سلاخ کا وزن،
نقطہ و برکات تعادل اور ل پر حاصل تعادل متراکز ہونی چاہئیں۔ اس لئے ل پر کاتعال
انتخابی سطح مستوی ول ن میں واقع ہونا چاہیئے۔

اب ل پر کے عمادی تعادل کی سمت ل فہ عمود ہے ول اور ھ ل
دونوں پر یعنی یہ مستوی و ھ ل پر عمود ہے لہذا یہ مستوی و ھ ک میں و ھ پر
عمود ہے۔ پس اس کے سمتی جیوب التمام ل ہیں

(- جب ع، ' جم ع) (۳)

جہاں و ک، و م اور ک ھ کا متوازی خط محدودناپنے کے محور ہیں۔
ل پر رکز کی سمت ل فہ مستوی سطح ول ھ میں ول پر عمود وار ہے۔

پس حاصل تعادل جو ہم دیکھ چکے ہیں کہ مستوی ول ن میں لازماً واقع ہے بالضرور
علی القوائم ہوگا ل فہ پر جو مستوی ول ن کا عماد ہے اور جس کے سمتی جیوب التمام ہیں

(جب فہ، - جم فہ،) (۴)

جہاں فہ زاویہ ک و ن ہے

$$= \pi r^2 \times \frac{\text{مف لا}}{\text{جب ع}} \times \text{سر س} \times \text{لا} = \frac{r^2}{3} \times \frac{\text{مف لا}}{\text{جب ع}} \times \text{سر س} \times \text{لا}$$

اس لئے مطلوبہ جفت کا معیار اثر

$$= \frac{r^2}{3} \times \frac{\text{مف لا}}{\text{جب ع}} \times \text{سر س} \times \text{لا} = \frac{r^2}{3} \times \frac{\text{مف لا}}{\text{جب ع}} \times \text{سر س} \times \text{لا}$$

مثالیں

۱۔ دو چکنی مستوی سطحیں جن میں سے ہر ایک سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ع بناتی ہے ایک افقی خط پر قطع کرتی ہیں۔ ایک یکساں سلاخ جس کا وزن و اور طول ۲ ہے متوازی الافق محصل میں ان سطوح مستوی کے اندر اس طرح رکھی ہوئی ہے کہ یہ خط تقاطع کے ساتھ زاویہ ط بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کو قائم رکھنے کے لئے جو افقی جفت درکار ہوگا وہ و لجم ط حم ع ہے۔

۲۔ ایک یکساں سیدھی سلاخ کا طول ۲ ج ہے، اس کو متوازی الافق محل میں ایک کھر درے کر کے اندر جس کا نصف قطر ۱ ہے اتنی لمب دی پر رکھا گیا ہے جتنا کہ ممکن ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو سلاخ کے وسطی نقطہ کو کر کے مرکز سے ملتا ہے

خط انتصابی کے ساتھ زاویہ پیرس بنا رہا ہے۔

۳۔ ایک یکساں سلاخ جس کا وزن و ہے اپنے ایک سرے پر ایک قبضہ کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ اس کا دوسرا سر ایک کھر درے انتصابی دیوار پر ساکن ہے اور سلاخ محل تعادل میں سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ع بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ ایک دائرہ

کی قوس پر جس کے مقابل مرکز پر زاویہ ۲ مستل [موس ع] بنا رہے کسی مقام پر ساکن رہ سکتی ہے۔ نیز بتاؤ کہ ہر دو انتہائی محلوں میں دیوار پر کا دباؤ ۱/۲ و [مم ع + مم ع] ہوگا جہاں م مرکز کی قدر ہے۔

۴۔ ایک تیلی یکساں سلاخ لب جس کا طول ۱۰۲ ہے اہل محل میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرال ایک افقی کھر درے میز پر اور دوسرا ب ایک کھر درے انتصابی دیوار پر ساکن ہے۔ میز اور دیوار کی رگڑ کی قدیں بالترتیب ۴ اور ۳ ہیں اور سلاخ کا پایہ دیوار سے ک فاصلہ پر ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ بچلے سرے پر پھسلنے کے عین قریب ہوگی اگر وہ انتصابی سطح مستوی جس میں یہ واقع ہے دیوار کے ساتھ زاویہ ط بنائے جہاں ط ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ک مم (۲ جب ط - ۱/۲) = ک - ۲ مم (۴ - ۱/۲ جب ط - ک) \frac{1}{2}$$

اور اس وقت اوپر کے سرے پر جو ماسی تعامل ہے اس کا میلان افق کے ساتھ نقطہ ۱ (مم مس ط) ہوگا۔

[۱ پرکہ حاصل تعامل جو انتصابی خط کے ساتھ زاویہ لہ بناتا ہے اور لب پرکہ حاصل تعامل جو انتصابی خط کے ساتھ زاویہ فہ بناتا ہے دونوں کو ایک ایسے نقطہ ڈپر ملنا چاہیئے جو مرکز ثقل ث کے انتصاباً اوپر ہے۔ اس لئے اگر لب ل میز پر عمود ہو اور لب لب = عر فوضہ ۵ ہلکی روئے

$$۱ مم ع = مم لہ - مم فہ = \frac{۱}{۲} مم فہ$$

چونکہ سب قوتیں مستوی لب دل میں عمل کرتی ہیں اس لئے سرال سمت ل میں پھسلنے کے عین قریب ہوگا۔

نقطہ لب پر دیوار کا جو عماد ہے اس پر لب د کا ثقل لینے سے

$$جب فہ جب ط = جم لم = \frac{۱}{۱ مم + ۲ مم}$$

نیز ک = ۲ و جب ط جم ع ۱ اس سے پہلا جواب حاصل ہوتا ہے

نیز اگر لب پرکہ تعامل سا ہو اور وہاں رگڑ کی قوت چہر سمت افق کے ساتھ زاویہ سا بنائے تو چونکہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ حاصل مستوی سطح لب ل میں واقع ہوگا، اس لئے اس مستوی پر عمود وار سمت میں تحلیل کرنے سے ہم سا جم سا جب ط = جم ع ۱

۵۔ ایک نصف کرہ جس کی سطح کھردری ہے اور جس کا مرکز وہ ہے اس طرح ثابت ہے کہ اس کا قاعدہ افقی سطح مستوی میں ہے۔ ایک سیدھی بجساں سلاح کا ایک سر قاعدہ کی سطح مستوی کے ایک نقطہ سے آزادانہ وصل کر دیا گیا ہے اور دوسرا سر نصف کرہ کی سطح کے ایک نقطہ پر اس طرح ساکن ہے کہ سلاح پھیلنے کے عین قریب ہے۔ ثابت کرو کہ سلاح اور وہیں سے گزرنے والی سطح مستوی، وہیں سے گزرنے والی انتہائی سطح مستوی سے زاویہ مساوی (مجموعہ قمریہ) بناتی ہے جہاں نہ رگڑ کی قدر ہے، نہ زاویہ ورنہ ہے اور نہ زاویہ ورنہ ہے۔

۶۔ ایک وزنی مستدیر اسطوانہ اپنے مستوی سرے کے بل ایک کھردرے افقی میز پر پڑا ہے اگر اس کا وزن W ہو اور عمادی دباؤ کو قاعدہ پر مساوی طور پر تقسیم شدہ فرض کیا جائے تو ثابت کرو کہ اس جنت کا معیار آخر جو اس کو محور کے گرد عین مڑوڑ کے گاہ پر $\frac{1}{2} \pi$ سے $\frac{1}{2} \pi$ ہے جہاں نہ رگڑ کی قدر ہے اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ہے۔

۷۔ ایک قائم مستدیر مخروط کا وزن W اور اسی زاویہ θ ہے اس کو ایک افقی میز کے مستدیر سوراخ کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا اس نیچے کی طرف ہے۔ اگر رگڑ کی قدر نہ ہو اور سوراخ کا نصف قطر a ہو تو ثابت کرو کہ کم سے کم جنت کا معیار آخر جو مخروط کو ہلا سکتا ہے وہ $\frac{1}{2} \pi$ ہے۔

۸۔ مخروط مضلع کی شکل کا ایک چکنا ڈاٹ ایک مساوی الاضلاع مثلث کی شکل کے سوراخ کے اندر متساوی پھنسا گیا ہے۔ سوراخ کا ہر ضلع l ہے اور اس کی سطح متوازی الافقی ہے ثابت کرو کہ ڈاٹ کو اس سوراخ کے اندر اس طرح رکھنے کے لئے کہ اس کا محور انتہائی رہے اور سوراخ کی سطح مستوی اس میں سے مساوی ضلع l والا مثلث منقطع کرے ایک

جنت درکار ہوگا جبکہ معیار آخر وہ $\frac{1}{2} \pi$ ہے۔ ۱۔ ہوگا جہاں و ڈاٹ کا وزن ہے اور h اس محل میں اس کے واس کی گہرائی ہے۔

(فرض کرو کہ ڈاٹ سوراخ کے اضلاع AB ، BC ، CA سے متساوی
 'ب'، 'ج'، 'ا' پر مس کرتا ہے۔ جب آسانی سے

۹۔ ایک یکساں مثلثی میز Δ ب ج کی \angle ا، ب، ج پر تین مساوی ٹانگیں ہیں، ایک مکدوری افقی سطح مستوی پر ساکن ہیں۔ چھوٹے سے چھوٹا جنت معلوم کرو جو میز کو بلا سکیگا۔ (فرض کرو کہ میز ایک انتصابی محور کے گرد جو افقی سطح مستوی سے ϕ پر مائل ہے گھومتے کے میں قریب ہے۔ تب \angle ا، ب، ج پر کی رگڑیں ω ، ω ، ω ب، ω ج پر عمود وار ہیں اور ایک ہی رخ میں ہیں اور چونکہ ہر ایک ٹانگ پر کا دباؤ دھرنے ϕ ہے اس لئے ان رگڑوں میں سے ہر ایک پر $\frac{1}{2} m \omega^2$ کے مساوی ہے جہاں میز کا وزن ω ہے۔

اگر یہ رگڑیں ایک مثلث Δ ب ج بنائیں تو چونکہ ہر صرت ایک جنت کے ہی مساوی ہیں اس لئے حاصل قوت کو صفر ہونا چاہیئے اور ہر ایک رگڑ باقی دو رگڑوں کے سمتوں کے درمیانی زاویہ کی جیب کے مساوی ہونی چاہیئے۔ اس لئے زاوے \angle ا، ب، ج مساوی ہونے چاہئیں یعنی زاوے \angle ا، ب، ج ω ب، ω ج، ω ا مساوی ہونے چاہئیں۔ اس لئے نقطہ ولازما مثلث کے اندر ایسی جگہ پر ہوگا کہ

$$\angle \text{ب وج} = \angle \text{ج ول} = \angle \text{ل و ب} = 120^\circ$$

پس ہمیشہ موجود ہوگا بشرطیکہ مثلث کا کوئی زاویہ 120° سے بڑا نہ ہو اور ب ج، ج ل پر 120° کی قوسوں کا نقطہ تقاطع ہوگا۔
تب میز کو حرکت دینے کے لئے جو جنت درکار ہوگا اس کا معیار اثر

$$= \frac{m \omega^2}{3} [\omega^2 + \omega^2 + \omega^2] = m \omega^2$$

مکن ہے کہ میز Δ کے گرد گھومنا شروع کرے۔ اگر ایسا ہو تو ب اور ج پر کی رگڑوں میں

سے ہر ایک $\frac{1}{3} m \omega^2$ ہے جو \angle ا، ب اور \angle ج، ل پر عمود وار ہیں اس لئے ان کا حاصل $\frac{1}{3} m \omega^2$ ہے۔
و جم $\frac{1}{3} m \omega^2$ ہے اس حاصل اور \angle پر کی رگڑ کا حاصل صفر نہیں ہو سکتا اگر $\frac{1}{3} m \omega^2$ مجموعہ $\frac{1}{3} m \omega^2$ سے

یعنی $\angle > 120^\circ$ ۔ پس میز Δ کے گرد اسی صرت میں گھوم سکتا ہے جبکہ $\angle \leq 120^\circ$ اور

(لاٹھ لا + مابٹ ما + مے مٹ می) + (لاٹھ لا + مابٹ ما + مے مٹ می) + ... =

یعنی لاٹھ لا + مابٹ ما + مے مٹ می =

ہم یہ تسلیم کر چکے کہ کسی استوار جسم کو ایک محل سے دوسرے محل میں لے جانے کے لئے دو قسم کی حرکتوں کی ضرورت ہوتی ہے ایک ایسی حرکت جس سے جسم کا کوئی نقطہ و کسی دوسرے مقام و پر لے جایا جائے اور دوسری یعنی حرکت جو وہیں سے گزرنے والے کسی محور کے گرد لی جائے۔

اس گردش کو حوالے کے محوروں کے گرد زمین و کیسی گردشوں میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ ہم فرض کریں گے کہ اگر یہ ترکیبی گردشیں چھوٹی ہیں تو انہیں کسی ترتیب میں لیا جاسکتا ہے۔

[ان مفروضوں کے ثبوت کے لئے طالب علم کو چاہیے کہ مصنف کی کتاب

Dynamics of a particle and of Rigid Bodies

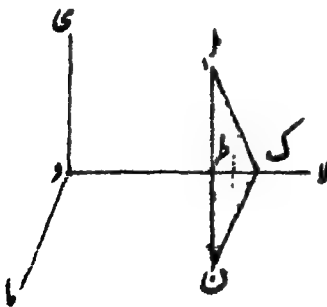
کے صفحات ۲۱۵ تا ۲۱۸ کا مطالعہ کرے]

اب اس امر پر غور کرو کہ جسم کو محوروں کے گرد بالترتیب چھوٹے زاویوں

ط، ط، ط میں سے گمانے سے

اس کے کسی نقطہ کے محدودوں پر کیا اثر پڑتا ہے

اسے ایک محور و لا پر عمود اور
ان مستوی لا و لا پر عمود نکالو۔ فرض
کر دو زاویہ ک ن = ط



ک کا ماحد = ک ن = ک ل × جم ط

ولا کے گرد گردش دینے سے یہ ک ل × جم (ط + ط) ہو جائے گا
پس ماحد کی تبدیلی

= ک ل [جم (طہ + طہ) - جم طہ] = ک ل (- طہ جب طہ)
 اگر طہ اتنا چھوٹا زاویہ ہو کہ اس کے مربعوں کو نظر انداز کیا جاسکے تو
 = - طہ × ی

اسی طرح ی محدود کی تبدیلی = ک ل [جب (طہ + طہ) - جب طہ]

= ک ل [جم طہ × طہ] = طہ × طہ
 اسی طرح سے دکھایا جاسکتا ہے کہ و ما کے گرد زاویہ طہ میں سے گھمانے سے
 ی محدود میں تبدیلی - طہ ل اور لا محدود میں تبدیلی طہ ی واقع ہوگی۔

نیروی کے گرد زاویہ طہ میں سے گھمانے سے لا محدود میں تبدیلی - طہ ل اور لا محدود میں تبدیلی
 طہ ل واقع ہوگی۔ پس چھوٹی مقداروں کے مربعوں کو نظر انداز کرنے سے ہم
 دیکھتے ہیں کہ محوروں کے گرد تین گردشوں سے ل کے محدودوں میں جو تبدیلیاں
 واقع ہونگی وہ حسب ذیل ہیں

و ل کے متوازی (ی طہ - ما طہ)

و ما کے متوازی (لا طہ - خا طہ)

اور دی کے متوازی (ما طہ - لا طہ)

اگر ان گردشوں کے علاوہ جسم کو محوروں کے متوازی چھوٹے حلقی فاصلوں
 و ب ج میں سے حرکت دی جائے تو ظاہر ہے کہ پہلے درجے کی چھوٹی
 مقداروں تک

مع ل = و + طہ ی - طہ ما

مع ل = ب + طہ لا - طہ ی

$$\text{مف ی} = \text{ج} + \text{ط} - \text{لا}$$

پس اس خیف ہٹاؤ میں نقطہ لہ پر عمل کرنے والی قوت قم کا مہرہم کام

$$= \text{ق} - \text{مف ق} = \text{لا} - \text{مف لا} + \text{ما} - \text{مف ما} + \text{مے} - \text{مف مے}$$

$$= \text{لا} + \text{ب} - \text{ما} + \text{ج} - \text{مے} + \text{ط} - (\text{ما} - \text{مے}) + \text{ط} - (\text{لا} - \text{مے})$$

$$+ \text{ط} - (\text{ما} - \text{لا})$$

اب چونکہ لا، ب، ج، ط، ط، تمام ذروں کے ہٹاؤں کے لئے دہی ہیں اس لئے کل قوتوں کا مجموعی مہرہم کام

$$= \text{لا} + \text{ب} - \text{ما} + \text{ج} - \text{مے} + \text{ط} - (\text{ما} - \text{مے})$$

$$+ \text{ط} - (\text{لا} - \text{مے}) + \text{ط} - (\text{ما} - \text{لا})$$

$$= \text{لا} + \text{ب} - \text{ما} + \text{ج} - \text{مے} + \text{ط} - \text{ل} + \text{ط} - \text{م} + \text{ن} - \text{م} \quad (۲)$$

دفعہ ۱۶۵ کی رو سے ظاہر ہے کہ اگر قوتوں کا یہ نظام تعادل میں ہو تو اس جملہ کی ہر رقم صفر ہوتی ہے، اس لئے

$$\text{ق} - \text{مف ق} + \text{ق} - \text{مف ق} + \text{ق} - \text{مف ق} + \dots = 0$$

$$= \text{کل نظام کا مہرہم کام} = 0$$

۱۶۶۔ برعکس اس کے اگر کل ہٹاؤں کے لئے نظام کا مہرہم کام صفر ہو تو قوتیں متعادل ہونگی۔ بحور لا کے متوازی ایسا سادہ ہٹاؤ منتخب کرو کہ

$$(\text{ا} - \text{ب} = \text{ج} = \text{ط} = \text{ط} = \text{م} = 0) \quad \text{اب دفعہ ماقبل کے}$$

$$\text{نتیجہ (۲) سے حاصل ہوتا ہے } (\text{لا}) - (\text{ما}) = 0 \text{، اسی طرح } (\text{مے}) - (\text{ما}) = 0$$

۱۱ (۷) = . اب ایک ایسا ہٹاؤ منتخب کرو جو صرف محور لا کے گرد گردش پر مشتمل ہو

یعنی ۱ = ب = ج = ط = ۰ = . اور ط صفر نہ ہو

تب (۲) سے ۱ (۱ = ی ما) = . یعنی کل قوتوں کا معیار اثر محور لا کے گرد صفر ہوگا یعنی ل = .

اسی طرح ۰ = اور ۱ = . پس اگر موہوم کام کی مساوات پوری ہوتی ہو

تو دفعہ ۱۶۵ کی تعادل کی تمام شرائط پوری ہوتی ہیں اور قوتیں تعادل میں ہونگی۔
۱۷ = ۱ - مشتق - ایک منظم جہاں سطحی چھ ہلکی سلاخوں سے بنا ہوا ہے جن میں سے ہر ایک کا طول ۱ ہے۔ = ایک چکنی افقی سطح مستوی پر ساکن ہے۔ ایک حلقہ جس کا وزن ۱ و اور نصف قطر ب ہے مائل سلاخوں پر سہارا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ افقی کناروں میں

سے کسی ایک پر کا دباؤ $\frac{2}{3} [\frac{1}{3} - \frac{1}{3}]$ ہے۔

نظام کو ایک ایسا ہٹاؤ دو کہ تین مائل سلاخوں کا طول نہ بدلے اور اس انتصاباً نیچے اترے۔ جب مائل کنارے سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بنائیں تو فرض کرو کہ ان اضلاع کا طول جو افقی مستوی سے مس کرتے ہیں ۱ ہے، تب

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ اور اس لئے } ۱ = ۱ \text{ جب } ۱$$

اگر حلقہ کی بلندی سطح مستوی کے اوپر ما ہو تو

$$۱ = ۱ - ب مم ط$$

اگر مطلوبہ دباؤ ت ہو جسے تناؤ کی صورت میں مثبت شمار کیا جائے وہ موہوم کام کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$- و مع ما - م مع ل = .$$

۴۔ بارہ بے وزن سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے ایک متوازی السطوح بنایا گیا ہے جو مقابل کے راسوں کو ملائے واسے لچکدار رسیوں کے زیر عمل متعادل ہے۔ ثابت کرو کہ رسیوں کے تناؤ اور سلاخوں کے تعامل اُن کے طولوں کے متناسب ہیں۔

اگر t_1, t_2, t_3, t_4 رسیوں کے تناؤ ہوں جن کے طول l_1, l_2, l_3, l_4 ہوں تو موہوم کام کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$t_1 l_1 + t_2 l_2 + t_3 l_3 + t_4 l_4 = 6 \text{ مٹ}$$

لیکن یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 6$ = سلاخوں کے طولوں کے مربعوں کے مجموعہ کا چار گنا۔ اس لئے

$$l_1 t_1 + l_2 t_2 + l_3 t_3 + l_4 t_4 = 6 \text{ مٹ}$$

چونکہ یہ مساواتیں مٹ $l_1 t_1 + l_2 t_2 + l_3 t_3 + l_4 t_4$ اور مٹ 6 کی سب قیمتوں کے لئے درست ہیں اس لئے

$$\frac{t_1}{l_1} = \frac{t_2}{l_2} = \frac{t_3}{l_3} = \frac{t_4}{l_4}$$

سوال کے باقی حصہ کا جواب کسی کونہ پر عمل کرنے والی قوتوں پر غور کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

۵۔ ایک مخروطی خیمہ لا تعداد مساوی مساوی الساقین مثلثی اجزاء سے بنا ہوا ہے۔ اس کے راس کو قبضہ سے وصل کر کے اسے ایک چکنی سطح پر رکھا گیا ہے اور اس محل پر کبھے کو ایک وزنی گول حلقہ کی مدد سے جو اس کے گرد گزرتا ہے متعادل رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{تبادل کے لئے مخروط کا نصف راسی زاویہ جب } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{2} + 1} \right) \text{ ہے جہاں } \sqrt{2} \text{ و } \sqrt{3}$$

بالترتیب مخروط اور حلقہ کے وزن ہیں، رقلہ کا نصف قطر ہے اور θ مخروط کا اُبل ضلع ہے۔

۶۔ تین ذرے جن میں سے ہر ایک کا وزنی و ہے ایک ایسے چکنے کرہ کی بیرونی سطح چس کا نصف قطر ہے تبادل میں ہیں۔ ذروں کو مساوی طول l کی رسیاں باہم ملتی کی ہوئی ہیں اور یہ کرہ کی سطح پر متشاکلا ساکن ہیں۔ موہوم کام کے اصول کی مدد سے

ثابت کر دو کہ ہر سی کا تناؤ $\left\{ \frac{3}{2} \text{ جب } \frac{3}{2} \text{ جب } \frac{3}{2} \right\}$ ہے جہاں $\frac{3}{2}$ زاویہ ہے جس کا قوسی ناپ $\frac{3}{2}$ ہے۔

۷۔ ایک وزنی لچکدار سی کا قدرتی طول 2π ہے۔ اس کے سروں کو بانڈ کر اسے چکنے مخروط کے گرد جس کا محور انتصابی ہے اور جس کا نصف راسی زاویہ $\frac{3}{2}$ ہے ڈالا گیا ہے۔ اگر سی کا وزن W اور لچک کی قدر L ہو تو ثابت کر دو کہ یہ جس دائرہ کی شکل میں متعادل ہوگی اس کا نصف قطر $\left(1 + \frac{3}{2} \right) \frac{W}{L}$ ہے۔

۸۔ ایک چکنے گردشی مکانی نما کو اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ اس کا راس اوپر کی طرف ہے اور محور انتصابی ہے۔ اس پر ایک وزنی لچکدار سی ڈالی گئی ہے جس کا طول بغیر کھینچاؤ کے 2π ج ہے۔ جب رسی تعادل میں ہو تو ثابت کر دو کہ اس کی شکل جس دائرہ کی ہوگی اس کا نصف قطر $\frac{2\pi}{3} \frac{W}{L}$ ہوگا جہاں W سی کا وزن ہے، لہٰذا اس کی لچک کی قدر ہے اور m و k مکانی کا وتر خاص ہے۔

۹۔ دو مساوی ذروں کو دو معلومہ بے وزن رسیوں کے ذریعہ ملا یا گیا ہے ان ذروں کو ایک چکنے مخروط کے گرد جس کا محور انتصابی ہے اور راس اوپر کی طرف ہے چلتے کی طرح ڈالا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ ہر سی کا تناؤ $\frac{3}{2}$ ہے ہوگا جہاں W ہر ذرہ کا وزن ہے اور 2 مخروط کا راسی زاویہ ہے۔

۱۰۔ فرض کر دو کہ کسی متحرک ذرہ کے طوق کے کسی نقطہ (λ, μ, ν) پر ذرہ پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ λ, μ, ν ہیں۔ تب اگر ذرہ ۹۶ کے مطابق اس کے محدودوں میں بالترتیب μ, λ, ν مت λ, μ, ν کی تبدیلی واقع ہو تو قوتوں کا کام

$$= \lambda \mu \nu + \mu \lambda \nu + \nu \lambda \mu$$

جب ذرہ مذکور کسی معیاری محل (λ, μ, ν) سے حرکت کر کے محل (λ', μ', ν')

میں آئے تو قوتوں کا مجموعی کام جو ذرہ پر ہوا وہ = ان کاموں کا مجموعہ ہے جو چھوٹے چھوٹے ابتدائی ہٹاؤں میں ہوا ہے۔

$$= \int (لا، لا، ی + ما، فرما + مے، فری)$$

اس مقدار کو کام کا تفاعل کہتے ہیں اور اسے بالعموم ک سے تعبیر کرتے ہیں اگر لا، ما، مے ایسے ہوں کہ یہ کسی مقدار قہ کے بلحاظ لا، ما، ی، جزوی تفرقی سرہوں تو

$$ک = \int \left(\frac{جفت قہ}{جفت لا} \times فرلا + \frac{جفت قہ}{جفت ما} \times فرما + \frac{جفت قہ}{جفت می} \times فری \right)$$

$$= [فرقہ] = قہ - قہ$$

تعبیر کرتے ہیں۔ جہاں قہ اور قہ بالترتیب نفاط (لا، ما، ی) اور (لا، با، ی) پر قہ کی قیمتوں کو

مقدار (۲) صریحاً ابتدائی محل میں اور آخری محل میں قہ کی قیمتوں پر موقوف ہے اور اسے اس راستے سے کچھ حلقہ نہیں جس سے ذرہ ابتدائی محل سے آخری محل میں پہنچا۔ پس اگر قوتوں کا ایک نظام ایسا ہو کہ کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی (محوروں کے متوازی) کسی تفاعل قہ کے بلحاظ لا، ما، ی، ٹھیک تفرقی سرہوں یعنی لا، مفا + ما، مفا + مے، مفا کی کامل تفرقی ہو تو اس قسم کے نظام کو تحفظی نظام کہتے ہیں اور مقدار قہ کو نظام کا قہ کہتے ہیں۔

قوتوں کے کسی معلوم نظام کے زیر عمل ایک ذرہ کی توانائی بالقوہ سے وہ کام مراد ہے جو ذرہ مذکور کو اس مقام کے کسی معیاری مقام تک لانے میں قوتیں

اس پر انجام دینی ہیں۔

مثلاً جب ذرہ نقطہ (لا، ما، سی) پر ہو تو

(لا، باء، ی)

توانائی بالقوہ = $\int (لا، فلا + ما، فربا + عے، فری)$

(لا، باء، ی)

= قب۔ قم

۱۸۰۔ کسی نظام کے محدود۔ ایک جسم دو ابعاد میں آزادانہ حرکت کر سکتا ہے۔

اس کے مقام کا تین ہو سکتا ہے اگر اس پر کے کسی مخصوص نقطہ کے محدود معلوم ہوں اور نیز یہ معلوم ہو کہ کوئی خط جو بلحاظ جسم کے ثابت ہے محور لا کے ساتھ کیا زاویہ بناتا ہے۔

ان تین مقداروں (لا، ما، سی) کو جسم کے محدود کہہ سکتے ہیں اور جسم کے کسی دوسرے نقطہ کے محدود ان محدودوں کی رقوم میں معلوم ہو سکتے ہیں۔ تین ابعاد میں ہم کسی جسم کے مقام کو پورے طور پر متعین کر سکیں گے اگر ہم اس جسم کے تین معلومہ نقطوں کے محدود معلوم ہوں۔ لیکن ان تین نقطوں کے نو محدودوں میں تین رشتے ہوتے ہیں جو اس بات کو ظاہر کرتے ہیں کہ ان نقطوں کو ملانے والے تین خطوط کا طول غیر متغیر ہے۔

پس ان نو محدودوں میں سے کوئی سے تین محدود باقی محدودوں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔ اور اس لئے باقی ماندہ چھ محدود جسم کے مقام کو فضا میں متعین کرتے ہیں۔ ان چھ مقدار کو جسم کے محدود کہہ سکتے ہیں۔

اس واقعہ کو یوں بھی دیکھ سکتے ہیں کہ کسی جسم کا مقام جو فضا میں آزادانہ حرکت کر سکتا ہو متعین ہو جانے کا اگر ہم اس کے کسی نقطہ (لا، باء، ی) کے تین محدود معلوم ہوں اور نیز محوروں کے لحاظ سے اس کے دو خطوط (ا، ب) اور (ج، د) کے محل

معلوم ہوں ان خطوں کے مستی جو بے لتمام (ل، م، ن) اور (ل، م، ن) تین روابط

سے مربوط ہیں $ل^۱ + م^۱ + ن^۱ = ۱$ اور $ل^۲ + م^۲ + ن^۲ = ۱$ اور

$ل^۱ ل^۲ + م^۱ م^۲ + ن^۱ ن^۲ =$ حجم طہ جہاں طہ ان خطوط کا درمیانی زاویہ ہے جو متعین ہے۔ اس لئے یہ چھ سمتی جیوب التمام بالآخر تین غیر تابع مقداروں میں تقویل ہو جاتی ہیں۔

پس حسب سابق کسی جسم کے مقام کو فضا میں متعین کرنے کے لئے چھ مقداریں ضروری اور کافی ہوتی ہیں۔ ان مقداروں کو جسم کے محدود کہتے ہیں لہذا کوئی غیر تابع مقداریں جن کے معلوم ہونے سے جسم کا مقام متعین ہو جائے جسم کے محدود کہلاتے ہیں۔

۱۸۱۔ کسی جسم کے کام کا تفاعل۔ اگر کسی جسم کے نقطہ (لا، ما، ی) پر عمل کرنے والی

قوتوں کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ی ہوں اور اسی طرح باقی ذروں کے لئے بھی تو جسم کے خفیف سے ہٹاؤ کے لئے قوتیں جسم پر جو کام کرتی ہیں وہ

$= (لا\ مفع + ما\ مفع + ی\ مفع) + (لا\ مفع + ما\ مفع + ی\ مفع) + \dots$

پس مفع $= \sum (مفع\ لا + مفع\ ما + مفع\ ی) \dots (۱)$
فرض کرو کہ جسم کے غیر تابع محدود سہ، ذ، ضہ ہیں، پس جسم کے ہر ایک نقطہ کے محدود اور اس پر عمل کرنے والی قوتیں سہ، ذ، ضہ ... کی رفوم میں بیان ہو سکتی ہیں، تب (۱) کو اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

مفع $= سافرسہ + فافرفہ + صافرضہ + \dots$

اگر جسم کسی خاص محل (سہ، ذ، ضہ) سے حرکت کر کے کسی دوسرے محل (سہ، ذ، ضہ) میں آجائے تو مجملہ کام

$= \sum (سافرسہ + فافرفہ + صافرضہ + \dots)$
(سہ، ذ، ضہ) ...

اگر حسب سابق مقدار پیرسہ، فادہ و فضا... کسی مقدار کے جزوی تقریبی سر ہیں
 بلحاظ سر، ف، فضا... کو حاصل ہوتا ہے ک = ق - قہ

اگر کسی مقام پر توانائی بالقوہ ھ حسب سابق اس کام کے مساوی تسلیم کی جائے
جو جسم مقام سہ، فہ، صہہ سے کسی معیاری محل تک آنے میں انجام دیتا ہے تو
ھ = قہ - قہ

۱۸۲۔ نظام کے تعادل کا محل۔ جسم کے تعادل کا محل مہموم کام کے اصول سے کام منک کو ہر مہموم ہٹاؤ کے لئے صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے بالفاظ دیگر ہم نظام کا وہ محل معلوم کرتے ہیں جس کے لئے ک بڑے سے بڑا یا چھوٹے سے چھوٹا اسان کن ہو۔

چونکہ مقداریں سہ، فہ، وندہ غیر تالیج ہیں اس لئے ہم مقداروں میں سہ، فہ، وندہ کو (جو بلحاظ سہ، فہ، وندہ کے ک کے جزوی تفریق سر ہیں) صفر کے مساوی رکھنے سے تعادل کا عمل معلوم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ تعادل کا ایک محل جو اس طرح معلوم ہوتا ہے ایسا ہے جس کے لئے
ک بڑے سے بڑا ہے۔ اب اگر جسم کو ذرا سا ہٹا کر قریب کے محل میں لایا جائے
اور وہ ایک لمحہ کے لئے ساکن ہو جائے تو ظاہر ہے کہ علم حرکت کے اس اصول کے
مطابق کہ پیدا شدہ توانائی بالحرکت کئے ہوئے کام کے مساوی ہوتی ہے (جسم کو
اس طرح حرکت کرنا چاہیے کہ قوتیں جو کام کریں وہ مثبت ہو یعنی اس طرح
حرکت کرے کہ کام کے میں اعزاء و ذفع ہو اور اس لئے اسے تعادل کے محل

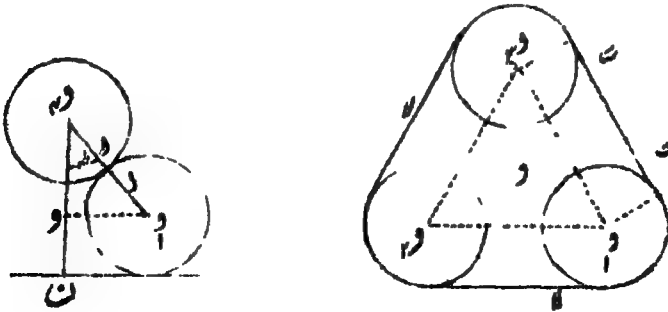
میں واپس آنا چاہیئے۔ پس یہ محل قائم تعادل کا محل ہے۔
 اسی طرح سے اگر تعادل کے کسی محل کے لئے ک کی قیمت چھوٹی سے
 چھوٹی ہو تو جسم خفیف سے ہٹاؤ کے بعد اس طرح حرکت کرے گا کہ کام میں اضافہ واقع
 ہو۔ اس لئے یہ تعادل کے محل سے اور بھی پرے ہٹ جائے گا یعنی یہ محل غیر قائم
 تعادل کا محل ہوگا۔

بالآخر اگر ک حقیقی طور پر چھوٹے سے چھوٹا ہو اور بڑے سے بڑا ہو یعنی اگر یہ بعض ہٹاؤں کے لئے بڑے سے بڑا اور بعض کے لئے چھوٹے سے چھوٹا ہو تو تعادل بھی اس کے مطابق بعض ہٹاؤں کے لئے قائم اور بعض کے لئے غیر قائم ہوگا۔ پس یہ محل بھی یہ ہیئت مجموعی قائم توازن کا محل نہیں ہوگا۔

خلاصہ یہ ہے کہ اگر کسی جسم یا جسموں کے کسی نظام کے لئے کام کا تعادل علی ک بنایا جائے اور اسے غیر تابع محدودوں سے آزاد، منفرد... کی رقوم میں بیان کیا جائے تو تعادل کے محل وہ محل ہو جائے جن کے لئے ک بڑے سے بڑا، چھوٹے سے چھوٹا یا ساکن ہو اور ان محلوں میں قائم تعادل کے محل وہی ہونگے جن کے لئے ک کی متناظر قیمتیں حقیقی طور پر بڑی سے بڑی ہوں۔

چونکہ ص ھ = - صف ک اس لئے اگر ہم کام کی بجائے توانائی بالقوہ کو لیں تو نتائج بالابا اکل الٹ جائیں گے۔ یعنی وہی محل قائم تعادل کے محل ہونگے جن کے لئے توانائی بالقوہ کی متناظر قیمتیں حقیقی طور پر کم سے کم ہوں۔

۱۸۳ - مشق - تین سادی کرے ایک چکنے میز پر پڑے ہیں اور ایک چکنی بچکداروسی کے ذریعہ جو ان کے مرکزوں کی سطح مستوی میں ہے اس طرح تعادل میں ہیں کہ یہ ایک دوسرے سے مس کرتے ہیں اور وہی تنی ہوئی نہیں ہے۔ ایک اور چوٹا کرہ ان کے اوپر رکھ دیا گیا ہے۔ ثابت کرد کہ اگر تعادل کے محل میں اوپر کے کرہ کے مرکز



کو نیچے کے کسی کرہ کے مرکز کے ساتھ ملانے والا خط سمت استعمالی سے زاویہ ط بنائے تو

متشکل مٹاؤں کے لئے تقادل قائم ہوگا اگر جب ط > $\frac{1}{\pi}$

فرض کرو کہ اوپر کے کہ کے مرکز کو نیچے کے کہ کے مرکز کے ساتھ ملانے والا خط سمت
استقامتی کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے جبکہ نیچے کے کہوں کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ
لا ہے

اس لئے

$$\frac{\text{لا}}{\pi + 2} = \frac{\frac{2}{\pi} \text{ لا جب } 90}{12} = \frac{22}{12} = \text{جب ط}$$

اگر لچک کی قدر نہ ہو اور سی کا تناؤ ت ہو تو

$$\text{ت} = \frac{(12\pi + 44) - 4\pi + 12}{(3 + \pi)2} = \frac{8\pi + 44}{2(3 + \pi)}$$

اگر وہ ایک کہ کا وزن ہو تو کسی متشکل مٹاؤ کے لئے کام کا تناؤ

مفک = - (مفک (۹ + ۱۲ حجم ط) - ۳ ت مفک لا

$$\frac{\text{فرک}}{\text{فرط}} = 9 \times 12 \text{ جب ط} - \frac{18 \sqrt{3} \text{ لا}}{3 + \pi} - [12 \text{ جب ط} - 1] \text{ حجم ط}$$

$$\frac{\text{فرک}}{\text{فرط}} = 9 \times 12 \text{ حجم ط} - \frac{18 \sqrt{3} \text{ لا}}{3 + \pi} - [12 (\text{حجم ط} - \text{جب ط}) + \text{جب ط}]$$

تقادل کامل $\frac{\text{فرک}}{\text{فرط}} = 0$ سے حاصل ہوتا ہے یعنی

$$9 \text{ جب ط} = \frac{18 \sqrt{3} \text{ لا}}{3 + \pi} - [12 \text{ جب ط} - \text{حجم ط}]$$

ط کی اس قیمت کے لئے

$$\frac{\text{فرک}}{\text{فرط}} = \frac{18 \sqrt{3} \text{ لا}}{3 + \pi} - [12 \text{ جب ط} - \text{حجم ط}] - [12 (\text{حجم ط} - \text{جب ط}) + \text{جب ط}]$$

$$= \frac{18 \times 3}{3+11} \times \frac{1}{3} \text{ جب } 1 - 1$$

اگر جب $\frac{1}{3} > \frac{1}{18}$ تو $\frac{1}{3}$ منفی ہوگا اور $\frac{1}{18}$ کی متناظریت بڑی سے بڑی ہوگی اور تعادل قائم ہوگا۔

مثالیں

۱۔ ایک ٹھوس چپٹے کر کے محور کے ایک سرے پر اس کے وزن کا ن گنا وزن رکھ دیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ یہ ایک چکنی افقی سطح مستوی پر کن مختلف محلوں میں متعادل رہ سکتا ہے اور ان میں سے کون سا محل قائم تعادل کا محل ہے، نیز ثابت کرو کہ اگر $\frac{1}{14} > \frac{1}{2}$ تو تعادل کے صرف دو محل ممکن ہیں۔

۲۔ محوری انتصاباً اوپر کی طرف ہے اور مبداء ہے، ایک یکساں مربع تختہ اب ج د جس کا وزن ۱۰ اور ضلع ۲ ہے محور اب کے گرد جو ثابت ہے اور جس کی گہرائی تمام (جب ط ۱۰، ج ۲) میں اُردو اندازہ گھوم سکتا ہے۔ ایک بے وزن سی جو تختہ کے کونے ج کے ساتھ بندھی ہے نقطہ (۰، ۱۰، ۲۰) پر ایک ثابت چکنے حلقہ میں سے گزرتی ہے اور اس کے دوسرے سرے کے ساتھ وزن ۱۰ بندھا ہے۔ ثابت کرو کہ تختہ تعادل میں ہوگا جبکہ زاویہ ف جو تختہ سطح لامی کے ساتھ بناتا ہے مساوی ہے

$$\frac{1}{2} \text{ جب } 2 = \frac{1}{2} \text{ جب } 2$$

کو پورا کرے۔ تعادل کے قیام پر بحث کرو۔

۳۔ ایک چکنی ٹھوس مستویہ مخروط جس کا ارتفاع ۱۰ اور راسی زاویہ ۲ ہے ایک افقی مستویہ سطح کے اندر جس کا نصف قطر ۱۰ ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے، ثابت کرو کہ اگر $16 < 3$ جب 2 ہے تو تعادل قائم ہوگا۔ اور تعادل کے باقی دو محلوں میں غیر قائم ہوگا، نیز اگر $16 > 3$ جب 2 ہے تو تعادل غیر قائم ہوگا اور تعادل

کا کل صرف ایک ہوگا جس میں محور انتصافی ہے۔
 اگر ایک وزن و کو اس پر لٹکا دیا جائے اور مخروط کا وزن و ہو تو ثابت کر دو کہ
 متناظر شرط تعادل ہوگی $۱۶ (و + و) < ۳ و ۵$ جب ۲ ع
 ۳۔ ایک یکساں قائم مستدیر مخروط کا ارتفاع ۵ اور راسی زاویہ ۲ ع ہے۔ یہ دو متوازی
 اور متوازی الافقی سلاخوں کے اندر جن کا فاصلہ ۵ ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا رہیں
 نیچے کی طرف ہے اور اس کا محور انتصافی ہے ثابت کر دو کہ ان زاوی ہٹاؤں کے
 لئے جن میں محور سلاخوں کے متوازی انتصافی مستوی میں حرکت کرے تعادل قائم
 ہوگا اگر $۵ > \frac{۱۶}{۳}$ و ۲ ع

۵۔ ایک قائم مخروط کا راسی زاویہ قائمہ ہے۔ اسے ایک افقی میز پر مربع سوراخ
 کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف سے اور یہ مربع کے اضلاع
 کو مس کرتا ہے۔ ثابت کر دو کہ اگر مخروط کی بلندی ۵ ہاں مربع کے ضلع ۱ کے دو چہند
 سے زیادہ ہو تو تعادل کا ایک ترجیحاً محل ممکن ہے جس میں مخروط کا محور افقی کے ساتھ
 زاویہ جتا $\frac{۱۶}{۳} - ۵$ بنائے۔ نیز ثابت کر دو کہ یہ محل قائم تعادل کا محل ہوگا۔

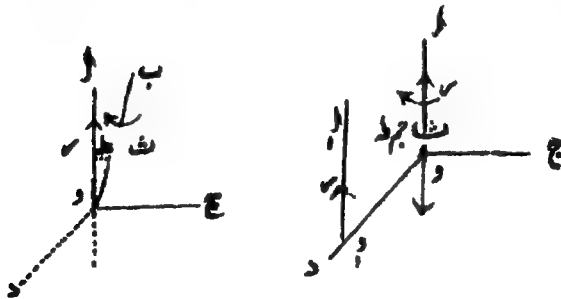
گیارہواں باب

تین ابعاد میں قوتیں (سلسل)

پائمن سوکا مرکزی محور۔ اسطوانہ نما اور صغریٰ خطوط۔

۱۸۴۔ اگر قوتوں کا کوئی نظام ایک استوار جسم پر عمل کر رہا ہو تو ثابت کرو کہ اسے ایک واحد قوت اور ایک ایسے جنت میں تحویل کیا جاسکتا ہے جس کا محور قوت کے خط عمل کے متوازی ہو۔

دفعہ ۱۶۲ میں بتایا جا چکا ہے کہ قوتوں کے کسی نظام کو کسی اختیاری نقطہ و پر عمل کرنے والی ایک قوت میں اور ایک ایسے جنت میں تحویل کیا جاسکتا ہے جس کا معیار اثر و میں سے گزرنے والے محور کے گردش ہو



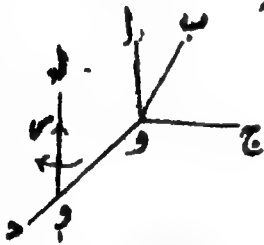
فرض کرو کہ س کی سمت د ہے اور د ب جنت مٹ کا محور ہے، اور

اوب = ط، مستوی سطح اوب میں ول پر وج عمود نکالو اور مستوی
اوج کے علی القیام خط و د کھینچو۔

دفعہ ۴۹ کی رو سے جنت ث جس کا محور و ب ہے و جنتوں ث جم ط
اور ث جب ط کے مساوی ہے جن میں سے اول الذکر کا محور و ا ہے
اور آخر الذکر کا محور و ج ہے۔

موازی جنت مستوی ل و د میں عمل کرتے ہوئے اس کی بجائے دو ایسی
مساوی مخالف متوازی قوتیں رکھ سکتے ہیں جن کا معیار اوج ث جب ط ہو
جنت کی دو قوتوں میں سے ایک قوت س ر ل و جو ا کی مخالف سمت میں
عمل کرے، تب دوسری قوت س ر خط و د کے ایک ایسے نقطہ پر عمل کریگی

کہ س ر و د = ث جب ط یعنی و د = $\frac{\text{ث جب ط}}{\text{س ر}}$
اب د پر کی قوتیں متبادل ہو گئیں
نیز جنت ث جم ط کے محور و ا سے بدل کر و ب
پر لایا جاسکتا ہے۔



اس طرح سے ہمارے پاس بالآخر ایک قوت س ر جن کا خط عمل و ا ہے
اور ایک جنت ث جم ط جس کا محور بھی و ا ہے رہ جاتے ہیں۔
اس محور کو پائٹن سمو کا مرکزی محور کہتے ہیں۔

یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ اس طرح حاصل شدہ مرکزی محور ایک ہی ہوتا ہے
اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ فوٹون کا دیا ہوا نظام و د کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت
اور و د کے گرد عمل کرنے والے ایک جنت کے مساوی ہے اور نیز ایک اور خط و د ل
کے ساتھ عمل کرنے والی ایک اور قوت اور اس خط و د ل کے گرد عمل کرنے والے ایک
اور جنت کے بھی مساوی ہے۔ دفعہ ۱۶۲ کی رو سے حاصل قوت س ر سمت اور مقدار
میں ہمیشہ وہی رہتی ہے مبادیا اساسی نقطہ خواہ کیں لیا جائے پس و د ل متوازی ہوگا و د ل
کے اور حاصل قوت س ر دونوں کے لئے وہی ہے۔

اس لئے نظام (س ر) ث ا خط و د کے گرد متبادل ہے متوازی خط و د ل کے گرد عمل کرے والے
نظام (س ر) ث کے۔ اب اگر و د ل اور و د ل کا درمیانی فاصلہ ع ہو تو قوت س ر جو و د ل کے ساتھ

عمل کرتی ہے وہ مساوی ہے ایک قوت مسا کے جو $\frac{1}{2}$ کے ساتھ عمل کرتی ہے اور ایک جنت مسا $\frac{1}{2}$ کے جس کا محور $\frac{1}{2}$ پر عمود ہے (دیکھو دفعہ ۵۹)
پس دو سرانظام سدا دل ہے $\frac{1}{2}$ کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت مسا کے اور ایک جنت مسا کے جس کا محور $\frac{1}{2}$ ہے اور نیز ایک اور جنت مسا $\frac{1}{2}$ کے جس کا محور $\frac{1}{2}$ پر عمود ہے۔ اس پر موزن الذکر دونوں جنت ایک واحد جنت میں تقوّل ہو جاتے ہیں جس کا محور $\frac{1}{2}$ نہیں ہو سکتا۔ اس لئے موزن الذکر نظام پہلے نظام کے سدا دل نہیں ہو سکتا جس کا محور $\frac{1}{2}$ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ ہمارا ابتدائی مفروضہ غلط تھا یعنی ہم دو مرکزی محور $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ معلوم نہیں کر سکتے لہذا دفعہ ۱۸۵ قبل کا مرکزی محور صرف ایک ہی ہوتا ہے۔
۱۸۵۔ مبدا و خواہ کہیں لیا جائے حاصل قوت ہر صورت میں وہی رہتی ہے اور مرکزی محور کے ساتھ عمل کرنے والی قوت کے مساوی ہوتی ہے۔ لیکن حاصل جنت وہی نہیں رہتا۔ یہ جنت مرکباً مرکزی محور کے لئے چھوٹے سے چھوٹا ہوتا ہے کیونکہ اگر کسی مبدا کے لئے (جو مرکزی محور پر واقع نہ ہو) جنت مسا ہو اور مرکزی محور حاصل قوت کی سمت کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو دفعہ گذشتہ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ مرکزی محور کے لئے جنت کی قیمت مسا جم ط ہوگی یعنی ہمیشہ مسا سے کم ہوگی۔

پس مرکزی محور کے گرد حاصل جنت کا معیار اثر ہمیشہ کم ہوتا ہے اس حاصل جنت کے معیار اثر سے جو مرکزی محور پر نہ واقع ہونے والے کسی نقطہ کے جواب میں حاصل ہو۔

۱۸۶۔ ایک واحد قوت مسا اور ایک جنت ک کو جس کا محور قوت کے خط عمل پر منطبق ہو مجموعی طور پر ایک نام ریج سے موسوم کرتے ہیں نسبت $\frac{1}{2}$ کو یعنی جنت کا معیار اثر بٹے ہوئے قوت کو گھائی کہتے ہیں، یہ گھائی ایک خطی مقدار ہوتی ہے۔ جب گھائی صفر ہو تو ظاہر ہے کہ ریج صرف ایک قوت پر مشتمل ہوگا۔ جب گھائی لامتناہی ہو تو ریج محض ایک جنت پر

مشتل ہوگا۔

واحد قوت سما کو اکثر اوقات پیچ کی حدت بھی کہتے ہیں حاصل واحد قوت کے خط عمل اور گھائی کو لاکر پیچ کہتے ہیں پس پیچ سے مراد ہے ایک خاص خط ہے جو ایک خاص گھائی سے وابستہ ہوتا ہے۔

پیچ کو متعین کرنے کے لئے بائچ مقداروں کی ضرورت ہوتی ہے۔ ان میں سے چار مقداریں محور کے محل کو متعین کرنے کے لئے ضروری ہیں مثلاً وہ نقطہ جہاں یہ خط حوالہ کے کسی مستوی سے ملتا ہے اور حوالے کے محوروں سے اس خط کا میلان بائچوں مقدار گھائی کے تعین کے لئے ضروری ہے۔

کسی پیچ پر پیچ کو پورے طور پر متعین کرنے کے لئے ایک اور چھٹی مقدار کی ضرورت ہوگی جس سے رخ کی حدت ظاہر ہو سکے۔

۱۸۷۔ راست دستی پیچ اور چپ دستی پیچ۔

ظاہر ہے کہ ایک ہی اپنی حرکت کے جواب میں گردش حرکت دو طرح سے یعنی مخالف سمتوں میں عمل پذیر ہو سکتی ہے۔ جب گردش حرکت اس پیچ کش کی حرکت کے مطابق ہو جس سے پیچ اندر کی طرف کسا جا رہا ہو تو پیچ کو راست دستی پیچ کہتے ہیں اگر گردش حرکت اس کے برعکس ہو تو پیچ کو چپ دستی پیچ کہتے ہیں۔

عام تعریف حسب ذیل ہے۔ فرض کرو کہ ایک شخص اس طرح کھڑا ہے کہ اس کا جسم پیچ کے محور پر منطبق ہے اور اپنی حرکت کی مثبت سمت پیروں سے سر کی طرف ہے اور وہ ایک گھڑی کو مشاہدہ کرتا ہے جس کا رخ اوپر کی طرف ہے اور جو گردش حرکت کے مستوی میں واقع ہے۔ تب اگر گردش کی سمت گھڑی کی سوئیوں کی حرکت کے مطابق ہو تو پیچ کو چپ دستی پیچ کہیں گے اور اگر سوئیوں کی حرکت کے مخالف ہو تو راست دستی پیچ کہیں گے۔

مثلاً اس کتاب کی شکلوں میں جو ہندسہ محبات کے عام دستور العمل کے مطابق کھینچی گئی ہے ہم نے چپ دستی پیچ کو مثبت اور معیاری صورت مانا ہے

یہ امر اس بات سے بھی ظاہر ہوگا اگر ہم مذکورہ بالا تعریف کا اُس بیچ پر اطلاق کریں جس کا محور حوالہ کے لا محور پر منطبق ہے کیونکہ ہم نے دفعہ ۴۷ میں یہ فرض کر لیا ہے کہ وہاں سے وہے تک جسم کو گردش دینے والا جنت مثبت ہے۔

۱۸۸۔ وہ شرط معلوم کر دو کہ قوتوں کا ایک معلوم نظام ایک واحد قوت میں تحویل ہو جائے۔ دفعہ ۱۶۲ کی رو سے یہ سب قوتیں کسی اختیاری نقطہ و پیراغل کرنے والی ایک واحد قوت میں آئیں اور ایک واحد جنت مثبت میں تحویل ہو سکتی ہیں۔ اگر قوت کے خطاغل اور جنت مثبت کے محور کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو قوت سما دو قوتوں سما جم طہ اور سما جب طہ کے معادل ہے جہاں سما جم طہ جنت کی سطح مستوی پر نمودار ہے یعنی جنت کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔ اور سما جب طہ جنت کے محور پر نمودار ہے۔ اب قوت سما جب طہ اور جنت کی دونوں قوتیں جو سب ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہیں ایک واحد قوت سما جب طہ میں تحویل ہو جاتی ہیں جو وہیں سے نہیں گزرتی اور اس لئے بالعموم سما جم طہ سے ترکیب پا کر ایک واحد قوت میں تحویل نہیں ہو سکتی۔ لیکن اگر سما جم طہ = یعنی اگر جم طہ = تو چارے پاس صرف ایک قوت سما جب طہ رہ جاتی ہے۔

اس لئے ط کو ۰ کے مساوی ہونا چاہیئے یعنی وہ خطوط مستقیم جن کی سمتی جیب التمام $\frac{لا}{سما}$ ، $\frac{ما}{سما}$ ، $\frac{ل}{سما}$ اور $\frac{م}{سما}$ ، $\frac{ن}{سما}$ ہیں ان کو علی التوائم ہونا چاہیئے۔ اس لئے

$$\frac{لا \times ل}{سما \times سما} + \frac{ما \times م}{سما \times سما} + \frac{ل \times ل}{سما \times سما} = جم \times ۰ = ۰$$

$$لا + ما + ل = م + ن = ۰$$

مطلوبہ شرط ہے۔

۱۸۹۔ غیر متغیرات خواہ مبدا کہیں لیا جائے اور محدودوں کو کیسے ہی بدلا جائے قوتوں کے کسی معلوم نظام کے لئے مقداروں

$$لا + ما + ل = م + ن = ۰$$

کی قیمتوں میں کچھ فرق نہیں آتا جہاں $\text{لا} = \text{لا}$ ، $\text{لا} = \text{لا}$ وغیرہ اور $\text{لا} = \text{لا}$ (م)۔
- مای (و) وغیرہ۔

دفہ ۱۶۲ اور ۱۸۴ کی رو سے ظاہر ہے کہ $\text{لا} + \text{ما} + \text{مے}$ مربع ہے اس
حاصل قوت سرا کا جو مرکزی محور کے جواب میں حاصل ہوتی ہے اس لئے اسکی
قیمت غیر متغیر ہے۔

نیز اگر دفہ ۱۶۲ میں (ل، م، ن) حاصل قوت کی سمتی جیب تمام ہوں اور
اور (ل، م، ن) حاصل جنت کے محور کی سمتی جیب تمام ہوں تو

$$\frac{\text{لا}}{\text{سرا}} \times \frac{\text{ل}}{\text{ث}} + \frac{\text{ما}}{\text{سرا}} \times \frac{\text{م}}{\text{ث}} + \frac{\text{ن}}{\text{ث}} = \frac{\text{لا}}{\text{سرا}} + \frac{\text{ما}}{\text{سرا}} + \frac{\text{ن}}{\text{ث}} = \text{لا} + \text{ما} + \text{ن} = \text{ع}$$

= حاصل قوت اور حاصل جنت کے محور کے درمیانی زاویہ کی جیب تمام۔
= جم طہ (دفہ ۱۸۴)

$$\text{لا} + \text{ما} + \text{ن} = \text{ع} = \text{سرا} \times \text{ث جم طہ} = \text{سرا} + \text{ک}$$

جہاں ک مرکزی محور کے گرد جنت کا معیار اثر ہے۔

$$\text{ع} = \text{لا} + \text{ما} + \text{ن} = \text{ع}$$

پس ع = لا + ما + ن = ع غیر متغیر ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ک صفر ہو یعنی اگر معلوم نظام ایک واحد قوت میں
توزیل ہو سکے تو $\text{لا} + \text{ما} + \text{ن} = \text{ع}$ ۔

دوسرا غیر متغیرہ اس صورت میں بھی صفر ہو گا جب حاصل قوت سرا صفر ہو اس

$$\text{نظام کے مائل بیچ کی گھائی گ} = \frac{\text{ک}}{\text{سرا}} = \frac{\text{ک}}{\text{سرا}} = \frac{\text{ع}}{\text{سرا}}$$

$$= \frac{\text{نظام کا غیر متغیرہ ع}}{\text{غیر متغیرہ سرا کا مربع}}$$

۹۰۔ قوتوں کے کسی نظام کے لئے مرکزی محور کی مساوات معلوم کرنا۔
 دفعہ ۱۶۲ کی ترقیم کی رو سے فرض کرو کہ محوروں ولا، و ما، وی کے لحاظ سے کسی نقطہ ق کے مخلد (ف، گ، ہ) ہیں۔
 ولا کے متوازی ق میں سے گزرنے والے خط کے گرد معیار اثر صریحاً لا، ما، ی کی بجائے لا، ف، ما، گ، ی۔ ہ رکھنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{پس یہ معیار اثر} &= \text{ح (لا-گ) ہے۔ (ی-ہ) ما} [\\ &= \text{ح (لا ہے-ی ما)۔ گ ح (ہ) + ح (ما) (ما)} \\ &= \text{ل۔ گ ہے + ہ ما} \end{aligned}$$

دفعہ ۱۶۲ کی ترقیم کے مطابق۔
 اسی طرح و ما وی کے متوازی ق میں سے گزرنے والے خطوط کے گرد معیار اثر بالترتیب

مر۔ ہ لا + ف ہے اور ن۔ ف ما + گ لا ہیں۔
 نیز ق کے ہر مقام کے لئے حاصل کے اجزائے ترکیبی کی قیمت وہی رہتی ہے، اس لئے یہ اجزائے ترکیبی ہر مقام کے لئے لا، ما، ہے، رہتے ہیں۔
 اگر ق مرکزی محور پر ہو تو جنت کے محور کی سمتی جیوب التمام حاصل قوت سر کے خط عمل کی سمتی جیوب التمام کے متناسب ہوتی ہیں۔

$$\text{اس لئے ل۔ گ ہے + ہ ما} = \frac{\text{مر۔ ہ لا + ف ہے}}{\text{ما}} = \frac{\text{ن۔ ف ما + گ لا}}{\text{ہ}}$$

$$\frac{\text{ل لا + مر ما + ن ہے}}{\text{لا + ما + ہے}} = \frac{\text{ک سر}}{\text{سر}} = \frac{\text{ک}}{\text{سر}}$$

پس نقطہ (ف، گ، ہ) کا طریق یعنی مرکزی محور کی مساوات

$$\frac{\text{ل} - \text{اے} + \text{ی} + \text{ما} - \text{ر} - \text{ی} + \text{لا} + \text{اے} - \text{ن} - \text{لا} + \text{ما} + \text{ا} + \text{لا} - \text{ک}}{\frac{\text{لا}}{\text{ما}} \frac{\text{اے}}{\text{ن}} \frac{\text{ک}}{\text{ر}}}$$

ریچ کی گھائی۔

۱۹۱- مشق ۱- تین قوتیں جن میں سے ہر ایک ق کے مساوی ہے ایک جسم پر عمل کرتی ہیں پہلی قوت نقطہ (۰، ۱، ۱) پر و ما کے متوازی دوسری (۰، ۱، ۰) ب پر و ی کے متوازی اور تیسری نقطہ (۰، ۱، ۱) ج پر و لا کے متوازی عمل کرتی ہے۔ محور کا رتیزی ہیں۔ مقدار اور مقام کے لحاظ سے حاصل ریچ معلوم کرو۔

یہاں لا = ما = اے = ق

نیز ل = ق ب، ر = ق ج اور ن = ق ا
اس لئے اگر ریچ کی قوت سر اور جنت ک ہو تو

$$\text{سر} = \text{لا} + \text{ما} + \text{اے} = \text{ق} + \text{ق} + \text{ق}$$

$$\text{نیزک سر} = \text{ل} + \text{اے} + \text{ر} + \text{ما} + \text{ن} = \text{ق} + \text{ق} + \text{ق} + \text{ق} + \text{ق} + \text{ق}$$

$$\text{ک} = \frac{\text{ق} + \text{ق} + \text{ق} + \text{ق} + \text{ق} + \text{ق}}{۳}$$

دفعہ ۱۹۰ سے مرکزی محور کی مساواتیں ہیں

$$\text{ب} - \text{ا} + \text{ی} - \text{ج} - \text{ی} + \text{ا} = \text{لا} - \text{ا} + \text{لا} + \text{ا}$$

$$\text{یعنی لا} + \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ا}}{۳} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ا}}{۳} + \text{ا} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ا}}{۳} + \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ا}}{۳}$$

پس مرکزی محور ایسا خط مستقیم ہوگا جو نقطہ

$$\left(\frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ا}}{۳}, \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ا}}{۳}, \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ا}}{۳} \right)$$

میں سے گزرتا ہے اور تینوں محوروں سے مساوی زاوے بناتا ہے۔

مشق ۲- دو مساوی قوتیں ان دو خطوط مستقیم کے ساتھ عمل کرتی ہیں

$$\frac{7 \text{ اجمط}}{\text{اجب ط}} = \frac{\text{نسب جب ط}}{7 \text{ ب جمط}} = \frac{7 \text{ ی}}{\text{ج}}$$

نکبت کہ کہ ان لامرکزی محور ط کی تمام قیمتوں کے لئے مسلح

$$7 \left(\frac{7}{\text{ی}} + \frac{1}{\text{ج}} \right) = \text{ب} \left(\frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{7} \right)$$

پرد قع ہوگا۔

اگر ہر ایک قوت ق ہو تو نقطہ (اجم ط، ب جب ط) پر ایک ایسی قوت عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی ا جب ط × ق، ب جم ط ق، ج ق کے تناسب میں اور نقطہ (اجم ط، ب جب ط) پر دوسری ایسی قوت عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی ا جب ط × ق، ب جم ط ق اور ج ق کے تناسب میں

$$\text{پس } 7 = 7 \text{ (لا) } \infty 7 \text{ اجم ط ق}$$

$$\text{ما} = \infty \text{ اور } 7 \text{ ج } 2 \times \text{ق}$$

$$7 = 7 \text{ (ما) } \infty 7 \text{ ب ج جب ط } \times \text{ق}$$

$$\text{ھر} = \infty \text{ اور } 7 \text{ ب } 12 \times \text{ق}$$

ب زفہ ۱۹۰ کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ب ج جب ط} - \text{اج}}{\text{اجب ط}} = \frac{7 \text{ ب} + 7 \text{ اجم ط}}{7} \text{ اور } 7 \text{ اجم ط} = 7 \times \text{ج}$$

دوسری مساوات سے جب ط کی قیمت پہلی مساوات میں درج کرنے سے ہمیں مرکوی محور کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$7 \left(\frac{7}{\text{ی}} + \frac{1}{\text{ج}} \right) = \text{ب} \left(\frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{7} \right)$$

مثالیں

۱۔ ایک کعب کا ہر ضلع ۷ ہے اس کے دو متقابل کے رخوں کے علی القوائم ہیں زاویوں

کے ساتھ دو سادی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ معادل ہیں ایک واحد قوت سا کے جو کعب کے مرکز میں سے گزرتی ہے اور ایک جنت $\frac{1}{4}$ سا کے جس کا محور وہی خط ہے۔

۲۔ وب د ج ایک مستطیل ہے جس کا ضلع وب = ب، وج = ج، نیز و اس کی سطح مستوی پر عمود ہے۔ و ا ج د اور ب د کے ساتھ قوتیں لا، ما، اے عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ حاصل پنچ کی قوت سرا اور جنت کا معیار اثرک بالترتیب لا + لا + ما + مے اور لا (بے ب۔ ما ج) + لا + لا + ما + مے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اگر و ا، وب، وج کو حوالے کے محور لا، ا، ی فرض کیا جائے تو مرکزی محور کی سادات ہے

$$\frac{لا}{لا} = \frac{لا}{ما} - \frac{بے}{لا} = \frac{بے}{لا} + \frac{ک}{ما}$$

۳۔ ایک مستطیلی متوازی السطوح کے کناروں و ا، وب، وج کے طول بالترتیب ۸، ۱۵، ۶ پنچ ہیں اور و ا، ا، ب، ب، ج، ج اس کے بین زاوئی ہیں۔ ان قوتوں کا پنچ معلوم کرو۔ ب سے و کی سمت میں ۱۳۰، ا سے و کی طرف ۶۸ ا ج سے ا کی طرف ۵۰، ب سے ج کی طرف ۶۸

[سرا = ۱۰۸، ک = ۱۰۸؛ مرکزی محور ب ج کے وسطی نقطے سے و ا کے متوازی

خط ہے]

۴۔ سوا، وب، وج ایک کعب کے تین متوازی کنارے ہیں اور و ا، ب، ب، ج ج اور و ا، ا، ب، ب، ج، ج اس کے بین زاوئی ہیں۔ ب ج، ج، ا، ب، ا، ب اور و کے ساتھ قوتیں لا، ما، اے اور سرا عمل کرتی ہیں، ثابت کرو کہ وہ ایک واحد حاصل قوت کے سادی ہونگی اگر

$$(ما + مے + لا + لا) + (ما + ما + مے) =$$

۱۰۔ ایک واحد قوت کے اجزائے ترکیبی محوروں کے ساتھ بالترتیب لا، ما، اے ہیں اور اس کے سیار اثران محوروں کے گرد بالترتیب ل، ا، ن ہیں، ثابت کرو کہ

$$\text{واحد قوت کی مقدار } \sqrt{لا^2 + ما^2 + اے^2} \text{ ہے اور اس کے خط عمل کی مساوات ہے}$$

$$\frac{ما - لا}{ن} = \frac{اے - لا}{م} = \frac{ما - لا}{ل} = ۱$$

۱۱۔ اگر ایک قوت (لا، ما، اے) ایک دائری مکانی منا $\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲} - \frac{اے}{۳} = \frac{۲}{ج}$ کے کون کے ساتھ عمل کرے اور سبدا پر عمل کرنے والی ایک مساوی قوت (لا، ما، اے) اور ایک جنت (ل، ا، ن) کے متبادل ہو تو ثابت کرو کہ

$$۱. ل + ب + م = ۲. ب + لا + ما = ۳. ج + ن + اب = ۴.$$

۱۲۔ ایک قوت ق محور لا کے ساتھ عمل کرتی ہے اور ایک اور قوت ن ق ق ایک اسطوانہ لایما = ۱ کے ایک کون کے ساتھ عمل کرتی ہے ثابت کرو کہ مرکزی محور اسطوانہ

$$ن (ن - لا - ی) + (۱ + ن) = ما = ن = ۱$$

پر واقع ہوتا ہے۔

۱۳۔ دو قوتیں ہیں جن میں سے ایک قوت خط لا = ۱، ی = ۱ کے ساتھ اور دوسری لا = ۱، ی = ج کے ساتھ عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے قوتیں بدلتی ہیں اُن کے متبادل بیچ کا محور سطح (لا + ما) ی = ج، ما مرسم کرتا ہے۔

۱۴۔ ایک قوت نقطہ (۱، ۱) پر محوری کے متوازی عمل کرتی ہے اور ایک اور مساوی قوت متحدہ پر عمود وار نقطہ (۱، ۱) پر عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس نظام کا مرکزی محور سطح

$$ی (لا + ما) = (لا + ما - لا) = ۱$$

بروز واقع ہوتا ہے۔

۱۶۔ ایک قوت Q محوری کے ساتھ عمل کرتی ہے اور ایک اور قوت $M \times Q$ ایک ایسے خط میں عمل کرتی ہے جو لا محور کو مبداء سے فاصلہ J پر کاٹتا ہے اور سطح M کی متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے یہ خط مستقیم محور O کے گرد گھومتا ہے قوتوں کا مرکزی محور سطح

$$\{M^2 Y^2 + (M^2 - 1) X^2\} \{J - X\} = Y^2$$

مرتب کرتا ہے۔

۱۷۔ ایک ناقص نما میں سے صدی ستویں کے ذریعہ ایک فن کاٹا گیا ہے اس فن کے ہر ایک نقطہ پر محاور کی سمت میں N پر کی سطح کے ایک چھوٹے بڑے کے متناسب ایک قوت عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ قوتیں ایک واحد قوت کے مساوی ہیں جو خط مستقیم

$$O \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M} \right) = B \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right)$$

پر عمل کرتی ہے جہاں $2, 1, 2, 1$ ج ناقص نما کے محاور ہیں۔

۱۸۔ ایک ناہم نما $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ کے کونوں کے ایک ہی نظام کے ساتھ مساوی گھائی گ والے ریج عمل کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ ریج ایک واحد قوت میں تخیل ہو سکیں گے بشرطیکہ ان کے مرکزی محور مخروط

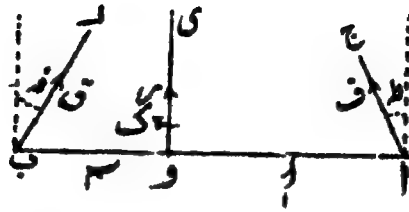
$$O \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = Y^2$$

کے کونوں کے متوازی ہوں۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ قوتوں کا کوئی نظام دو قوتوں میں لا متناہی طریقوں سے تخیل ہو سکتا ہے اور ان قوتوں سے جبر جبر سطحی بناتا ہے اس کا حجم ہیضہ مستقل رہتا ہے۔

فرض کرو کہ معلوم نظام کا مرکزی محور O ہے اور حسب معمول مساوی اور اس نظام کے ریج کی حاصل قوت اور جنت ہیں۔

و میں سے O پر محور اور ایک خط گھینچو اور اس خط پر و کے مخالف جانبوں



میں دو نقطے 'ا' اور 'ب' کو اور فرض کرو کہ 'و' = 'ا' اور 'و' = 'ب' = 'ج' فرض کرو کہ معلوم نظام، 'ا' میں سے گزرنے والی ایک قوت 'ف' اور 'ب' میں سے گزرنے والی ایک قوت 'ق' کے مساوی ہے اور ان کے خط عمل 'و' کے متوازی 'ا' اور 'ب' میں سے گزرنے والے خطوں کے ساتھ متقابل سمتوں میں بالترتیب زاویے طہ اور فہ بناتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ طہ اور فہ کے ٹاپنے کی مضبت سمتیں متقابل ہیں۔

تب 'ف' اور 'ق' کے حاصل 'و' کی سمت میں اور اس پر عمود و راست میں بالترتیب سا اور صفر ہونگے اور اسی طرح سے ان خطوں کے گرد حاصل جنت بالترتیب ک اور صفر ہونگے۔

اس لئے سا = ف جب طہ + ق جب فہ - - - - (۱)

== ف جب طہ - ق جب فہ - - - - (۲)

ک = ف جب طہ × ل + ق جب فہ × ب - - - (۳)

اور == ف جب طہ × ل - ق جب فہ × ب - - - - (۴)

(۱) اور (۲) سے $\frac{ف جب طہ}{ب} = \frac{ق جب فہ}{ل}$ = $\frac{سا}{ب + ل}$ - - - (۵)

(۲) اور (۳) سے ف جب طہ = ق جب فہ = $\frac{ک}{ب + ل}$ - - - (۶)

$$\text{اس لئے } F^2 = \frac{K^2 + S^2}{(1 + \beta^2)} \text{ اور } Q^2 = \frac{K^2 + S^2}{(1 + \beta^2)}$$

$$\text{مس } \frac{K}{S} = \text{اور مس } \frac{K}{S} = \frac{K}{S}$$

۱ اور ۲ کی خواہ کچھ ہی قیمتیں ہوں ہیں ف، ق، ط، اور ذ کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اس لئے ہمارا مفروضہ درست ہے۔

نیز (۵) اور (۶) سے

$$K^2 S^2 = (1 + \beta^2) \times F^2 \times Q^2 \text{ جب } \beta \text{ حجم اور}$$

$$K^2 S^2 = (1 + \beta^2) \times F^2 \times Q^2 \text{ جب } \beta \text{ حجم اور}$$

اس لئے جمع کرنے سے $K^2 S^2 = F^2 \times Q^2 \times (1 + \beta^2) \text{ جب } (\beta + \beta^2) \dots (۷)$

فرض کرو کہ ا ج اور ب د بالترتیب ف اور ق کی مقدار کو تعبیر کرتے ہیں تب

چہاں سطحی ا ج ب د کا حجم

$$\frac{1}{\beta} \Delta \text{ ا ب ج } \times (د سے \Delta \text{ ا ب ج پر محور})$$

$$\frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\beta} \Delta \text{ ا ب } \times (ج \times ب د جب (\beta + \beta^2))$$

$$\frac{1}{\beta} F^2 Q^2 (1 + \beta^2) \text{ جب } (\beta + \beta^2) = \frac{1}{\beta} K^2 S^2 \text{ ' مساوات (۷) سے '}$$

یعنی چہاں سطحی کا حجم مستقل ہے۔

متشاکل صورت۔ اگر قوتیں ف اور ق سادی ہوں اور مرکزی محوروں سے

مساوی فاصلوں پر عمل کریں تو مساواتوں (۱) (۲) (۳) (۴) سے $\beta = \text{ذ یعنی قوتیں}$ مرکزی محور کے ساتھ مساوی زلوئے بناتی ہیں اور

$$\text{مس } = ۲ \text{ ف حجم اور } K = ۲ \text{ ف } \beta \text{ جب } \beta$$

$$F = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{اور} \quad \frac{k}{m} = \frac{v}{r}$$

اگر ہم علاءہ از میں $\frac{K}{R_{\text{am}}}$ فرض کریں تو ف = سماوہ ط = ۶۰ =

۱۹۳۔ دو معلومہ بچوں کا حاصل بیچ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ایک بیخ (سہا، ک) کا محمد (ج) ہے اور ”سہ بیخ (سہا، ک)“

کا محور ب د ہے۔ نیز فرض کرو کہ اُب (ب ج) ان کے محوروں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا زاویہ ہے اور اُن کا درمیانی زاویہ عم ہے۔

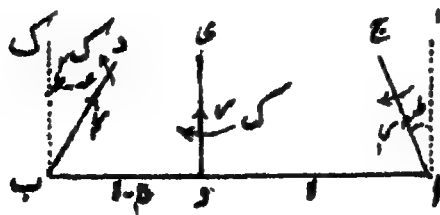
تب حسب شرائط سوال

سا = سا، قجم ط + سا، ۲ ججم (ع - ط) - - - - - (۱)

• = سرچسب ط - سرچسب (ع - ط) (ف) .

ک = ک، حیرطہ + ک = حجم (و-ط) + سحر جیب ط + لا + سحر (ج - لا) جب (و-ط)۔ = (۳)

اور ۰ ک جیب ط - ک جیب (ع - ط) - سر جیب ط × لا + سر م (ج - لا) جیب (ع - ط)



(۱) اور (۲) کی مدد سے آخر کی مساواتیں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

$$ک = ک + جم ط + ک + جم (ع - ط) + س + ج جب (ع - ط) - - - (۳)$$

$$اور - = ک + جب ط - ک + جب (ع - ط) + س + ج جب (ع - ط) - س لا - (۴)$$

(۱) اور (۲) سے

$$سا = س + س + س + ۲ س + س + جم ع - - - - - (۵)$$

$$نیز (۲) سے = \frac{جب ط}{س + س + س + جم ع} = \frac{۱}{س} - - - - - (۶)$$

نیز (۳) اور (۶) سے

$$رک = (ک + ک + جم ع + س + ج جب ع) (س + س + جم ع)$$

$$+ (ک + جب ع - س + ج جم ع) \times س + جب ع$$

$$= س + ک + س + ک + (س + ک + س + ک) + جم ع + س + س + ج جب ع (۷)$$

اس سے قوتوں کے معلومہ نظام کے لئے غیر متغیرہ کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

نیز (۶) کی مدد سے (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$س لا = (ک + ک + جم ع + س + ج جب ع) \times س + جب ع$$

$$- (ک + جب ع - س + ج جم ع) (س + س + جم ع)$$

$$= (س + ک - س + ک) جب ع + س + ج (س + س + جم ع) - - - (۸)$$

(۵)، (۶)، (۷) اور (۸) سے س، ط، رک اور لا معلوم ہو جائے ہیں۔

یعنی مطلوبہ بیچ اور اس کے مرکزی محور کا مقام معلوم ہو جاتا ہے۔

ان مساواتوں سے بنیادی حاصل ہو سکتا ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{ج} = \text{لا} - \text{ج}}{\text{سم} + \text{ج} = \text{سم} + \text{ج}} = \frac{\text{سم} + \text{ج} = \text{سم} + \text{ج}}{\text{سم} + \text{ج} = \text{سم} + \text{ج}}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{جسم ط}}{\text{جسم (ع - ط)}} = \frac{\text{سم} + \text{سم} + \text{جسم ع}}{\text{سم} + \text{جسم ع} + \text{سم}}$$

۱۹۴۔ دو معلومہ قوتیں سم اور سم، ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ بنا رہی ہیں، ان کا حاصل پنچ معلوم کرو۔

یہ دفتہ ماقبل کی ایک خاص صورت ہے جبکہ ک اور کم دو ذوں مغز ہوں۔ اس لئے

$$\text{سم} = \text{ما} + \text{سم} + \text{سم} + ۲ \text{ سم} + \text{جسم ع}$$

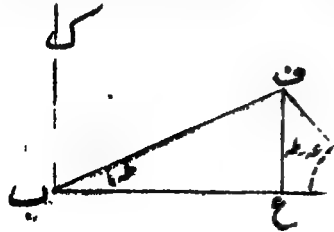
ک سم = سم سم ج جب ع

$$\frac{\text{لا} - \text{ج} = \text{لا} - \text{ج}}{\text{سم} + \text{ج} = \text{سم} + \text{ج}} = \frac{\text{سم} + \text{جسم ع} + \text{سم}}{\text{سم} + \text{سم} + \text{جسم ع}}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{جسم ط}}{\text{سم} + \text{سم} + \text{جسم ع}} = \frac{\text{ما} + \text{سم} + \text{سم} + ۲ \text{ سم} + \text{جسم ع}}{\text{سم} + \text{سم} + \text{جسم ع}}$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{جسم ط}}{\text{جسم (ع - ط)}} = \frac{\text{سم} + \text{سم} + \text{جسم ع}}{\text{سم} + \text{جسم ع} + \text{سم}}$$

۱۹۵۔ دو قوتیں سم اور سم، نقاط ۱ اور ب پر لاج، د ب کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں ان کا مرکزی محور معلوم کرنے کا ہندسی عمل دریافت کرو۔



فرض کرو کہ دو قوتیں سم اور سم ہیں جن میں سے سم، ب د کے ساتھ عمل کرتی ہے اور سم نقطہ ب پر لاج کے

متوازی عمل کرتی ہے، نیز ان کے حاصل سر کی سمت بک ہے اور یہ سما اور سما کی سمتوں کے ساتھ بالترتیب زاوئے ط اور د - ط بنائی ہے۔ پس بک و ف ۱۹۳ کی شکل کی مانند مرکزی محور کے متوازی ہے۔ سطح مستوی ک ب ا میں ب اور ل پر > (ب ف = ط اور > ب ا ف = د - ط بناؤ تب

ف ع جو ا ب پر عمود وار ہے مرکزی محور ہو گا اور حاصل بیچ کا جنت = ک ع ف کیونکہ دغہ ماقبل کی مساداتوں سے ہم آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{لا}{ج} = \frac{لا}{ج} \times \frac{ج ب ط (د - ط)}{ج ب ط (د - ط)} = \frac{ا ف}{ب ف} \times \frac{ج ب ط (د - ط)}{ج ب ط (د - ط)} = \frac{ا ع}{ب ع}$$

پس ع ف مرکزی محور ہے

نیز دغہ ماقبل کی رو سے

$$\frac{ک}{ص} = \frac{سما سما \times ج ب ط (د - ط)}{سما سما} = \frac{سما ج ب ط (د - ط)}{سما ج ب ط (د - ط)} = \frac{ع ف}{ع ف}$$

یعنی ک = سما ع ف

مثالیں

۱- اگر ف اور ق دو غیر متقاطع قوتیں ہوں جن کی سمتیں ایک دوسرے پر عمود وار ہوں تو ثابت کرو کہ مرکزی محور سے ان قوتوں کے خطوط عمل کے فاصلے نسبت ق : ف میں ہیں۔

۲- ثابت کرو کہ قوتوں کا کوئی نظام لا متناہی طریقوں سے دو مساوی قوتوں میں تقسیم ہو سکتا ہے جن کے درمیان کوئی معلومہ زاویہ بنے۔ اگر درمیانی زاویہ معلوم ہو تو قوتوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو۔

۳- دو قوتیں ف اور ق ایسی ہیں کہ ان کا مرکزی محور بلحاظ مقام کے معلوم ہے اور ف کا خط عمل معلوم ہے۔ ثابت کرو کہ ق کے خط عمل کا طریق ایک محزومی بنا ہے۔

۴- دو قوتیں ایک معلومہ نظام (ک، سما) کے معادل ہیں اور ان کے درمیان معلومہ زاویہ ۲ ع بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ

۲۔ $\frac{1}{r}$ محور ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک قوت $\frac{1}{r}$ سر قاعہ کے مساوی ہے۔

۵۔ ایک منتظم چار سطحی کے کناروں کے ساتھ قوتیں اس طرح عمل کرتی ہیں: ف اب ج اور د کے ساتھ، ق، ج، ا اور د ب کے ساتھ، س، ا ب اور د ج کے ساتھ۔ ثابت کرو کہ معادل بیچ کی گھائی چار سطحی کے کنارہ کے $\frac{1}{r}$ کے مساوی ہے۔

(منتظم چار سطحی کے مقابل کے کناروں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹے فاصلے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔)

۶۔ ایک منتظم چار سطحی ا ب ج د ہے جس کا ہر ضلع $\frac{1}{r}$ ہے۔ اس کے کناروں کے ساتھ ایک ہی گھائی گ کے بیچ عمل کرتے ہیں۔ اگر ا ب، د ج کے ساتھ عمل کرنے والے رینجوں کی حدیں مساوی ہوں اور اسی طرح ب ج، د ا اور د ب، ج ا کے ساتھ عمل کرنے والے رینجوں کی حدیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ معادل بیچ کی گھائی گ $+\frac{1}{r}$ ہوگی۔

۷۔ قوتوں کا ایک نظام ہے جس کے مرکزی محور کو ایک خط مستقیم علی التوا تم قطع کرنا ہے ثابت کرو کہ اس خط مستقیم پر کے مختلف نقطوں پر صدر معیار افق کے محور جو سطح مرصع کرتے ہیں وہ قائمی مکانی منا ہے۔

[ایک معلومہ خط مستقیم کو لا کا محور مانو۔ معلومہ نظام (س، ا، ک) کے مرکزی محور کو ہی کا محور اور ان دونوں پر جو خط عمود وار ہے اسکو محور مانو، تب نقطہ (لا، ا، ۱۰) پر قوت س، محور ی کے متوازی ہے اور جنفع ث ہے جو س کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے اور ولا پر عمود وار ہے اس طرح کہ ک = ثا جھ ط اور ث جب ط = س لا، تب اگر

ثا کے محور پر کوئی نقطہ لا، ا، ی ہو تو $\frac{1}{r} = مس ط = س لا$ ، پس مطلوبہ طریق قائمی مکانی منا س لا ی = ک ما ہوگا]

۸۔ ایک معلومہ خط مستقیم پر کے سب نقطوں کے لئے قوتوں کے ایک معلومہ نظام کے

حوالے کے محور معلوم ہوں گے محور ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ ایک بیج جس کی قوت سر ہے اور گھائی گ ج ہے دو ایسی قوتوں کے معادل ہے جن کے درمیان زاویہ ۲ ط بنتا ہے اور محور سے چھوٹا حاصلہ ۲ ج ہے اور جن کی مقدار میں ہیں

$$[(1 + \text{گ مس ط} \pm 1 - \text{گ مم ط}]$$

۱۲۔ دو معلومہ ریجنوں کے محور ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔ ان کی مدتیں لا اور ما ہیں اور ان کی گھائیاں گ اور گ ہیں۔ اگر گھائیاں معلوم ہوں تو مرکزی محور کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ لا اور ما کے حاصل سر کی سمت والے جو پہلے رنج کے محور والے ساتھ زاویہ ط بناتی ہے پس

$$\frac{\text{جم ط}}{\text{لا}} = \frac{\text{جب ط}}{\text{ما}} = \frac{1}{\text{سر}}$$

وا کے گرد حاصل جنت

$$\text{گ} = \text{لا} \times \text{جم ط} + \text{گ} \times \text{ما جب ط}$$

$$= (\text{گ} \times \text{جم ط} + \text{گ} \times \text{جب ط}) \times \text{سر} \dots \dots (1)$$

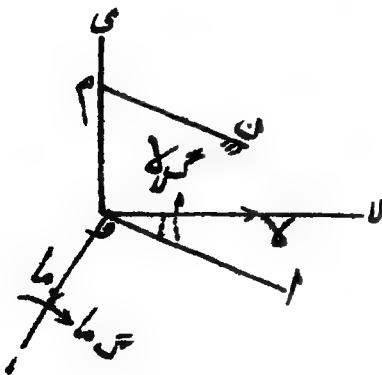
مستوی سطح لا دایں والے کسی علی القوائم خط

کے گرد حاصل جنت

$$\text{گ} = \text{لا} \times \text{جب ط} + \text{گ} \times \text{ما جم ط}$$

$$= (\text{گ} - \text{لا}) \times \text{سر جب ط} + \text{جم ط}$$

آخر الذکر جنت ی والے سطح مستوی میں دو متوازی قوتوں کے معادل ہے۔



اب دفعہ اہ کی رد سے بیٹوازی قوتیں اور وڑ کے ساتھ عمل کرنے والی قوت سر
ل کر ایک قوت سر کے مساوی ہیں جو وڑ کے متوازی ایک ایسے خط م ن کے
ساتھ عمل کرتی ہے کہ

$$\text{وم} = (\text{گ} - \text{گ}) \text{ جب ط جم ط} \quad \dots \quad (۲)$$

جنت (۱) کے محور کو م ن پر منتقل کرنے سے ہمیں ایک ریج حاصل ہوتا ہے
جس کا محور م ن ہے اور جس کا معیار اثر اور قوت بالترتیب

(گ، جم ط + گ، جب ط) سر اور سر ہیں اور بناؤ علیہ جس کی گھائی

$$\text{گ} = \text{گ} \text{ لا جم ط} + \text{گ} \text{ جب ط}$$

اب خط م ن پر کوئی نقطہ (لا، ما، ی) لیا جائے تو نتیجہ (۲) کی رد سے

$$\text{ی} = (\text{گ} - \text{گ}) \frac{\text{لا}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

یعنی م ن سطح (لا + ما) ی = (گ - گ) لا واقع ہوتا ہے۔

اس سطح کو اسطوانہ بنا کہتے ہیں۔ نیز گ اور گ کو اس کی صدر گھائیاں کہتے ہیں۔

اس سطح کی مسادات دفعہ ۱۰ سے فوراً نکل سکتی تھی کیونکہ نظام کے مرکزی محور کی

مسادات ہیں

$$\frac{\text{گ} \text{ لا} + \text{ی} \text{ ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{گ} \text{ ما} - \text{ی} \text{ لا}}{\text{ما}} = \frac{\text{لا} \text{ ما} + \text{ما} \text{ لا}}{\dots}$$

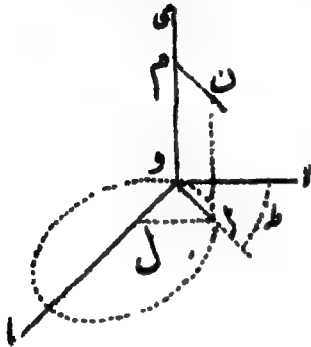
جس سے حاصل ہوتا ہے ی (لا + ما) = (گ - گ) لا ما

اور لا ما = لا

لا اور ما کو ساقط کرنے سے ہمیں مرکزی محور کا طریق ملتا ہے

$$(\text{لا} + \text{ما}) \text{ ی} = (\text{گ} - \text{گ}) \text{ لا ما}$$

۱۹۷۔ اسطوانہ نما (لا + ا) ی = ۲ لا ما کی ساخت کے لئے ہندی عل۔
 لا ما کی سطح مستوی میں نصف قطر لا کا ایک دائرہ کھینچو جو لا کے محور کو مبدا و
 پیمس کرے اس دائرہ کا سمتی نیم قطر لا کھینچو جو لا کے ساتھ کوئی زاویہ بنا لے
 اور لا، واپر عمود کھینچو تب



ال = و جب ۲ ط

سطح مستوی ما = لاس ط جو و
 میں سے گزرتی ہے اور مستوی لا و ما پر
 عمود وار ہے اسطوانہ نما کو کاٹتی ہے

جہاں ی = و جب ۲ ط = ل

اس لئے اگر ابرہم عمود ان نکالیں جس کا طول ل ہو اور ن میں سے و پر عمود
 ن م نکالیں تو ن م ہمیشہ اسطوانہ نما کا کون ہوگا
 ۱۹۸۔ کوئی بیج لا متناہی طریقوں سے دو ایسے ریخوں میں تقوئل کیا جاسکتا ہے جن کے
 محور علی القواہم ہوں۔

فرض کرو کہ ایک بیج (سراگ سرا) ہے جس کا محور م ن ہے، دیکھو
 شکل دفعہ ۱۹۶

کسی خط م و پر جو م ن پر عمود وار ہو ایک نقطہ و لیکر اس کو مبدا مانو اور و
 میں سے گزرنے والے و م پر عمود وار کوئی دو علی القواہم خطوں کو لا اور و ما
 فرض کرو۔

اب فرض کرو کہ م و = ل اور لا و = ط معلوم ہیں۔

تب جب دفعہ ۱۹۶ بیج (لا، گ، لا) محور لا کے گرد اور (ما، گ، ما)

محور و کے گرد معادل ہیں ایک بیج (سراگ سرا) کے جہاں
 گ = گ، ج م ط + گ، ج م ط

اور $\Delta = (گ - گ)$ حجم ط جب ط

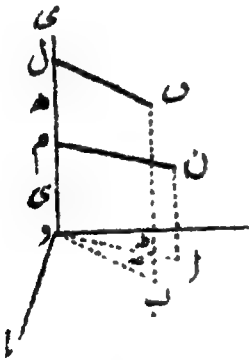
ان سے حاصل ہوتا ہے $گ = گ - \Delta$ مس ط اور $گ = گ + \Delta$ مم ط

نیز $\Delta =$ مس ط اور $\Delta =$ مس ط

اس لئے اگر مس اور گ کی قیمتیں معلوم ہوں تو ہمیں Δ اور ط کی کسی معلوم قیمتوں کے جواب میں Δ ، $گ$ اور Δ کی قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

۱۹۹۔ معلومہ بیچوں پر کوئی دو ریج ایک اور صرف ایک ہی اسطوانہ نما کا تعین کرتے ہیں۔

مرض کرد کم ن اور لی ق دو ریجوں کے محور ہیں، $گ$ اور $گ$ ان کی گھائیاں ہیں اور ان کے درمیان زاویہ عم ہے اور چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ م ل طول میں Δ کے مساوی ہے۔



اب اگر ہم م ل پر ایک نقطہ
و اور دو علی القوائم خطوط ولا و ما
ایسے معلوم کر سکیں کہ جب ہم ان ریجوں
کو ولا اور و ما کے گرد تحلیل کریں
تو ولا کے گرد ترکیبی ریجوں کی
گھائیاں باہم مساوی ہوں اور نیز
و ما کے گرد ترکیبی ریجوں کی گھائیاں

مساوی ہوں تو ہم نے مسئلہ کو ثابت کر لیا۔ کیونکہ ولا کے گرد دو ریج ایک ریج میں ترکیب
پا سکتے ہیں اور اسی طرح سے و ما کے گرد دو ریج ایک ریج میں ترکیب پاسکتے ہیں اور
حسب دفعہ ۱۹۹ ان دو حاصل ریجوں سے ایک اسطوانہ نما حاصل ہوتا ہے۔

پس ہم فرض کرتے ہیں کہ م ن کے گرد کا ریج ولا اور و ما کے گرد دو

رنگوں کے مساوی ہے جن کی گھائیاں گہرے اور گہرے ہیں جیسا کہ وہ = ی

اور زاویہ $\angle A = 60^\circ$

اور اسی طرح ق کے لئے جہاں لاوب = ط + ع

تب حسب ونحو ۱۹۶

$$g = g \cdot 1 = g \cdot \left(\frac{g+g}{g} \right) = \frac{g+g}{g} \cdot g = \frac{g}{g} + \frac{g}{g} \cdot g = 1 + g \quad (1)$$

ی = (گ - گ) / (جم ط جب ط) = $\frac{گ - گ}{ط}$ جب ط = ۲ ط . . . (۹۲)

گہ = گ (ط + ع) + گ (جٹ + ع)

$$(3) \dots \dots \dots (2+2) \text{ جم } \frac{g-g}{2} + \frac{g+g}{2} =$$

اور ی + ہ = (گ-گ) جم (ط+و) جب (ط+و)

$$= \frac{g - g}{2} \text{ جب } (2 + 2) = (4) \quad (4)$$

گ+گ=گ+گ+گ+ (گ-گ) جم+جم (۲+۷) - - (۵)

گ-گ-گ = (گ-گ) جب جب (ط+ع) - - - (۶)

اور $\frac{g-g}{2} = [جَب (ط ۲ + ط ۲) - جَب ط ۲]$

= (گ-گ) جم (ط+ع) جب و . . . (۷۷)

(۶) اور (۷) سے مس $(۲+۳)=$ گ-گ۔ ا - - - (۸)

(۵) اور (۶) کے

گ + گ = گ - گ - (گ - گ) مم عم (ط + ع) = گ + گ + ہ مم عم
 اور گ - گ = (گ - گ) مم عم (ط + ع) = ہ + (گ - گ) مم عم
 ان مساواتوں سے گ اور گ حاصل ہوتے ہیں۔
 نیز (۲) سے

$$۱ = \frac{۱}{۲} - \frac{گ - گ}{جب عم (ط + ع)} \quad \text{جب ط}$$

$$= \frac{گ - گ}{جب عم} - \frac{۱}{۲} = [جم عم - جب عم (ط + ع)]$$

$$= \frac{۱}{۲} = [(گ - گ) مم عم - ہ]$$

ان قیمتوں سے ولا اور واما کے محل واحد طور پر متعین ہو جاتے اور ان کے گرد کے بیچ
 بھی متعین ہو جاتے ہیں۔

۲۰۰ - مقادیر بالا حسب دفعہ ماقبل معلوم کر لینے کے بعد اگر من اور ل ق کے گرد
 بیچوں کے حدتیں سر اور سر ہوں تو یہ دو بیچ معا دل میں، قوتوں
 سراجم ط + سراجم (ط + ع) ، ولا کے ساتھ
 سراجب ط + سراجب (ط + ع) ، واما کے ساتھ
 کے اور جتوں

$$گ = [سراجم ط + سراجم (ط + ع)] ، ولا کے گرد$$

$$گ = [سراجب ط + سراجب (ط + ع)] ، واما کے گرد$$

کے ہر بیچ دفعہ ۱۹۰ کے مطابق یہ قوتیں اور جت ایک ایسے بیچ میں ترکیب پا جاتے ہیں جو
 ذیل کے اسطوانہ نما کے ایک بیچ کے گرد عمل کرتا ہے

ی (لا + ما) = (گ - گ) لا = لا اقمہ ماہ - (گ - گ)'

مشق - ایک ریخ کی گھائی ۱ اور خط عمل ۲ = ۱، ۲ = ۱۲ ہے اور ایک دوسرے ریخ کی گھائی ۲ اور خط عمل (۲ - ۱) ۱۲ = ۵ - ۳ = ۲ ہے ان سے ایک اسطوانہ نما متعین ہو رہے۔ ثابت کر دو کہ اس کی صدر گھائیاں ۲ - ۲ ۱۲ اور ۲ + ۲ ۱۲ ہیں اور اس کے صدر محوروں کی مسادا میں ہیں ۲ - ۲ = (۱۲ + ۲) (۲ - ۵)

۲۰۱ - ایک ہی اسطوانہ نما کے پچوں پر کے پچوں کا حاصل ریخ - اسطوانہ نما کی صدر گھائیاں گپ اور گپ ہیں۔ اب اس ریخ پر غور کرو جس کی حدت سر ہے اور جس کی گھائی ایسی گھائی ہے جو اس اسطوانہ پر محور ولا کے ساتھ زاویہ بنا نے والے ریخ کے لئے مناسب ہے۔ ۱۹۹ کی رو سے یہ ریخ ان دو ریخوں کے معادل ہے

ایک ریخ (سرجم ط، گ، سرجم ط) 'محور ولا کے گرد

اور دوسرا ریخ (سرجب ط، گ، سرجب ط) 'محور ولا کے گرد

اس لئے اگر ہر ایک سلور ریخ کو ولا اور ولا کے گرد ریخوں میں تحویل کیا جائے تو یہ سب ریخ قوتوں اور جفتوں کے حسب ذیل نظام کے معادل ہو جائیں گے:-

لا = ۳ سرجم ط

ما = ۳ سرجب ط

ل = ۳ (گ، سرجم ط) = گ، لا

م = ۳ (گ، سرجب ط) = گ، ما

یعنی ولا کے گرد ریخ (لا، گ، لا) اور ولا کے گرد

ریخ (ما، گ، ما)۔

ان ریخوں کی گھائی وہی ہے جو اسطوانہ نما کی صدر گھائیاں ہیں۔ اس لئے
یہ بل کر ایک ریخ (س'گ'س) کے متبادل ہوئے جو اسطوانہ نما کے محور لا
سے زاویہ خم بنانے والے پیچ پر عمل کرے گا جہاں

$$\text{سس} = \frac{\text{ملا}}{\text{لا}} = \frac{\text{ح} \text{ (س'ج'ط)}}{\text{ح} \text{ (س'ج'م'ط)}}$$

$$\text{س} = \text{ملا} + \text{ما} = \text{م} \{ \text{ح} \text{ (س'ج'م'ط)} \} + \{ \text{ح} \text{ (س'ج'ط)} \}$$

اور گ = گ'ج'م'ف + گ'ج'ف

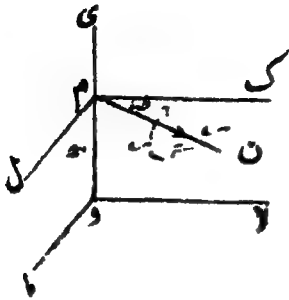
۲۰۲۔ اوپر جو کچھ بیان ہوا اُس سے ظاہر ہے کہ ایک ہی اسطوانہ نما کے پیچوں
پر کے ریخ متبادل میں ہوئے جبکہ ان کی قوتوں کو ان کی سمتوں کے متوازی ایک
ہی نقطہ پر منتقل کر دینے پر یہ قوتیں متبادل ہو جائیں گی کیونکہ اس صورت میں لا
اور ما دونوں صفر ہو گئے۔

بالخصوص ایک ہی اسطوانہ نما کے پیچوں پر کے تین ریخ متبادل ہوں گے
اگر ہر ایک کی حدت باقی دو کے درمیانی زاویہ کی جیب کے متناسب ہو۔
۲۰۳۔ ایک ریخ کی قوت س'ا' اور معلوم پیچ کے گرد اس کی گھائی گ' ہے ثابت کر
کہ اگر جسم کو گ' گھائی والے ایک دوسرے پیچ کے گرد زاویہ ص' میں سے
مر دنا جائے تو اس ریخ کی قوتوں کا کام ہوگا

$$\text{س'ص'س} = \{ \text{گ} + \text{گ'} \} \cdot \text{ج'ط} - \text{ج'ط}$$

جہاں ط' دونوں پیچوں کے محوروں کا درمیانی زاویہ ہے اور ص' اُن کے درمیان
چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے۔

فرض کر دو کہ پیچ گ' کا محور لا ہے، ریخ کا محور م'ن ہے اور ان کے
درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ دم' طول میں ص' ہے۔ ولا کے متوازی



م ک کھینچو اور م ک اور و م پر م
م ل کھینچو۔ قوت سران دو قوتوں کے
معا دل ہے قوت سراجم ط ، م ک
کی سمت میں اور سراجب ط م ل کی سمت
میں۔ جزو ترکیبی سراجم ط معا دل ہے و لا
کے ساتھ قوت سراجم ط اور و لا کے
گرد جنت سراجم ط \times ہ کے۔

جزو ترکیبی سراجب ط معا دل ہے و لا کے ساتھ قوت سراجب ط کے اور
و لا کے گرد جنت۔ سراجب ط \times ہ کے۔

م ن کے گرد جو جنت گ \times سراجم ط کرتا ہے وہ ان دو جنتوں کے
معا دل ہے گ \times سراجم ط خط م ک کے گرد اور گ \times سراجب ط خط م ل
کے گرد۔ ان کے محو کو و لا اور و لا پر خصل کیا جاسکتا ہے۔
پس معلوم رہے معا دل ہے ان اجزا کے

ایک قوت سراجم ط ، و لا کے ساتھ

ایک قوت سراجب ط ، و لا کے ساتھ

ایک جنت سراجم ط - سراجب ط ، و لا کے گرد

ایک جنت سراجب ط + سراجم ط ، و لا کے گرد

اب جسم کا ہٹاؤ مشتق ہے و لا کے گرد ایک زاویہ ہٹاؤ سف سے کے اور و لا کے
ساتھ ایک خطی ہٹاؤ گ \times سف سے کے۔

زاویہ ہٹاؤ کی وجہ سے جنتوں کا کام ہے سراجم ط - سراجب ط (سف سے)

(دیکھو دفعہ ۹۷) اور قوتوں کا کام صفر ہے۔

داخلی ہٹاؤ کی وجہ سے جنٹوں کا کام صرف ہے اور قوتوں کا کام مجموعہ \times گہرے سے
پس خفیف سے ہٹاؤ میں قوتوں کا مجموعی کام

= سمت سے { (گ + گ) } جم ط - ہ جب ط {

اگر گ اور گ کو باہم بدل دیا جائے تو اس کام میں کوئی فرق نہیں آتا۔ پس
اگر ہمارے پاس بیج والا کے گرد بیج (سر، گ، سر) ہوگا اور جسم کو ہم \times محور پر
لٹھائی گ والے بیج کے گرد خفیف سے زاویہ مع سے میں سے لٹھایا جائے
تو بھی اتنا ہی کام ہوتا۔

۲۰۴۔۔۔ موزوم کام کے اصول سے ظاہر ہے کہ اگر ایک جسم صرف محور والا کے بیج پر
حرکت کر سکتا ہے اور اس پر بیج م ن کا ایک رینج عمل کرے تو جسم متبادل میں ہوگا اگر

(گ، گ) جم ط - ہ جب ط =

وہ بیج جو اس شرط کو پورا کرتے ہیں متکافی بیج کہلاتے ہیں۔ پس متکافی بیجوں سے وہ
بیج مراد ہیں کہ اگر کسی ایک بیج کے گرد کسی حدت اور مناسب گھائی والا بیج جسم پر
عمل کرے اور جسم صرف دوسرے بیج پر حرکت کر سکتا ہو تو جسم متبادل رہیگا۔
اوپر کی شرط اتنے ظاہر ہے کہ وہ بیج جن کے محور قطع کرتے ہوں یعنی \times =
متکافی ہونگے اگر ان کے محور علی التوائم ہوں یا اگر ان کی گھائیاں مساوی اور علامت
میں مختلف ہوں۔

۲۰۵۔۔۔ اگر کوئی بیج جو بر دو بیجوں \times اور \times کے متکافی ہو تو یہ \times اور \times سے متغیہ
ہونے والے اسطوانہ نما پر کے ہر بیج کے لئے متکافی ہوگا۔

دفعہ ۲۰۱ سے ظاہر ہے کہ چونکہ \times اور \times ایک ہی اسطوانہ پر کے بیج ہیں
اسلئے کہ کوئی بیج \times اور \times کے گرد دو بیجوں کے متبادل ہوگا اگر بیج \times کی حدت
بیجوں \times اور \times کی حدتوں کے اجزائے ترکیبی کے متبادل ہو بیج \times کی بجائے \times
اور \times کے گرد یہ دو ترکیبی بیج لگاؤ۔

چونکہ بیج جو اور \times متکافی ہیں اس لئے \times کے گرد عمل کرنے والے بیج کا

سوہوم کام جب کے گرد کسی ہٹاؤ کے لئے صفر ہوگا۔ اسی طرح سے ہ کے گرد عمل کرنے والے سیخ کا سوہوم کام بھی جب کے گرد کسی ہٹاؤ کے لئے صفر ہوگا۔ اس لئے پچ لہ کا مجموعی سوہوم کام جب کے گرد کسی ہٹاؤ کے لئے صفر ہوگا۔ پس لہ اور جہ متکافی ہیں۔

۲۰۶۔ صغریٰ خطوط اور صغریٰ مستوی سطحیں فرض کرو کہ کسی مبدایا اساسی نقطہ و کے متناظر قوتوں کے نظام کی حاصل قوت سرا اور حاصل جنت ث ہے۔ جنت ث کے محور پر کوئی عمودی خط و میں سے کھینچو۔ تب اس خط کے گرد نظام کی تمام قوتوں کے معیار اثروں کا جبر یہ مجموعہ صفر ہوگا کیونکہ اس محور کے گرد ث کا جزو ترکیبی کچھ نہیں ہے اور سرا اس خط سے ملتا ہے۔

اس بنا پر اس خط کو صغریٰ خط کہتے ہیں اور اس کے طریق کو یعنی و میں سے ث کے محور پر عمود دار خط کے طریق کو و کا صغریٰ مستوی کہتے ہیں۔ نیز نقطہ و کو سطح مستوی کا صغریٰ نقطہ کہتے ہیں۔

۲۰۷۔ کسی محوروں ولا، وادی کے لحاظ سے کسی معلومہ نقطہ (ف، گ، ہ) کے صغریٰ مستوی کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ولا، وادی کے ساتھ حاصل قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، مے اور ان کے گرد حاصل جنت کے ترکیبی اجزاء ل، ہ، ن، یں۔ دفعہ ۱۰ کی رُود سے نقطہ (ن، گ، ہ) میں سے ولا، وادی کے متوازی خطوط کے گرد

ل۔ گ مے + ہ ما، م۔ ہ لا + ن مے، ن۔ ف ما + گ لا جنت ہیں۔

اور یہ نقطہ (ن، گ، ہ) پر حاصل جنت کے محور کے سمتی جیوب التمام کے متناسب ہیں لیکن حاصل جنت کا محور اس نقطہ پر صغریٰ مستوی سطح کا عماد ہے۔

پس صغریٰ مستوی سطح کی مساوات ہے

(لا - ن) (ل - گ مے + ہ ما) + (ا - گ) (م - ہ لا + ن مے)

+ (ی - ہ) (ن - ن ما + گ لا) = ۰

یعنی لا (ل-گ) + م (ما) + (مر-ھ) + لا + ن (ے)
 + ی (ن-ن) + ما + گ (لا) = ن + ل + گ + مر + ھ + ن ... (۱)

برعکس ازیں اگر ہم سطح مستوی

ل + لا + م + ن ی = ا - - - - - (۲)
 کا صغریٰ نقطہ معلوم کرنا چاہتے ہیں تو فرض کریں کہ مطلوبہ نقطہ ہے
 (ف، گ، ھ)

اب نقطہ (ف، گ، ھ) سطح مستوی (۲) پر واقع ہے۔ اس لئے
 مساواتوں کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ف}}{\text{گ}} = \frac{\text{ن} + \text{م} + \text{ن} - \text{ما} - \text{ل} + \text{ن} + \text{ل}}{\text{ے} - \text{م} + \text{ن} + \text{ل} + \text{مر}}$$

$\frac{\text{ف}}{\text{گ}} = \frac{\text{ل} + \text{لا} + \text{م} + \text{ن} + \text{ے}}{\text{ے}}$
 جس سے مستوی سطح (۲) کا صغریٰ نقطہ حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۰۸۔ وہ شرط معلوم کرو کہ خط مستقیم

$$\frac{\text{لا} - \text{ف}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{گ}}{\text{م}} = \frac{\text{ی} - ھ}{\text{ن}}$$

توں کے مذکورہ بالا نظام کا صغریٰ خط ہو۔

محوروں کے متوازی (ف، گ، ھ) میں سے گزرنے والے خطوط
 کے گرد ترکیبی جفت یہ ہیں

ل-گ + م + ما، مر-ھ + لا + ن، ن-ن + ما + گ لا

اس لئے دئے ہوئے خط کے گرد جفت کا معیار اثر

$$= \text{ل} (\text{ل} - \text{گ} + \text{مے} + \text{ما}) + \text{م} (\text{مر} - \text{لا} + \text{ن} + \text{مے}) \\ + \text{ن} (\text{ن} - \text{ت} + \text{ما} + \text{گ} - \text{لا})$$

اور یہ صفری خط کا بشرطیکہ

$$\text{لا} (\text{م} - \text{ن} - \text{گ}) + \text{ما} (\text{ن} - \text{ت} - \text{ل} - \text{م}) + \text{مے} (\text{ل} - \text{گ} - \text{م} - \text{ن}) \\ = \text{ل} + \text{ل} + \text{م} + \text{م} + \text{ن} + \text{ن}$$

یعنی اگر	لا	ما	مے
	ل	م	ن
	ت	گ	ہ
	ن	ن	ن

$$= \text{ل} + \text{ل} + \text{م} + \text{م} + \text{ن} + \text{ن}$$

پس یہ اس امر کی شرط ہے کہ دیا ہوا خط مذکورہ بالا نظام کا صفری خط ہو۔

مشق۔ ثابت کرو کہ قوتوں کے نظام کے کسی صفری خطوں میں سے چار خط کسی زائد نما کے
مکون ہوتے ہیں جن میں دو ایک نظام سے متعلق ہوتے ہیں اور دو دوسرے سے۔

$$\text{فرض کرو کہ زائد نما } \frac{\text{ل}^2}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}^2}{\text{ج}} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}} = 1 \text{ ہے}$$

اور فرض کرو کہ اس کے مرکز اور محوروں کے لحاظ سے قوتوں کا نظام

(لا، ما، مے، ل، مر، ن) سے تعمیر ہوتا ہے۔

زائد نما کے کسی مکون کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{ا} - \text{جم} \text{ط}}{\text{ا} - \text{ب} - \text{جم} \text{ط}} = \frac{\text{ب} - \text{ب} - \text{جم} \text{ط}}{\text{ج}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}}$$

دفعہ اقبل کی رو سے یہ قوتوں کے نظام کا صفری خط ہوگا اگر

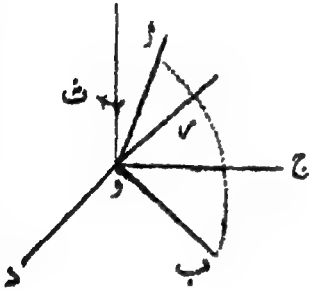
$$\text{لا} (\text{ب} - \text{ج} - \text{ب} \text{ط}) + \text{ما} (\text{ج} - \text{م} + \text{ب} - \text{ل} - \text{ب} \text{ط}) - \text{م} (\text{ب} - \text{ج} - \text{ن} - \text{ج})$$

$$\text{مینی اگر ج د} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ب ج}} + \frac{\text{ل}}{\text{ب ج}} \right) - \text{جم د} \left(\frac{\text{ما}}{\text{ب ج}} + \frac{\text{م}}{\text{ب ج}} \right) = \frac{\text{ن}}{\text{ج}} - \frac{\text{ے}}{\text{ب ج}}$$

جس سے مرعہ بالعموم ط کی دو قیمتیں حاصل ہوگی۔ پس کمون کے ایک نظام کے دو کمون صفری خطوط ہیں۔ اسی طرح سے کمون کے دوسرے نظام کے لئے۔

۲۰۵۔ ثابت کر دو کہ قوتوں کا کوئی معلومہ نظام دو قوتوں میں تقویل ہو سکتا ہے جن میں سے ایک کسی معلومہ خط و لا کے ساتھ عمل کرتی ہے۔

و کو اساسی نقطہ یا سبدا یا نوار



فرض کرو کہ س اور ث حاصل قوت اور جنت ہیں۔ و لا اور قوت س کے خط عمل میں سے ایک سطح مستوی کھینچو جو جنت کی سطح عمل سے (یعنی سطح مستوی ج و د سے جو جنت کے محور پر نمودار ہے) خط و ب میں ملے۔ س کو دو قوتوں میں تخیل کرو جن میں

سے ایک ث و لا کے ساتھ عمل کرے اور دوسری ث و ب کے ساتھ عمل کرے۔ قوت ث نہ، سطح مستوی ب و ج میں حاصل جنت کی دو قوتوں سے مل کر ایک قوت ث نہ بن جائیگی جس کا خط عمل و ب کے متوازی ہوگا۔

اس سے ظاہر ہے کہ قوتوں کا کوئی نظام معادل ہوتا ہے ایک خاص قوت ث نہ کے جو ایک معلومہ خط و لا کے ساتھ عمل کرتی ہے سہ ایک اور قوت ث نہ کے جو د کے صفری سطح مستوی میں کسی جگہ پر عمل کرتی ہے۔

اس قسم کی قوتوں کو جیسی کہ ث نہ اور ث نہ ہیں مزدوج قوتیں کہتے ہیں اور ان کے خطوط عمل مزدوج خط کہلاتے ہیں۔

نقطہ و خط و لا پر خواہ کسی جگہ لیا جائے قوت ث نہ ہر صورت میں اس نقطہ کے صفری سطح مستوی میں عمل کرے گی۔ پس جیسے جیسے نقطہ و لا پر حرکت کرتا ہے اس کا صفری سطح مستوی مسلسل طور پر اس طرح گھومتا جاتا ہے کہ و لا کا مزدوج خط ہمیشہ اس میں واقع ہوتا ہے۔ پس و لا کا مزدوج خط اس طرح آسانی

سے دریافت ہو سکتا ہے کہ وہ ایک کوئی دو مناسب نقطے لیکر ان نقطوں کے صفری سطوح
مستوی کی مساواتیں لکھی جائیں۔ مطلوبہ خط ان سطوح مستوی کا خط تقاطع ہے۔
مثلاً فرض کرو کہ ہم قوتوں کے نظام (لا، ما، مے، ل، مر، ن) کے

لحاظ سے خط

$$(۱) \quad \frac{لا-ن}{ل} = \frac{ما-گ}{م} = \frac{مے-ی}{ن} \dots \dots \dots$$

کا مزدوج خط معلوم کرنا چاہتے ہیں
وضیح ۲۰۷ کی رو سے نقطہ (ف، گ، ہ) کا صفری مستوی ہے

$$لا (ل-گ مے + ما) + ما (مر-ہ لا + ف مے)$$

$$+ ی (ن-ف ما-گ لا) - ل ف + مرگ + ن ہ \dots (۲)$$

(۱) پر کوئی دوسرا نقطہ ہے

$$(ف-ل، گ-م، ی-ن)$$

اس نقطہ کا صفری مستوی ہے

$$لا (ل-گ مے + مے-ن) + ما (مر+ن مے-ل مے)$$

$$+ ی (ن-ف ما+گ لا - ل مے - مے لا)$$

$$= ل (ن مے) + مر (گ-مے) \dots \dots (۳)$$

(۲) اور (۳) سے مطلوبہ مزدوج خط کی مساوات بیان ہوتی ہے۔

(۲) کو (۳) میں سے تفریق کرنے سے

لا [(ن ما - م مے) + (ما ل - لے) - (ن لا) + (ی ام لا - ل ما)]

ل ل + م م + ن ن = (۴)

(۲) اور (۴) مطلوبہ خط کی مساواتیں پہلے تر شکل میں ہیں۔
یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ (۴) مساوات سے خط (۱) پر لاتنا ہی کے
نقطہ کا صفری مستوی ضمیمہ ہوتا ہے کیونکہ اس نقطہ کے محدود (ل و م و ن) ہیں
جہاں رکاوٹوں کا طول لاتنا ہی ہے۔

مثالیں

- ۱۔ اس حدیث پر بحث کرو جس میں دفعہ ۲۰۹ کا خط و ا جہ نظام کا صفری خط ہو۔
- ۲۔ ایک خط مستقیم کی مساواتیں (۱) + (ب + ا + ج + ی) = (د + ب + ا + ج + ی) + د =

ہیں۔ ثابت کرو کہ اس خط کے مزدوج خط کی مساواتیں متطعات

$$\begin{array}{cccc} \parallel & \text{ل} & \text{م} & \text{ن} & \parallel \\ & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \\ & \text{د} & \text{ب} & \text{ج} & \\ & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \end{array}$$

میں سے کسی دو کو صفری مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں جہاں ل، م، ن نقطہ

(لا، ا، ی) ترکیبی جفت ہیں اور

ل، م، ن مرکز پر ترکیبی جفت ہیں۔

- ۳۔ قوتوں کے کسی نظام (لا، ما، مے، ل، مرا، ن) کو دو قوتوں کے معادل بنایا گیا
ہے جن میں سے ایک محور لا کے ساتھ عمل کرتی ہے اور دوسری مناسب قوت ہے۔

ثابت کرو کہ ان قوتوں کی مقداریں یہ ہیں

$$\frac{\text{ل} + \text{لا} + \text{م} + \text{ن}}{\text{ل}} \text{ اور } \frac{[\text{م} + \text{ن} - \text{مے}] + \text{ل} + \text{ما} + \text{مے}}{\text{ل}}$$

[فرض کرو کہ وہ قوت جو مورلا کے ساتھ عمل کرتی ہے ق ہے، اب دوسری قوت کے اجزاء ترکیبی لا۔ ق، ما، اے ہونگے، فرض کرو کہ یہ قوت کسی نقطہ (ن) آگ) پر عمل کرتی ہے۔ چونکہ یہ قوتیں تو ہم مذکور کے معادل ہیں اس لئے دفعہ ۱۶۲ کی رو سے

ل = گ، اے، ف = اے، اور ق = ن، ما، گ (لا۔ ق)

اس سے نتائج بالا آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں، نیز دوسری قوت کا خط عمل معلوم ہو سکتا ہے [۴۔ ثابت کرو کہ ریخ (لا، ما، اے، ل، ا، ن) دو قوتوں کے معادل ہے جن میں سے ایک خط لا = ا = ی کے ساتھ اور دوسری خط

$$ل + لا + مرا + ن = ی =$$

$$اور لا (ما۔ اے) + ا (اے۔ لا) + ی (لا۔ ما) = ل + مرا + ن$$

کے ساتھ عمل کرتی ہے، دونوں قوتوں کی مقداریں معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ قوتوں کے دو نظام بالعموم مزدوج خطوں کا صرف ایک ہی زوج مشترک رکھتے ہیں۔

۶۔ ایک زائد نما کے ایک ہی نظام کے دو کونوں کے ساتھ قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اسی نظام کے دو کون ان قوتوں کے صفری خط ہیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ ایک خط ل ب کے مختلف نقطوں کے صفری سطوح مستوی ایک دوسرے خط ج د میں سے گزریں گے نیز اگر مختلف سطحوں میں خطوط ل ب ایک زائد نما کے کون ہوں تو خطوط ج د بھی ایک زائد نما کے کون ہونگے۔

۸۔ قوتوں کے ایک نظام کو دو قوتوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن میں سے ایک کسی خاص نقطہ تقسیم کے ساتھ عمل کرتی ہے، ثابت کرو کہ (۱) اس قسم کی قوتوں کے دو جوڑوں کے چار خطوط عمل یک جا درجی زائد نما کے ایک ہی نظام کے کون ہونگے اور (۲) دو خطوط مستقیم جو ان دو قوتوں اور مرکزی محور میں سے گزرتے ہیں ایک زائد نما کی مکافی نما کی محوین کرینگے جس کے کونوں کا ایک جٹ مرکزی محور پر عمود ہوگا۔

$$\text{مس ط} = \frac{1}{\text{سرا ب}}، \text{مس ذ} = \frac{\text{غ}}{\text{سرا ا}}، \text{مس (ط-ع)} = \frac{\text{غ}}{\text{سرا (ب+سا)}} \\ \text{اور مس (ذ+ع)} = \frac{\text{غ}}{\text{سرا (ا-سا)}}$$

ان مساواتوں میں سے ط اور ذ کو سا قفا کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا اور ب

اس مساوات کی اصلیں ہیں

$$\text{ا۔} \left[\frac{\text{غ}}{\text{سرا}} - \frac{\pi}{\text{ک}} \right] + \text{م م ع} = \left[\frac{\text{غ}^2 \times \text{غ}}{\text{سرا سرا}} - \frac{\text{غ سا م م ع}}{\text{سرا}} \right] =$$

پس مطلوبہ فاصلہ = اس مساوات کی اصلوں کا فرق جو تحویل کرنے پر دئے ہوئے جواب کے مساوی ثابت کیا جاسکتا ہے۔

• اثبات کرو کہ قوتوں کے تین معلومہ نظاموں کے مشترک صفری خطوط ایک چادری زائد نما کے ایک ہی نظام کے کون ہیں۔



بارہواں باب

مشینیں

۲۱۰۔ اس باب میں ہم چند سادہ مشینوں کو بیان کریں گے اور ان کے متبادل پر بحث کریں گے۔

ہم فرض کریں گے کہ ان مشینوں کے مختلف حصے چکرنے اور استوار ہیں اور سب رسیاں جو استعمال کی جاتی ہیں مکمل طور پر مڑ جانے والی ہیں، نیز ان مشینوں پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ ہمیشہ باہم متبادل رہتی ہیں یعنی مشینیں ہمیشہ ساکن رہتی ہیں۔ عملی دنیا میں یہ شرائط بہت سی مشینوں میں تقریبی طور پر بھی پورے نہیں ہوتے۔

مشین کو کسی مزاحمت پر غالب آ جانے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ جو قوت مشین پر لگائی جاتی ہے اُس کو طاقت کہتے ہیں اور جس رکاوٹ پر غالب آنا مقصود ہوتا ہے اُس کو مزاحمت یا وزن کہتے ہیں خواہ وہ کسی شکل میں نمودار ہو۔

۲۱۱۔ جیلی فائدہ۔ اگر کسی مشین میں طاقت Q مزاحمت W کو متبادل کرے تو

نسبت $\frac{W}{Q}$ یعنی مزاحمت کو مشین کا جیلی فائدہ کہتے ہیں۔ پس

مزاحمت = طاقت \times جیلی فائدہ

بعض اوقات جیلی فائدہ کی بجائے اصطلاح 'قوتی نسبت' بھی استعمال کی جاتی ہے۔ تقریباً سب مشینیں اس طرح بنائی جاتی ہیں کہ جیلی فائدہ ایک سے زیادہ رہے۔

رفقار کی نسبت۔ کسی مشین کی رفقار کی نسبت سے اُن فاصلوں کی نسبت مراد ہوتی ہے جن میں سے بالترتیب ایک ہی وقت کے دوران میں طاقت اور مزاحمت کے نقاط حرکت کرتے ہیں یعنی

$$\text{رفقار کی نسبت} = \frac{\text{وہ فاصلہ جس میں سے ق حرکت کرتا ہے}}{\text{وہ فاصلہ جس میں سے و حرکت کرتا ہے}}$$

اگر مشین ایسی ہو کہ اس کے ترکیبی حصوں کو اٹھانے میں کوئی کام سرانجام نہ دینا پڑے اور اگر یہ بالکل چکینی ہو یعنی اس کے مختلف اجزاء کے اندر رگڑا کی قوت بالکل معدوم ہو تو معلوم ہو گا کہ خیلی فائدہ اور رفقار کی نسبت دونوں مساوی ہوتے ہیں۔ پس ایسی صورت میں

$$\frac{\text{و}}{\text{ق}} = \frac{\text{وہ فاصلہ جس میں سے ق حرکت کرتا ہے}}{\text{وہ فاصلہ جس میں سے و حرکت کرتا ہے}}$$

اس لئے \times وہ فاصلہ جس میں سے و حرکت کرتا ہے

$$= \text{ق} \times \text{وہ فاصلہ جس میں سے ق حرکت کرتا ہے} -$$

یعنی طاقت کا کام = وزن کے خلاف کام
۲۱۲۔ ہم دیکھیں گے کہ ذیل کا مسئلہ جو کام کے اصول کے نام سے موسوم ہے نہایت عام اور جامع مسئلہ ہے:-

خواہ ہماری مشین کیسی ہی ہو بشرطیکہ اس کے اجزاء کے اندر رگڑ نہ ہو اور اس کے مختلف حصوں کے وزنوں کو نظر انداز کر دیا جائے طاقت کا کام ہمیشہ اُس کام کے مساوی ہوتا ہے جو وزن یا مزاحمت کے خلاف کیا جائے۔

اس اصول کو موہم کام کے اصول کی توسیع خیال کیا جاسکتا ہے۔ اس میں

بجائے سوہوم ہٹاؤں کے ایسے حقیقی اور محدود ہٹاؤ ہوتے ہیں جو مشین کے ہندسی روابط کے مطابق ہوں۔

فرض کر دو کہ ہماری مشین سے خیل فائدہ حاصل ہوتا ہے یعنی وزن سے کم طاقت لگائی پڑتی ہے تو طاقت کا فاصلہ طے کردہ وزن کے فاصلہ طے کردہ سے اُسی نسبت میں کم ہوگا۔ عام الفاظ میں اس امر واقعہ کو یوں بیان کرتے ہیں کہ طاقت میں جو فائدہ حاصل ہوتا ہے رفتار میں اتنا ہی نقصان ہوتا ہے۔ یہ کہنا شاید زیادہ جامع ہو کہ خیل فائدہ کا حصول رفتار میں تناسب کمی پیدا کرتا ہے۔ کسی مشین کے استعمال سے کام میں فائدہ نہیں اُٹھایا جاسکتا اگرچہ عام طور پر خیل فائدہ ہوتا ہے۔ عملی طور پر رگروڈ وغیرہ کی وجہ سے ہر مشین کے استعمال سے کچھ نہ کچھ کام کا نقصان ہوتا ہے

مشین کے فائدے حسب ذیل ہیں۔

(۱) اس کی مدد سے ایک شخص اس سے بہت زیادہ وزن اٹھا سکتا ہے جتنا کہ وہ مشین کی مدد کے بغیر اٹھا سکتا تھا۔ مثلاً چرخوں کے نظام یا چرخ اور محور کی مدد سے۔
(۲) مشین کے کسی ایک حصہ کو حرکت میں لانے سے اس کے دوسرے حصے میں زیادہ تیز حرکت پیدا کی جاسکتی ہے مثلاً بائیکسل میں۔
(۳) مشین کی مدد سے کسی قابل سائی مقام پر آسان طریقہ سے ڈھلوان لگا سکتے ہیں۔ مثلاً دست چناہ کی مدد سے آگ کو ہلا سکتے ہیں یا چونے کے بڑے ٹوکڑے کو ایک چرخ کی مدد سے کسی عمارت پر چڑھا سکتے ہیں اس طور پر کہ ایک رسی ٹوکڑے سے باندھ دیا جائے اور اسے عمارت پر کی ایک وابستہ چرخ پر سے گزار کر اس کے دوسرے سرے کو زمین پر کا کوئی استادہ شخص پھینچے۔

۲۱۳۔ بیرم۔ بیرم دراصل ایک سیدھی یا ڈیڑھی استوار سلاخ ہوتی ہے جس کا ایک نقطہ ثابت ہو اور باقی ماندہ سلاخ اس نقطہ کے گرد گھوم سکتی ہو۔ اس ثابت نقطہ کو نصاب کہتے ہیں اور نصاب سے طاقت اور مزاحمت کے خطوط عمل کے عمودی فاصلوں کو بیرم کے بازو کہتے ہیں۔



قسم اول - اس میں وزن و اور طاقت ق
نصاب کے مختلف جانب عمل کرتے ہیں۔

قسم دوم - اس میں وزن و اور طاقت
ق نصاب کے ایک ہی طرف عمل کرتے

ہیں۔ لیکن طاقت ق وزن و کی نسبت
نصاب سے زیادہ فاصلہ پر عمل کرتی ہے۔

قسم سوم - یہاں طاقت ق اور وزن و
نصاب ج کے ایک ہی طرف عمل کرتے

ہیں لیکن طاقت کا نصاب سے فاصلہ
وزن کے فاصلہ سے کم ہوتا ہے۔

۲۱۴- سیدھے بیرم کے تعادل کی شرائط۔

ہر قسم میں جسم پر تین متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں لہذا نصاب پر کا تعادل نہ قوت
ق اور و کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگا۔
پہلی اور تیسری قسم میں ہم نے دیکھا ہے کہ ق اور و متقابل سمتوں میں عمل
کرتے ہیں۔

دوسری صورت میں وہ ایک ہی سمت میں عمل کرتے ہیں۔ چونکہ ہر صورت میں
ق اور و کی حاصل قوت ج میں سے گزرتی ہے اس لئے و و ۳ کے مطابق

$$ق \times ج = و \times ب$$

$$\text{اس لئے } \frac{ق}{و} = \frac{ج}{ب} = \frac{ق \text{ کا بازو}}{و \text{ کا بازو}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ پہلی قسم میں بالعموم اور دوسری قسم میں ہمیشہ جلی فائدہ حاصل ہوتا ہے۔

لیکن تیسری قسم میں خیلی نقصان ہوتا ہے۔

۲۱۵۔ مختلف قسم کے بیرموں کی مثالیں حسب ذیل ہیں۔

قسم اول۔ آتش گیر جبکہ اسے آگ کو ہلانے کے لئے استعمال کیا جائے اس صورت میں جھکے کی صلاح نصاب ہوتی ہے۔

بیخ کش جب اسے بیخ نکالنے کے لئے استعمال کیا جائے۔ ایک بیل جبکہ اس کا کوئی نقطہ کسی ثابت سہارے پر ساکن ہے۔

ترازو۔ پانی نکالنے کے پمپ کا دھڑ وغیرہ
اس قسم کے دوہرے بیرم ہیں ۱۔ فینچی۔ موجنا

قسم دوم۔ ٹھیلہ۔ لاک۔ داب۔ ایک بیل جبکہ اس کا ایک سر ازمین پر ساکن ہو دیر یہ فرض کر کے کہ اس کا دوسرا جوبانی کو مس کر رہا ہے ساکن ہے۔

بادام شکن۔ اس قسم کے دوہرے بیرم کی مثال ہے۔

قسم سوم۔ خراو کا پائڈان۔ انسان کے بازو کا اگلا نصف۔ جبکہ یہ ہتھیلی پر کسی وزن کو اٹھائے ہوئے ہو۔ اس صورت میں نصاب کہنی ہوگی اور پٹھوں کے تناؤ کی طاقت زور کا کام دے گی۔

شکر اٹھانے کے چٹے کو اس قسم کے دوہرے بیرم کی مثال تصور کیا جاسکتا ہے۔ آخری قسم کے بیرم عملی طور پر اس وقت کام آئے ہیں جبکہ طاقت کسی ایسے نقطہ پر لگانا مطلوب ہو جہاں براہ راست طاقت نہ لگائی جاسکے۔

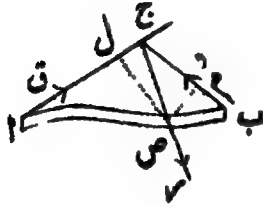
دندان قبل میں ہم نے بیرم کے وزن کو نظر انداز کیا ہے۔ اگر اس وزن کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو تعادل کی شرائط نصاب کے گرد قوتوں کے معیار اثراتوں کے حیرت منجھو کو صفر کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

بیرم کا اصول حکیم آرشمیدس کو معلوم تھا جو تیسری صدی قبل از مسیح گزرا ہے سو لہٰذا یہی صدی میں قوتوں کے متوازی الاصطلاح کا اصول معلوم ہونے تک

ہیرم کا اصول سکونیات کا بنیادی اصول تھا۔

۲۱۶۔ خم دار ہیرم۔ فرض کرو کہ ا ص کوئی غیر معا ہیرم ہے

جس کا نصاب ص ہے اور ص ل اور
ص م بالترتیب قوت ق کے خط عمل
ا ج اور مزاحمت و کے خط عمل ب ج پر
ص سے عمود ہیں۔



ص کے گرد میار اثر لینے سے

ق = $\frac{\text{ص م}}{\text{صل}}$ = نصاب سے مزاحمت کے خط عمل پر عمود
و = $\frac{\text{نصاب سے طاقت کے خط عمل پر عمود}}$

ص و پر تعامل معلوم کرنے کے لئے فرض کرو کہ طاقت ق اور وزن و کی سمتیں ایک
دوسرے سے ج پر مبنی ہیں۔ چونکہ جسم پر عمل کرنے والی قوتیں ص م تین ہیں، اس لئے
ص پر کے تعامل کی سمت لازماً ج میں سے گزرے گی۔ پس لامی کے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{س}}{\text{ج ا ص ب}} = \frac{\text{ق}}{\text{ج ب ج ص}} = \frac{\text{و}}{\text{ج ب ا ج ص}}$$

تعال س کی سمت قوتوں س، ق اور و کو دو علی القوایم سمتوں میں تحلیل کرنے
سے بھی حاصل ہو سکتی ہے۔ اس دفعہ میں ہم نے نصاب پر رگڑ کی قوت کو ملحوظ
نہیں رکھا ہے۔ نیز ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ ہیرم پر عمل کرنے والی قوتیں ایک
ای سطح مستوی میں ہیں جو اس محور پر جس کے گرد ہیرم گھومتا ہے عمود وار ہے۔
اگر قوتیں کسی اور سمت میں عمل کریں تو تعادل کا مسئلہ دسویں باب کی رو سے
تین ابعاد کی قوتوں کا مسئلہ ہوگا۔

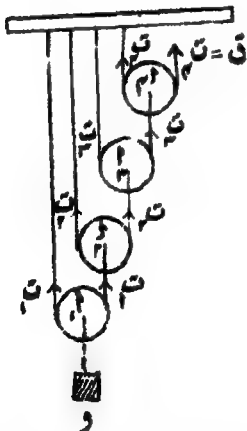
۲۱۷۔ چرخیاں۔ چرخ لکڑی یا دھات کا چھوٹا سا پہیا ہوتا ہے جس کے محیط پر ایک

تالی لکڑی ہوتی ہے جس میں ڈوسری باری بیٹھ سکے۔ چرخ ایک ایسے محمد کے گرد

آزادانہ گھوم سکتی ہے جو پیپے کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کی سطح پر عمود وار ہے۔ اس محور کے سرے لکڑی کے ایک قالب پر سہارے ہوئے ہوتے ہیں۔ اگر چرخ کا قالب حرکت کر سکے تو اس کا قیام حرکت چرخ کی کہتے ہیں اور اگر اس کا قالب ہمیشہ ثابت رہے تو اسے ثابت چرخ کہتے ہیں۔

عام طور پر چرخ کا وزن اس وزن کے مقابلے میں جس کو یہ سہارے ہوئے ہے اس قدر چھوٹا ہوتا ہے کہ اس کے اپنے وزن کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اس قسم کی چرخ کو بے وزن چرخ کہتے ہیں۔ رسی یا ڈوری کے وزن کو جو چرخ پر سے گزرتی ہے ہمیشہ نظر انداز کیا جائے گا۔ ہم چرخ کو ہمیشہ جیکنا تصور کریں گے جس کی وجہ سے اس پر سے گزرنے والی رسی کا تاؤ اس کے سب طول پر مساوی سمجھا جائے گا۔

۲۱۸۔ ہم یہاں چرخوں کے تین نظاموں پر حسب معمول قریب میں غور کریں گے۔ اس ترتیب میں کوئی خاص بات نہیں مگر حوالہ دینے کی ضرورتوں کے لحاظ سے اس کو بدستور قائم رکھنا مناسب ہے۔



چرخوں کا پہلا نظام۔ اس نظام میں ہر ایک رسی سہارے والے شہتیر کے ساتھ بندھی ہوتی ہے۔ طاقت اور وزن کا تعلق دریافت طلب ہے۔

چرخوں کے اس نظام میں وزن سب سے پہلی چرخ کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اس کے گرد جو رسی گزرتی ہے اس کا ایک سر

سہارے والے شہتیر کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اور دوسرا سر اوپر والی چرخ کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اور اسی طرح موخر الذکر چرخ کے گرد گزرنے والی رسی کا ایک سر شہتیر کے ساتھ اور دوسرا اس چرخ کے اوپر کی چرخ کے ساتھ بندھا ہوتا ہے علیٰ ہذا القیاس۔ آخری رسی کے خالی سرے پر قوت لگائی جاتی ہے

ہیں۔ اوپر کا قالب ساکن ہوتا ہے اور نیچے کا حرکت پذیر۔ ایک ہی رسی سب چرخوں پر سے گزرتی ہے جیسا کہ ذیل کی شکلوں میں دکھایا گیا ہے۔ اس رسی کے کھلے سرے پر قوت لگائی جاتی ہے اور اس کا دوسرا سر اوپر کے یا نیچے کے قالب کے ساتھ بندھا ہوتا ہے۔ دونوں صورتوں میں فرض کرو کہ نیچے کے قالب میں رسیوں کے جو حصے ہیں ان کی تعداد n ہے۔ چونکہ چارے پاس ایک ہی رسی ہے جو

چکنی چرخوں کے

اوپر سے گزرتی ہے

اس لئے اس کا تناؤ

ہر جگہ مساوی ہے اور

Q کے برابر ہے۔

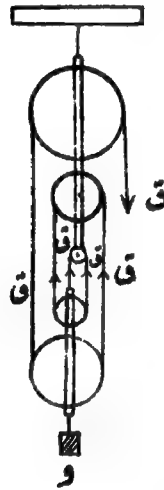
پس $nQ = W$ و

جاں و سہارا

ہوا وزن ہے اور

و پچھلے قالب کا وزن

ہے۔



عملی طور پر ہر ایک

قالب کی چرخوں کو

ایک دوسرے کے متوازی رکھا جاتا ہے۔ اس لئے رسیوں کے حصے اگرچہ ٹھیک

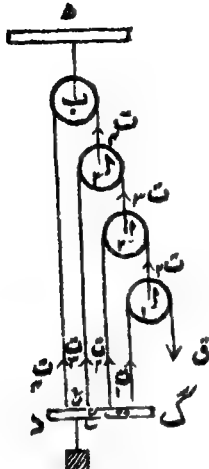
طور پر متوازی نہیں ہوتے مگر تقریبی طور پر متوازی ہوتے ہیں اس لئے مندرجہ بالا

نتیجہ پھر بھی درست رہتے ہیں۔

۲۲۱۔ چرخوں کا تسیر النظام۔ اس نظام میں سب رسیاں وزن کے

ساتھ بندھی ہوتی ہیں۔ طاقت اور وزن کا رشتہ معلوم کرو۔

اس نظام میں ہر ایک چرخ پر سے گزرنے والی رسی کو ایک طرف وزن و



کو سہارنے والے شہتیر کے ساتھ اور دوسری
طرف نیچے کی چرخنی سے باز ہا جاتا ہے۔
سب سے اوپر کی چرخنی ثابت ہوتی ہے
اور ایک ساکن شہتیر سے ٹکلی رہتی ہے۔
سب سے نیچے کی چرخنی پر سے جو رسی
گزرتی ہے اُس کا ایک سر حسب معمول
وزن کو سہارنے والے شہتیر کے ساتھ
بندھا ہوتا ہے اور دوسرے سرے پر قوت
لگائی جاتی ہے۔

فرض کرو کہ نیچے کی طرف سے شروع ہو کر چرخیاں ۱، ۲، ۳، ۴ ... ہیں اور ان کے
گرد جو رسیاں گزرتی ہیں اُن کے تناؤ بالترتیب $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots$ ہیں۔
اگر طاقت Q ہو تو مصرحاً $T_1 = Q$

چرخوں کے تعادل پر ترتیب وار غور کرو، اگر اُن کے وزن W_1, W_2, W_3, \dots ہوں تو

$$T_1 = T_2 + W_1 \quad T_2 = T_3 + W_2 \quad T_3 = T_4 + W_3 \quad \dots$$

$$T_2 = T_3 + W_2 \quad T_3 = T_4 + W_3 \quad T_4 = T_5 + W_4 \quad \dots$$

$$T_3 = T_4 + W_3 \quad T_4 = T_5 + W_4 \quad T_5 = T_6 + W_5 \quad \dots$$

$$T_4 = T_5 + W_4 \quad T_5 = T_6 + W_5 \quad T_6 = T_7 + W_6 \quad \dots$$

اگر چرخوں کی تعداد n ہو جن میں سے $n-1$ قابل حرکت ہوں تو وزن (مجموعہ)
کو سہارنے والی سلاخ کی مدد سے

$$W = T_n + T_{n-1} + \dots + T_2 + T_1$$

$$= (1-2) ق + (1-2) و + (1-2) و + \dots$$

$$+ (1-2) و + (1-2) و + \dots (1)$$

اگر سب چرخوں کے وزن و ہوں تو

$$= (1-2) ق + (1-2) و + (1-2) و + \dots$$

سہارنے والے شہتیر پر کا دباؤ :- یہ دباؤ طاقت، وزن اور چرخوں کے وزن کو متعادل رکھتا ہے اور اس لئے

$$= ق + و + و + و + \dots + و + و$$

۲۲۲- اس نظام میں ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایک چرخ کا وزن جتنا زیادہ ہوگا ہمیں وزن کو سہارنے کے لئے اتنی ہی کم قوت لگانی پڑے گی۔ پس چرخوں کے وزن طاقت کی مدد کرتے ہیں۔ اگر چرخوں کے وزن مناسب منتخب کئے جائیں تو بغیر کسی طاقت کے لگانے کے وزن قائم رہ سکتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہمارے پاس تین متحرک چرخاں ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن و ہے، تب دفعہ ماقبل کے رشتہ ۱۱ کی رو سے

$$= ۱۱ ق + ۱۱ و$$

اس لئے اگر ۱۱ و = و تو طاقت ق صفر ہوگی یعنی رسی کے سرے پر وزن کو

(حرکت) کو سہارنے کے لئے کسی طاقت کے لگانے کی ضرورت نہ ہوگی۔

۲۲۳- تا وقتیکہ وزن کو اس کے سہارنے والی سلاح کے مناسب مقام پر نہ لگایا جائے یہ سلاح دوران حرکت میں افقی نہ رہے گی۔ کسی خاص صورت میں لگانے کا مناسب محل آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

دفعہ ۲۲۱ کی شکل میں فرض کرو کہ نقاط د، ع، ف، گ (جن پر رسیاں بندھی ہیں) کے درمیانی فاصلے ۱ ہیں اور فرض کرو کہ جس نقطہ پر وزن لگایا ہوا ہے

وہ لا ہے۔ تب مزوری ہے کہ تناؤ ت، ت، ت، ت، ت کا حاصل نقطہ
لا میں سے گزرے۔

پس دفعہ ۳۴ کی مد سے اگر چرخوں کے وزنوں کو نظر انداز کیا جائے تو
تہم + ۰ × ت + ۳ × ت + ۲ × ت + ۱ × ت = ۱۳

$$\frac{تہم + ت + ت + ت + ت}{۱۳} = \frac{۱۳ \times ق + ۲ \times ق + ۲ \times ق + ۱ \times ق}{۱۳ + ۲ + ۲ + ۱} = \frac{۱۱}{۱۵} \times د$$

۲۲۴۔ چرخوں کے تیسرے نظام سے وزنوں کو اٹھانا مقصود نہیں ہوتا۔ اگر اسے
اس مقصد کے لئے استعمال کیا جائے تو اس کا ناقابل عمل ہونا بہت جلد ثابت
ہو جائے گا۔

اس کا استعمال یہ ہے کہ خیف سے عرصہ کے لئے بہت زور کا جھٹکا دیا جاسکے
مثلاً یہ نظام ایک کشتی کے تحت پرستول کو سید بار کھنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

دفعہ ۲۲۱ کی شکل میں د ع ف گ ایک کشتی کا تختہ ہے جس کے ساتھ
رسیاں بندھی ہیں اور کوئی وزن و نہیں ہے۔ چرخوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ کی رسیاں

سست انتصابی کے ساتھ میلان رکھتی ہیں اور نقطہ ہستول کی چوٹی ہے جسے سیدھا
رکھنا مطلوب ہے۔ اس صورت میں مزاحمت وہ قوت ہے جسے ہر لگا کر ہستول
سیدھا رکھا جاسکے۔ طاقت جس طرح عمل کرتی ہے اسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔

۲۲۵۔ کام کے اصول کی تصدیق۔ فرض کرو کہ وزن و فاصلہ لا میں سے اوپر
اٹھتا ہے۔ تب جو دسی چرخ ب کو سلاخ کے ساتھ پیوست کرتی ہے اس کا
طول بقدر لا کے کم ہو جاتا ہے جس سے چرخ لا فاصلہ لائیجے اتر آتی ہے چکر چرخ
لا فاصلہ لائیجے اتر آتی ہے اور سلاخ فاصلہ لا اوپر چڑھ جاتی ہے وہ دسی جو لا
کو سلاخ کے ساتھ ملائی ہے بقدر لا کے کم ہو جاتی ہے اور یہ حصہ لا کے
اوپر سے پھسلتا ہے۔ پس چرخ لا فاصلہ لا اور نیز وہ فاصلہ جس میں سے لا

اترتی ہے نیچے اتر آتی ہے یعنی مجموعی طور پر فاصلہ ۲ لا + لا = ۳ لانیچے اتر آتی ہے۔ اس سے رسی ۱۲ ف بقدر ۴ لا کے کم ہو جاتی ہے جو طول چرخ ۱۲ پر سے پھسل جاتا ہے۔ اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ چرخ ۱۲ ایک تو فاصلہ ۴ لا اور دوسرے فاصلہ جس میں چرخ ۱۲ اترتی ہے یعنی مجموعی طور پر فاصلہ ۴ لا + لا = ۵ لانیچے اتر جاتی ہے۔ پس پہلی، دوسری، تیسری، ... (ن-۱) دیں چرخیاں بالترتیب فاصلے لا، ۳ لا، ۵ لا، ... (۲-۱) لانیچے اترتی ہیں۔ اور طاقت ق کا نقطہ

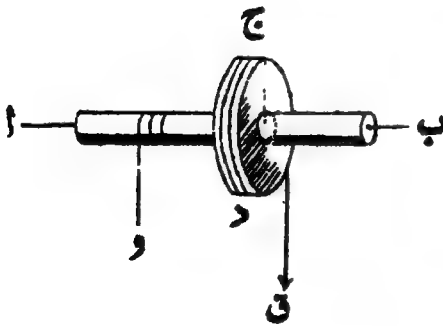
عمل فاصلہ (۲-۱) لانیچے اترتا ہے۔ پس رفتار سی نسبت ۲-۱ ہے۔ طاقت اور چرخوں کے وزنوں (جو اس صورت میں طاقت کی مدد کرتے ہیں) کا کام

$$= ق (۲-۱) + و (۲-۱) لا + و (۲-۲) لا + ... + و (۳-۱) لا + و (۳-۲) لا + ... + و (ن-۱) لا$$

$$= لا \times و \text{ وزنہ } ۲۲۱ \text{ کی رو سے}$$

$$= وزن و کا کام$$

۲۲۶- چرخ اور محور۔ اس مشین میں ایک مضبوط مستد یا اسطوانہ یعنی محور ہوتا ہے



جس کے سرے دو چولیں ۱ اور ۲ ہوتی ہیں اور یہ چولیں ثابت سہاروں پر آزادانہ گھوم سکتی ہیں اس اسطوانہ کے ساتھ استوار طور پر ایک چرخ ج ۵ پیوست ہوتا ہے جس کی سطح مستوی محور پر عمود دار ہوتی ہے۔

محور کے گرد ایک رسی پٹی ہوتی

ہے جس کے ایک سرے کو محور کے ساتھ بانڈ دیا جاتا ہے اور دوسرے سرے سے وزن لٹکایا جاتا ہے۔ چرخ کے محیط پر پہلی رسی کی مقابل سمت میں ایک اور رسی پٹی ہوتی ہے جس کا ایک سرا چرخ کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اور دوسرے

سرے پر طاقت لگائی جاتی ہے چرخ کے محیط پر نالی کھدی ہوتی ہے تاکہ دسی پہلے نہ جائے۔

اگر محور کا نصف قطر a ہو اور چرخ کا نصف قطر b ہو تو ثابت محوری خط کے گرد معیار اڑ لینے سے تعادل کے لئے ضروری ہے کہ

$$ق \times ب = و \times ا \quad (۱)$$

$$\text{پس مفاد جیلی} = \frac{ق}{ا} = \frac{ب}{و} = \frac{\text{چرخ کا نصف قطر}}{\text{محور کا نصف محور}}$$

کام کے اصول کی تصدیق۔ فرض کرو کہ مشین چار فائوں میں سے گھومتی ہے تو رسی کا ایک حصہ جس کا طول ۲π ب ہے چرخ پر سے کھل جاتا ہے اس لئے ق اس فاصلہ میں سے نیچے اترتا ہے۔ اسی اثنا میں طول ۲π و محور کے گرد لیٹ جاتا ہے جس سے وزن و اسی قدر فاصلہ اوپر چڑھ جاتا ہے پس طاقت کا کام $ق \times ۲\pi$ اور وہ کام جو طاقت کے خلاف کیا گیا $ا \times ۲\pi$ یہ دونوں ربط (۱) کی وجہ سے مساوی ہیں۔

نیز زقاری نسبت (دیکھو دفعہ ۲۱۱)

$$= \frac{۲\pi ب}{ا \times ۲\pi} = \frac{ب}{ا} = \text{مفاد جیلی}$$

نظری طور پر مقدار $\frac{ب}{ا}$ کو بہت بڑا بنانے سے ہم مفاد جیلی کو جتنا چاہیں

اتنا بڑا بنا سکتے ہیں۔ مگر عملی طور پر یہ مقدار خاص حدود سے تجاوز نہیں کر سکتی۔ چونکہ ثابت سہاروں پر کے دباؤ ق اور و کا توازن کرتے ہیں اس لئے ہم محور کی توانائی یعنی ۲ کو بہت کم نہیں کر سکتے اور نہ ہی چرخ کے نصف قطر کو بہت بڑھا سکتے ہیں کیونکہ ایسا کرنے سے مشین جلدی اور ناقابل عمل ہو جائیگی۔ پس مفاد جیلی کی قیمتیں محدود ہیں۔ اس کے حدود ایک طرف تو مشین کی مضبوطی سے اور دوسری مشین کی جسامت کو مناسب رکھنے کی ضرورت سے مقید ہیں۔

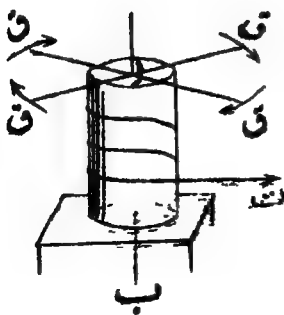
۲۲۷۔ دفعہ ۲۲۶ میں ہم نے رسیوں کی موٹائی کو نظر انداز کر دیا۔ ہے۔ مگر اُن کی موٹائیاں اتنی ہوں کہ چرخ اور محور کے نصف قطروں کے مقابلہ میں نظر انداز نہ ہوئیں تو ہم اُن کو بھی ملحوظ رکھنے کے لئے یہ فرض کر سکتے ہیں کہ رسیوں کے تناؤ درمیانی ریشے کے ساتھ عمل کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ان رسیوں کے نصف قطر جو بالترتیب محور اور چرخ کے گرد پلٹی ہیں لا اور ما ہیں اس لئے جن خطوط پر اب تناؤ عمل کرتے ہیں ان کے فاصلے چلوں کو طانے والے خط سے بالترتیب (۱ + لا) اور (ب + ۱) ہیں۔ پس

تبادل کے لئے ق (ب + ۱) = و (۱ + لا) جس سے

$$\frac{ق}{و} = \frac{\text{محور اور اس کی رسی کے نصف قطروں کا مجموعہ}}{\text{و اور اس کی رسی کے نصف قطروں کا مجموعہ}}$$

۲۲۸۔ چرخ اور محور کی دو شکلیں یہ ہیں۔ ڈنڈا چرخ جیسے کوئیں میں سے پانی نکالنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے اور لنگر چرخ جو جہاز پر استعمال کیا جاتا ہے ان مشینوں میں طاقت دفعہ ۲۲۶ کے مطابق اسطوانوں کے گرد پلٹے ہوئے رسیوں کے ذریعہ لگانے کی بجائے طاقت ہتوں پر لگائی جاتی ہے جو محور پر عمود وار سطح مستوی میں پیوست ہوئے ہیں۔



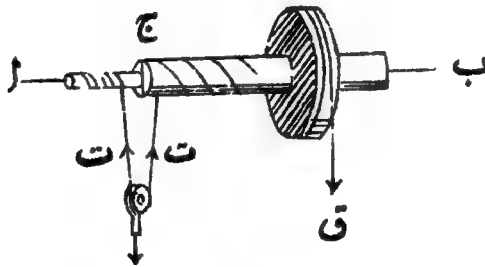
ڈنڈا چرخ میں محور متوازی الافق ہوتا ہے اور لنگر چرخ میں محور انتصابی ہوتا ہے۔ موخر الذکر صورت میں مزاحمت اس رسی کے تناؤ سے بدستل ہوتی ہے جو محور کے گرد پلٹی ہوتی ہے اور طاقت اُن سلاخوں کے سروں پر لگائی جاتی ہے جو لپٹے ہوئے طور پر جڑی ہوتی ہیں۔ سلاخوں کے جوڑوں رکھنے کا یہ فائدہ ہے کہ لنگر چرخ کی چلوں پر کا دباؤ بہت کم ہو جاتا ہے یا بالکل معدوم

ہو جاتا ہے۔ تعادل کی شرائط دفعہ ۲۲۶ کے مطابق معلوم ہو سکتی ہیں۔

۲۲۹- فرقی چرخ اور محور۔ معمولی چرخ اور محور کی ذرا مختلف شکل فرقی چرخ

اور محور ہے۔ اس مشین میں دھراد اسطوانوں پر مشتمل ہوتا ہے جن کے محور مشترک ہوتے ہیں اور جو مسروں پر چڑے ہوئے ہیں۔ ان اسطوانوں کے نصف قطر مختلف ہوتے ہیں۔ کسی ایک طرف سے ایک اسطوانہ پر اور دوسری طرف سے مخالف سمت میں دوسرے اسطوانہ پر لپٹی ہوتی ہے رسی کے ڈھیلے حصہ پر ایک چرخ لٹکی ہوتی ہے جس کے ساتھ وزن بندھا ہوتا ہے۔ چھوٹے اسطوانے کے گرد جو رسی لپٹی ہوتی ہے وہ مسغین کی اسی سمت میں گھما سکتی ہے جس سمت میں کہ طاقت لگائی ہے۔

حسب سابق فرض کرو کہ چرخ کا نصف قطر ب ہے اور محور کے حصوں ر ج اور ج ب کے نصف قطر بالترتیب ۱ اور ج ۱ ہیں جہاں $۱ > ج$ سے چونکہ چرخ چکنی ہے اس لئے اس کے گرد گزرنے والی رسی کا تناؤ ت اس کے سب طول پر یکساں ہے اور اس لئے وزن کے تعادل کے لئے $ت = ۱$ و



خطاب کے گرد معیاراً فریٹنے سے مشین کے تعادل کے لئے

$$ق \times ب + ت \times ۱ = ت \times ج + ۱ \times ج$$

$$ق = ۱ \times \frac{ج - ۱}{ب}$$

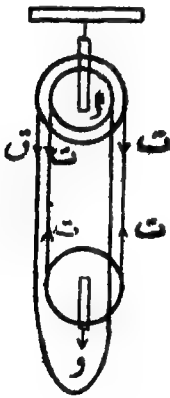
$$\text{مثلاً چکی} = \frac{۱۳۲}{۱۱ - ۱} = ۱۵$$

محور کے دو حصوں کے نصف قطر ۱ اور ۲ کو ایک دوسرے کے تقریباً مساوی لینے سے اور اس طرح مشین کا کوئی حصہ نامناسب طور پر گزور بھی نہیں ہوگا ہم مفاد جیلی کو بہت بڑا بنا سکتے ہیں۔

۲۳۰۔ دسٹن کی فرقی چرخ - اس مشین کے دو قالب ہوتے ہیں اوپر کے

حصہ میں دو چرخاں تقریباً ایک ہی ناپ کی ہوتی ہیں جو ایک ہی چرخ کی مانند بھرتی ہیں۔ نیچے کے قالب میں ایک چرخ ہوتی ہے جس کے ساتھ وزن و بندھا ہوتا ہے۔

نیچے کی شکل میں مشین کی ایک تراش دکھائی گئی ہے بے سرے والی زنجیر کا ایک بڑا حلقہ پہلے اوپر کی چرخوں میں سے بڑی چرخ کے گرد پھر نیچے کی چرخ کے گرد اور بعد ازاں اوپر کی چھوٹی چرخ کے گرد گزرتا ہے۔ زنجیر کا باقی حصہ ڈھیلا ٹٹکتا ہے۔ طاقت ق کے لگانے کا طریقہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ زنجیر کو پھسلنے سے روکنے کے لئے اوپر کی چرخوں پر دندانے بنے ہوتے ہیں جن کے اندر زنجیر کی کڑیاں پھنس کر آتی ہیں اور زنجیر کو پھسلنے سے روکتی ہیں۔



اگر سی کے ان حصوں کا تناؤ جو وزن و کو سہارے ہوتے ہیں ت ہو تو چونکہ یہ حصے تقریباً انتصابی ہیں اس لئے زنجیر کا وزن اور نیز نیچے کی چرخ کا وزن نظر انداز کرنے سے

$$۲ \text{ ت} = ۱ \text{ و} \dots (۱)$$

اوپر کے قالب کی بڑی اور چھوٹی چرخوں کے نصف قطر بالترتیب ۲ اور ۱ ہوں تو اوپر کے قالب کے مرکز ۱ کے گرد معیار اثر لینے سے

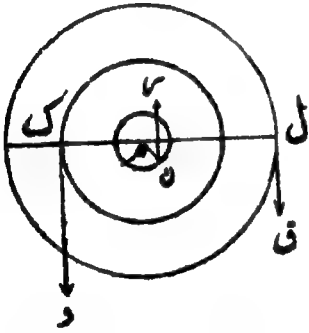
$$ق = ۲ \text{ ت} + ۱ \text{ و} = ۲ \text{ ت} + ۱$$

$$\text{اس لئے } ق = \frac{۲}{۴} \times \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۲} \text{ اور مفاد جلی } = \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۴}$$

چونکہ سما اور ر تقریباً مساوی ہیں اس لئے مفاد جلی بہت زیادہ ہے۔ فرقی چرخ میں فرقی چرخ اور محور کے ایک بڑے نقص کا بہت اچھی طرح سدباب ہو جاتا ہے وہ یہ کہ اول الذکر میں وزن کو اٹھانے کے لئے مقابلہ بہت کم طول کی رسی کی ضرورت ہوتی ہے۔

۲۳۱۔ چرخ اور محور جبکہ ان کی چلوں پر مرکز کی قوت کو بھی ملحوظ رکھا جائے۔

فرض کرو کہ دفعہ ۲۲۶ میں سب سے اندر کا دائرہ چول لایا ب کو تعبیر کرتا ہے جبکہ مشین کو اس کے محور کے ایک سرے سے دیکھا جائے۔ شکل بالا میں اسے بہت بڑھا کر دکھایا گیا ہے۔



چلوں اور ان کے خولوں کے میان جو حاصل تعادل ہے اسے انتصابی ہونا چاہیئے کیونکہ یہ قی اور و کو متوازن رکھتا ہے۔ نیز اگر یہ فرض کریں کہ قی وزن و پر مین غالب آئے کے قریب ہے تو حاصل تعادل کو نقطہ تماس ن پر کے عماد کے ساتھ زاویہ لہ (جو مرکز کا زاویہ ہے) بنانا چاہیئے۔

اس لئے چول کے سب سے نچلے مقام پر واقع نہیں ہو سکتا بلکہ اس کا مقام ایسا ہونا چاہیئے جیسے کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس میں ہر ن انتصابی کے ساتھ زاویہ لہ بناتا ہے۔ پس ن پر کا حاصل تعادل انتصابی ہے۔ چونکہ س متعادل رکھتا ہے قی اور و کو

$$س = ق + و - - - - - (۱)$$

نیز ہر کے گرو معیار انز لینے سے

$$ق = ب - س \times ج جب لہ = و \times ل - - - - - (۲)$$

جہاں ج چول کا نصف قطر ہے اور ب اور ا چرخ اور محور کے نصف قطر ہیں۔
(دیکھو دفعہ ۲۲۶)

$$\text{اس لئے ق} = \frac{ا + ج}{ب - ج} \times \text{جب ل}$$

اگر ق وزن کو سہارنے کے لئے عین کافی ہو یعنی اگر مغین $\left(\frac{ا + ج}{ب - ج} \right)$ سمٹ میں حرکت کرنے کے عین قریب ہو تو ل کی علامت ہونے سے

$$\text{ق} = \frac{ا - ج}{ب + ج} \times \text{جب ل}$$

اس صورت میں تماس کا نقطہ مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے بائیں طرف واقع ہوگا۔

۲۳۲۔ معمولی ترازو۔ معمولی ترازو میں ایک استوار ڈنڈی ل ب ہوتی ہے جس کے

دونوں سروں سے پڑے لٹکے ہوتے ہیں۔ یہ ڈنڈی نصاب ہر کے گرد جو اس کے باہر ہوتا ہے آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ نصاب اور ڈنڈی استوار طریقہ پر ایک دوسرے کے ساتھ پیوست ہوتے ہیں اور اگر ترازو اچھی ہو تو نقطہ ہر پر ایک سخت فولادی پتھر ہوتا ہے جس کا کنارہ پیچے کی طرف ہوتا ہے اور نصاب کے چھوٹے قوس پر لٹکا ہوتا ہے۔

جس جسم کو تولنا مقصود ہو اسے ایک پڑے میں رکھتے ہیں۔ دوسرے پڑے میں باٹ رکھے جاتے ہیں جن کی مقدار میں معلوم ہوتی ہیں۔ ان وزنوں کو کم و بیش کر کے ترازو کی ڈنڈی کو متوازی الافق محل میں ساکن کیا جاتا ہے۔ اگر ہر ڈنڈی پر عموماً دو اور بازو ل ، ہ ب کے طول مساوی ہوں اور نیز ترازو کا مرکز ثقل خط ہر پر واقع ہو اور پڑوں کے وزن مساوی ہوں تو جسم کا وزن دوسری طرف کے پڑے کے باٹوں کے مجموعی وزن کے برابر ہوگا۔

اگر جسم کا وزن باٹوں کے وزن کے مساوی نہ ہو تو ترازو کی ڈنڈی حالت تعادل میں افق کے ساتھ کوئی زاویہ بنائیگی۔

یعنی (ق + س) (و جم - و جب ط) = (و + س) (و جم + و جب ط) + و کم جب ط

$$\text{مس ط} = \frac{(ق - و) \times ۱}{و کم + (ق + و + ۲ س) و}$$

۲۳۳۔ اچھی ترازو کے لئے ضروری شرائط:-

(۱) ترازو سچی ہونی چاہیئے۔ ترازو سچی اس صورت میں ہوگی جبکہ اس کی ڈنڈی کے بازو طول میں مساوی ہوں، پلڑوں کے وزن مساوی ہوں اور ڈنڈی کا مرکز ثقل اس خط پر واقع ہو جو ثقلاب سے ڈنڈی پر عموداً کھینچا جائے۔ اگر یہ شرائط پوری ہوں تو ظاہر ہے کہ پلڑوں کے اندر مساوی وزن رکھنے سے ڈنڈی افق کے متوازی رہے گی۔ یہ جانچ کرنے کے لئے کہ ترازو سچی ہے یا نہیں پہلے یہ دیکھو کہ جب پلڑے خالی ہوں تو ڈنڈی افق کے متوازی ہے یا نہیں۔ پھر ایک پلڑے میں جسم کو رکھ کر دوسرے پلڑے میں باؤں کی مناسب مقدار رکھو تاکہ ڈنڈی افق کے متوازی ہو جائے۔ اب جسم اور دونوں کو بجا پلڑوں کے باہم بدل دو۔ اگر اب بھی یہ ایک دوسرے کا تبادلہ کریں تو ضروری ہے کہ ترازو سچی ہو۔ اگر موزن ذکر حالت میں ترازو کی ڈنڈی افق کے ساتھ کوئی میلان رکھتی ہو تو ترازو سچی نہیں ہے۔

(۲) ترازو کو حساس ہونا چاہیئے۔ اس سے یہ مطلب ہے کہ اگر باؤں اور جسم کے وزن میں بہت خفیف سا فرق ہو تو بھی ترازو کی ڈنڈی کو افق کے ساتھ کافی بڑا زاویہ بنانا چاہیئے

ق اور و کے کسی معلومہ فرق کے لئے ترازو افق کے ساتھ جتنا زیادہ میلان رکھ لے گی اتنی ہی زیادہ حساس سمجھی جائے گی۔ نیز کسی معلومہ میلان ط کے پیدا کرنے کے لئے وزن کا فرق ق - و جتنا کم ہوگا اتنی ہی ترازو زیادہ حساس ہوگی پس کسی ترازو کی حساسیت ناپنے کا بہترین معیار مقدار

مس ط یعنی و کم + (ق + و + ۲ س) و

(دیکھو وفد ۲۳۳) کی قیمت ہے۔

پس کسی ترازو کی حساسیت بڑی ہوگی اگر بمقابلہ اور ک کے ترازو کی ڈنڈی کے بادو کو بڑا بنایا جائے۔ اور ڈنڈی کا وزن و اتنا کم ہو جتنا کہ مشین کی استواریت اور طول اجازت دیں۔

اگر ہ صفر نہ ہو تو ظاہر ہے کہ حساسیت ق اور و کی قیمتوں پر یعنی پلڑوں کے اندر کے وزنوں پر موقوف ہوتی ہے۔ کیمیا کے تجربہ خانہ کی ترازو کے لئے یہ مناسب نہیں ہے اس لئے ایسی ترازوؤں میں ہ کو صفر رکھا جاتا ہے یعنی ان میں نقطہ ہر نقطہ ہ پر منطبق ہوتا ہے۔

لہذا ان میں حساسیت کم کے بالکس بدلتی ہے جہاں ک نقطہ ہ یا ہ کے نیچے مرکز ثقل کا فاصلہ ہے۔

لیکن ہیں ہ اور ک دونوں کو ایک ساتھ صفر نہیں بنا دینا چاہیئے۔ ایسا کرنے سے نقطہ ہ اور ک دونوں ہ پر منطبق ہو جائیں گے۔ اس لئے جب پلڑوں میں وزن مساوی ہوں تو ترازو کسی محل میں بھی متعادل رہے گی اور جب یہ وزن برابر نہ ہوں تو ترازو کی ڈنڈی حتیٰ الوسع انتصابی محل اختیار کرے گی۔

(۳) ترازو کو قائم المتعادل ہونا چاہیئے اور بہت جلدی اپنے تعادل کے محل کو اختیار کر لینا چاہیئے۔

یہ معلوم کرنا کہ ترازو اپنے تعادل کے محل میں آنے میں کتنا وقت لیتی ہے کلیتاً علم حرکت کا سوال ہے۔ تاہم ہم فرض کر سکتے ہیں کہ قوتوں کا انصباب کے گرد میاواڑ جتنا زیادہ ہوگا اتنا ہی کم وقت محل تعادل میں واپس آنے کے لئے درکار ہوگا۔ جب ہر ایک پلڑے میں وزن ق ہو تو حالت تعادل میں واپس لانے والی قوتوں کا معیار آخر ہر کے گرد

$$= (ق + س) (و جمط + ہ جب ط) - (ق + س) (و جمط - ہ جب ط) + و \times ک جب ط$$

$$= [۲ (ق + س) ہ + و \times ک] جب ط$$

اس جگہ کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ ہ اور ک کی قیمتیں بڑی سے بڑی ہوں۔

چونکہ ترازو کی حساسیت کم اور کم کے چھوٹا ہونے پر موقوف ہے اور اس کا قاعده متبادل ہونا ان کے بڑا ہونے کا مقتضی ہے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ ترازو کا احساس ہونا اور جلدی تولنا ایک حد تک ایک دوسرے کے متناقض ہیں۔ عملاً یہ تناقض کوئی زیادہ اہمیت نہیں رکھتا۔ کیونکہ جن ترازوؤں میں بہت حساسیت کی ضرورت ہوتی ہے (مثلاً تجربہ چسانہ کی ترازوؤں میں) وہاں جلدی تولنے کی خوبی کو چھوڑ سکتے ہیں۔

برعکس اس کے تجارتی اغراض کے لئے جن ترازوؤں کو استعمال کیا جاتا ہے ان میں حساسیت کی چندان ضرورت نہیں ہوتی۔ جہاں تک ممکن ہو سکے حساسیت اور جلد تولنا دونوں خوبیوں کے حصول کے لئے ترازو کی ڈنڈی کے بازوؤں کو ہلکا اور کافی لمبا بنانا چاہیئے اور نیز ڈنڈی سے نصاب کا فاصلہ کافی بڑا ہونا چاہیئے۔

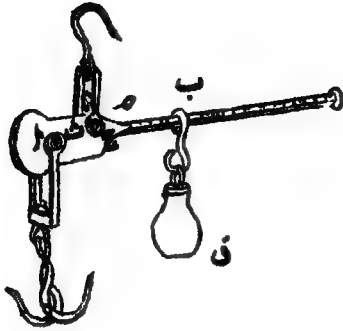
۲۳۵۔ دوسرے تولنے کے طریقے سے کسی جسم کا وزن ٹھیک ٹھیک معلوم ہو سکتا ہے خواہ ترازو صحیح نہ بھی ہو۔

ایک پلڑے میں جسم رکھو اور دوسری طرف مٹی یا کوئی چیز ڈال کر ڈنڈی کو متوازی الافق کرو۔ اب جسم کو ہٹا کر اس کی بجائے باٹ رکھ کر دیکھو کہ کتنے وزن کے باٹ ڈنڈی کو حسب سابق متوازی الافق بنانے کے لئے درکار ہوتے ہیں یہ باٹ جسم کے وزن کو تعبیر کر سکتے۔

جب کسی چیز کے وزن کو بہت صحت کے ساتھ معلوم کرنا مقصود ہوتا ہے تو نہایت عمدہ ترازوؤں کے باوجود یہی طریقہ استعمال کیا جاتا ہے اس طریقہ کو بورڈ کا طریقہ کہتے ہیں۔

۲۳۶۔ تک۔ معمولی تک جسے رومی تک بھی کہتے ہیں ایک قسم کی مشین ہوتی ہے جسے اجسام کے تولنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے اس میں ایک سلاخ ا ب ہوتی ہے جو ایک ثابت نصاب ج کے گرد گھوم سکتی ہے۔

نقطہ ا پر ایک ہک
یا کنڈا ہوتا ہے (بعض
اوقات ایک پلڑا ہوتا
ہے) جس میں وزن
والا جسم رکھا جاتا ہے۔



بازو ج ب

پرایک وزن ق

آویزاں ہوتا ہے جو

ادھر ادھر حرکت

کر سکتا ہے۔ پلڑے

پر کے جسم کا وزن معلوم

کرنے کے لئے یہ

دیکھنا پڑتا ہے کہ ڈنڈی

کو متوازی الافق

کرنے کے لئے وزن ق کو کس مقام پر رکھا جائے۔ بازو ج ب پر نشانات
لگے ہوتے ہیں اور وہ نشان جہاں ق ٹھیرنے سے توازن پیدا ہوتا ہے جسم
کے وزن کو تعبیر کرتا ہے۔

فرض کرو کہ تک اور پلڑے کا وزن و ہے اور ڈنڈی کا وہ نقطہ جس میں سے و
عمل کرتا ہے ث ہے تو ڈنڈی کو بالعموم اس طرح بنایا جاتا ہے کہ ث چھوٹے بازو
آج پر واقع ہوتا ہے۔

جب پلڑے میں کوئی وزن نہ ہو تو فرض کرو کہ وہ مقام جس پر ڈنڈی کو متوازی
الافق کرنے کے لئے ق کو رکھنا پڑتا ہے ہر ہے۔ ج کے گرد میار انٹر لینے سے

$$\text{و} \times \text{ث ج} = \text{ق} \times \text{ج ہ} - - - - - (۱)$$

اس شرط سے نقطہ ہ کا مقام معلوم ہو جاتا ہے جو ہماری درجہ بندی کا صفر مقام ہے۔

جب پڑے میں وزن و (= ن ق) رکھا جائے تو فرض کر دو کہ ق کو لان پر رکھنا پڑتا ہے۔ معیار اثر لینے سے

$$ن \times ق \times ج + و \times ث \times ج = ق \times (ج لان) \dots \dots (۲)$$

(۱) اور (۲) سے $مر لان = ن \times ج$

پس تک کی درجہ بندی کرنے کے لئے ہیں مر سے، متوازن فاصلے ج ل ج ل، ج ل ج ل... لینے چاہئیں اور ان کے سروں پر نشانات ۱، ۲، ۳، کنہہ کر دینے چاہئیں۔ ان نشانات کے درمیانی فاصلوں کو ق پونڈ کی کسروں کو ظاہر کرنے کے لئے مرتبہ تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

۲۳۔ ڈیہنی تک میں ایک سلاح ل ب ہوتی ہے جس کے ایک سرے پر ڈیہنی گولہ لگا ہوتا ہے۔ وزن کو اٹھانے کے لئے ل پر ایک کنڈا یا پلڑا ہوتا ہے۔

جسم کا وزن یہ دیکھنے سے معلوم کیا جاتا ہے کہ سلاح کے کس نقطہ پر مشین متبادل ہوتی ہے۔ یہ عمل عام طور پر ایک رسی کے حلقہ کی مدد سے جو سلاح پر پھسل سکتا ہے کیا جاتا ہے اور یہ دیکھا جاتا ہے کہ متبادل کے لئے رسی کو سلاح کے کس مقام پر رکھنا پڑتا ہے۔

فرض کر دو کہ سلاح کا وزن مع اس کے پڑے وغیرہ کے ق ہے اور اس کا مرکز ثقل م ہے۔ جب کوئی وزن و (= ن ق) پڑے میں رکھا جائے تو فرض کر دو کہ متبادل کی حالت میں نصاب کا مقام ج پر ہوتا ہے۔

$$ل ج \times و = ج \times ث \times ق$$

$$\text{یعنی } ل ج \times ن ق = ق \times (ل ث - ل ج)$$

$$ل ج = \frac{ل}{ن + ۱} ل ث$$

ح ک، ل م، ن ط، ... کو ملاؤ۔

اس مستطیل کو اسطوانہ کے گرد اس طرح لپیٹ کر نقطہ ع اسطوانہ کے نقطہ ل پر منطبق ہو جائے اور کنارہ ع ہ خط ا د پر پڑے۔ تب نقطہ ف نقطہ ع سے نقطہ ل پر منطبق ہو جائے گا۔ اور خطوط ح ک، ل م، ن ط، ... اسطوانہ کی سطح پر ایک مسلسل چکر دار خط بن جائیں گے۔ اب اگر ہم فرض کریں کہ اس چکر دار خط کے ہر مقام پر دو حات تھوڑا سا ابھرائی رہے تو اس سے بیچ کی چوڑی حاصل ہو جائیگی

ظاہر ہے کہ بیچ کی چوڑی اسطوانہ پر

لپیٹی ہوئی ایک ایسی اٹل سطح ہے جس کا

میلان اس کے ہر نقطہ پر سادی ہے۔

اور زاویہ ک ع ف کے برابر ہے۔

اس زاویہ کو بالعموم بیچ کا زاویہ کہتے ہیں

اور دو مسلسل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ

کو بیچ کے محور کے متوازی ناپا جائے

بیچ کی گھائی کہتے ہیں۔ بعض مسنفین بیچ

کی گھائی کی تعریف یوں بھی کرتے ہیں

کہ بیچ کی گھائی سے وہ فاصلہ مراد ہوتا ہے جو کوئی نقطہ محور کے متوازی طے کرتا ہے جبکہ

اس نقطہ کو بیچ پر اکائی زاویہ میں سے گھایا جائے۔ اس تعریف کی رو سے

$$\frac{\text{ک ف}}{\pi} = \text{گھائی}$$

$$\text{نیز مس (بیچ کا زاویہ)} = \frac{\text{ف ک}}{\text{ع ف}}$$

دو متواتر چوڑیوں کے درمیان فاصلہ

= اس دائرہ کا محیط جس کا نصف قطر برابر ہے بیچ پر کے کسی نقطہ کا محور سے فاصلہ

مماً چوڑیوں کے بیچ کی تراش مختلف شکلوں کی ہوتی ہے۔ لیکن یہاں ہم

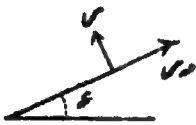
وزن کے خلاف جو کام سرانجام پذیر ہوتا ہے وہ
 $\omega =$ دو مسلسل چوڑیوں کا درمیانی فاصلہ
 کام کے اصول کی رو سے یہ دونوں مقداریں مساوی ہیں۔ اس لئے

$$\frac{\pi^2}{\omega} = \frac{\pi^2}{\omega} = \frac{\pi^2}{\omega}$$

اس دائرہ محیط جس کا نصف قطر طاقت کے بارو کے مساوی ہے
 بیچ کی دو مسلسل چوڑیوں کا درمیانی فاصلہ

۲۴۱۔ کھرور کے بیچ کا تعادل۔ رگڑ کو ملحوظ رکھ کر بیچ کی صورت میں طاقت اور

وزن کا رشتہ معلوم کرو۔
 دفعہ ۲۴۰ کی ترکیب کے مطابق فرض کرو کہ بیچ نیچے کی طرف حرکت کرنے کے عین
 قریب ہے اور بناؤ علیہ رگڑ اوپر کی طرف چوڑی کے ساتھ عمل کرتی ہے۔
 قالب کے دباؤ کے انتصابی اجزاء ترکیبی



س (جم + م جب ع)، ص (جم + م جب ع).....

ہیں اور ان دباؤں کے افقی اجزاء ترکیبی

س (جب ع - م جم ع)، ص (جب ع - م جم ع).....

ہیں انتصاباً تحلیل کرنے اور بیچ کے محور کے گرو معیار اثر
 لینے سے

$$\omega = (س + ص + ط + \dots) (جم ع + م جب ع) \dots (۱)$$

$$\omega = (س + ص + ط + \dots) (جم ع - م جب ع) \dots (۲)$$

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{جم ع - م جب ع}{جم ع + م جب ع} = \frac{جم ع - م جب ع}{جم ع + م جب ع}$$

$$Q = \frac{P}{\sin \theta} \quad (ع - ل)$$

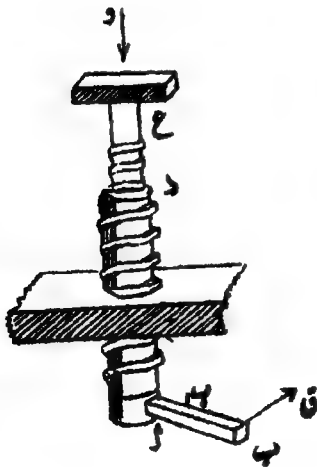
اسی طرح اگر بیچ اوپر کی طرف حرکت کرنے کے عین قریب ہو تو مہ کی علامت کو بدلنے سے

$$Q = \frac{P}{\sin \theta} = \frac{P}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = \frac{P \sin \theta}{\sin^2 \theta} \quad (ع - ل)$$

اگر طاقت کی مقدار Q اور F کے درمیان ہو تو بیچ متبادل رہے گا لیکن اس صورت میں رگڑ انتہائی رگڑا ہونگی۔ یہ بات قابل غور ہے کہ اگر بیچ کا زاویہ θ رگڑ کے زاویہ ϕ کے مساوی ہو تو طاقت صفر ہو جائیگی۔ اس صورت میں بغیر کسی بیرونی طاقت کے لگانے کے بیچ صرف رگڑ کی وجہ سے جو بیچ کی چوڑی کے ساتھ عمل کر لگی متبادل رہیگا۔ اگر $\theta > \phi$ ہو تو Q منفی ہوگی یعنی بیچ خود بخود پیچے نہیں اترے گا بلکہ اس کو نیچے اتارنے کے لئے طاقت لگانی پڑے گی۔

۴۴۔ نظری طور پر بیچ کی صورت میں بیچ کی چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کو حسبِ اہم کم کرنے سے مفاد چیل کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں مگر عملی طور پر ایسا کرنا ممکن نہیں کیونکہ اگر ہم چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کو بہت کم کر دیں تو چوڑی ان دباؤں کو جو اس پر پڑے ہیں برداشت کرنے کے قابل نہیں رہے گی۔

ہنٹر کے فرنی بیچ میں اس نقص کو رفع کر دیا گیا ہے۔ اس مشین میں ایک بیچ A ہوتا ہے جو ایک ثابت قالب کے اندر پھرتا ہے۔ بیچ A کا اندرونی حصہ کھوکھلا ہوتا ہے اور اس کے اندر ایک تالی کھدی ہوتی ہے جس میں تالی میں ایک اور چھوٹا بیچ B حرکت کرتا ہے۔ بیچ D E پر ایک قالب کے ساتھ اس طرح بندھا ہوتا ہے کہ گھوم نہیں سکتا



بلکہ صرف اپنے طول کی سمت میں حرکت کر سکتا ہے۔

جب طاق کا بازو ا ب ایک مکمل گردش کرتا ہے تو باہر کا بیچ اپنے دو مسلسل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کے مساوی فاصلہ اوپر چڑھتا ہے اور ساتھ ہی چھوٹا بیچ ا ب اپنے دو مسلسل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کے برابر بڑے بیچ کے اندر نیچے آتا ہے۔ اس لئے مجموعی طور پر چھوٹا بیچ اور بناء علیہ وزن دونوں چوڑیوں کے درمیانی فاصلوں کے فرق کے مساوی فاصلہ پر اوپر چڑھتا ہے۔ اس لئے حسب دفعہ ۲۴۰ اگر بیچ چکنے ہوں تو کام کے اصول سے

$$\frac{Q}{P} = \frac{32 \text{ مس ع} - 32 \text{ مس ع}}{32 \text{ مس ع}}$$

اس دائرو کا محیط جو طاق کے بازو کا سرا مرسم کرتا ہے

دونوں بیچوں کی گھائیوں کا فرق

دونوں بیچوں کی متصل چوڑیوں کے درمیانی فاصلوں کے فرق کو حسب منشا کم کرنے سے ہم مشین کو کمزور کرنے کے بغیر مفاد جیلی کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

۲۴۳ - فائدہ - دھات یا لوہے کا ایک پیر ہوتا ہے جسکی دو مستوی سطحیں ایک تیز دھار پر ملتی ہیں۔ فائدہ لکڑیوں یا دیگر سخت چیزوں کو چیرنے کے کام آتا ہے ہتوڑی سے اس کے اوپر کے رخ پر مسلسل غزبن لگانے سے اس کی تیز دھار کو اللہ دھکیلا جاتا ہے۔

فائدہ کے عمل کی تحقیق دراصل علم حرکت کا سوال ہے۔

یہاں ہم اس مسئلہ پر صرف سکونی نقطہ

نظر سے غور کریں گے یعنی یہ دیکھیں گے کہ

اس کے اوپر کے رخ پر کس قدر یکساں

طاقات لگانے سے اسے متبادل میں رکھا

جا سکتا ہے۔ ساتھ کی شکل میں ا ب ج

ایک ایسے فائدہ کی تراش ہے جس کے رخ

اس کے قاعدہ ب ج کے ساتھ مساوی

میلان رکھتے ہیں۔



اگر عہد کے توقع مثبت ہوگا

۱۲۷۰ھ میں لکھنؤ میں ہوگا اور خانہ ادب کے قریب ہوگا اگر اس کی بالائی سطح پر ادب کی طرف توجہ دی جائے۔

اگر غیہ = لہ تو فائدہ بغیر کسی قوت لگانے کے عین پھنسا رہیگا۔

۲۴۵۔ سطح اائل۔ جیل طاقت کے نقطہ نظر سے سطح اائل ایک ایسی استوار سطح مستوی کو تعبیر کرتی ہے جو افق کے ساتھ کوئی میلان رکھتی ہو۔

سطح مائل وزنی اجسام کو اٹھانے کے لئے کام میں لائی جاتی ہے۔ سطح مائل پر ایک ذرہ کے تعادل کے مسئلہ پر اس سے قبل دفعات ۸ تا ۸۰ میں بحث ہو چکی ہے۔ معلوم کر دیکھو درسی سطح مائل پر سطح مذکورہ کے متوازی قوت کے زیر عمل ایک جسم کو اوپر کی طرف پھینکنے میں کس قدر کام کرنا پڑتا ہے۔

دفعہ ۸ کے مطابق قوت جو جسم کو سطح مستوی کے اوپر کھینچنے کے لئے

کے جو مشین کی مزا حمتوں کے خلاف کیا جائے معہ اس کام کے جو مشین کے جزوی حصوں کے اوزان کے خلاف کیا جائے۔ کسی مشین میں وزن کے خلاف کام کو کل کام سے جو نسبت ہوتی ہے مشین کی استعداد کہلاتی ہے۔ پس

$$\text{استعداد} = \frac{\text{مشین کا مفید کام}}{\text{مشین پر کامل کام}}$$

فرض کر دو گر کے نہ ہونے کی صورت میں جو طاقت دیکار ہوتی ہے وہ ق بے اور دراصل طاقت ق لگائی جاتی ہے۔ تب دفعہ ۲۱۱ کی رو سے وزن کے خلاف جو کام کیا جاتا ہے ۵۰
 = ق × ۵۰ وہ فاصلہ جس میں سے ق کا نقطہ عمل حرکت کرتا ہے اور وہ کام جو مشین پر صرف ہوا
 = ق × ۵۰ فاصلہ جس میں سے ق کا نقطہ عمل حرکت کرتا ہے پس تقسیم کرنے سے

$$\text{استعداد} \frac{ق}{ق} = \frac{\text{طاقت جب کہ رگڑ موجود نہ ہو}}{\text{طاقت جب کہ رگڑ موجود ہو}}$$

ہم نہ تو کبھی مزاحمت کی قسم کی قوتوں سے پرے طور پر نجات حاصل کر سکتے ہیں، اور نہ ہی مشین کو ایسا بنا سکتے ہیں کہ اس کے پرزے بالکل بے وزن ہوں اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ ان دو وجوہ سے کچھ نہ کچھ کام ضرور ضائع ہوتا ہے۔ پس کسی مشین کی استعداد کبھی اکائی تک نہیں پہنچ سکتی۔ لیکن استعداد اکائی کے جس قدر قریب ہوگی اتنی ہی مشین زیادہ اچھی سمجھی جائے گی۔

کوئی مشین ایسی نہیں جس کی مدد سے کام پیدا کیا جاسکے اور عملاً مشین خواہ کتنی بھی بے رگڑ اور کم وزن کیوں نہ ہو کچھ نہ کچھ کام ہمیشہ ضائع ہوتا ہے۔ مشین کا فائدہ صرف اس قدر ہوتا ہے کہ اس کی مدد سے طاقت کے اثر کو زیادہ موثر بنایا جاسکتا ہے اور ساتھ ہی قوت کے عمل کرنے کے لئے جو فاصلہ درکار ہوتا ہے اس میں بھی نسبتاً مناسب

فاصلہ سے کمی کی جاسکتی ہے۔

۲۴۷۔ عملی طور پر مشینوں کے چلنے میں رگڑ کا اثر اس قدر زیادہ اور اہم ہوتا ہے کہ نظری تحقیقات زیادہ مفید ثابت نہیں ہوتی اور کسی خاص مشین کی صورت میں نتائج کو نظری تحقیقات پر نہیں بلکہ تجربہ پر مبنی کرنا پڑتا ہے۔ اس کا طریقہ ہر قسم کی مشینوں کے لئے یکساں ہے۔

رفتاری نسبت تجربہ سے معلوم ہو سکتی ہے۔ کیونکہ سب مشینوں میں یہ نسبت اُن فاصلوں کی کسر کے مساوی ہوتی ہے جو با ترتیب طاقت اور وزن ایک ہی وقت میں طے کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ یہ نسبت n کے مساوی ہے۔

بیز فرض کرو کہ جو وزن اٹھایا جاتا ہے وہ w ہے۔ تب نظری طاقت P جب کہ

رگڑ بالکل نہ ہو $\frac{P}{W}$ ہوگی۔ تجربہ سے طاقت کی وہ حقیقی قیمت P_1 معلوم کرو جو وزن w کو اٹھانے کے لئے عملاً عین کافی ہوئی ہے تب حقیقی مفاد میں $\frac{P_1}{W}$ ہوگی اور مشین کی استعداد دفعہ ۲۴۶ کی رد سے $\frac{P_1}{P}$ ہوگی۔

۲۴۸۔ مثال کے طور پر تجربہ خانہ کے فرنی چرخ اور محور پر محور کو جس پر کچھ تجربہ کئے گئے تھے۔ تجربہ کے وقت مشین اچھی حالت میں نہیں تھی اور قبل ازاں صاف نہیں کی گئی تھی اور اس کے یا اس کی چرخوں کے سہاروں کے مقاموں پر کوئی جکنائی کی چیز نہیں لگائی گئی تھی۔

دفعہ ۲۴۹ کی ترقیم کے مطابق $\frac{P}{W}$ اور $\frac{P_1}{W}$ کی قیمتیں $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{2}$ لیں

تھیں۔ پس رفتاری نسبت کی قیمت $n = \frac{P}{P_1} = \frac{4}{3}$ اور $\frac{1}{2}$

اس قیمت کی تصدیق تجربہ سے بھی کی گئی کیونکہ یہ دیکھا گیا ہے کہ جب P فاصلہ

۹. نیچے آتا ہے تو صرف ایک اینچ اور ہر جڑھتا ہے

P کی قیمت پڑے میں رکھے ہوئے اٹوں سے دریافت کی گئی تھی اور پڑے

کا وزن بھی قوت ق میں ضرب کر لیا گیا تھا۔ اس طرح بوجھ و کے لئے اس چرخ کا وزن بھی جس کے ساتھ بوجھ و بندھا ہوا تھا و کی قیمت میں شامل کر لیا گیا تھا۔ ق اور و کی جو متناظر قیمتیں گرام وزن میں حاصل ہوئیں وہ ذیل کی جدول میں درج ہیں اس میں ق کی وہ قیمتیں درج ہیں جو بوجھ و کو اٹھانے کے لئے عین کافی تھیں۔ تیسرے کالم میں ق کی (یعنی اُس طاقت کی جو گرہ کے نہ ہونے کی صورت میں درکار ہوتی) متناظر قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔

و	ق	ق = $\frac{2}{3}$	د = $\frac{ق}{2}$	م = $\frac{د}{2}$
۵۰	۲۸	۵۵۵۵	۶۲	۱۵۷۹
۱۰۰	۳۶	۱۱۵۱۱	۶۳۱	۲۵۷۸
۱۵۰	۴۵	۱۶۵۶۷	۶۴۷	۳۵۷۳
۲۵۰	۶۰	۲۷۵۷۸	۶۶۶	۴۵۷۱
۴۵۰	۹۰	۵۰	۶۵۶	۵
۶۵۰	۱۱۹	۷۲۵۲۲	۶۶۱	۵۵۶۶
۸۵۰	۱۴۷	۹۴۵۴۴	۶۶۴	۵۵۷۸
۱۰۵۰	۱۷۵	۱۱۶۵۶۷	۶۶۷	۶
۱۲۵۰	۲۰۳	۱۳۸۵۸۸	۶۶۸	۶۵۱۶
۱۴۵۰	۲۳۲	۱۶۱۵۱۱	۶۶۹	۶۵۲۵

چوتھے کالم میں د یعنی استعداد کی قیمتیں مندرج ہیں اور آخری کالم میں مفاد خیل م کی متناظر قیمتیں مندرج کی گئی ہیں۔

اوپر کے نتیجوں کو مرلج دار کاغذ پر مرتب کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ق اور و کی متناظر قیمتیں تقریباً ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہوتی ہیں جو تیسرے اور آخری نقطہ میں سے گزرتا ہے پس ق اور و کا رابطہ اس شکل کا ہے $ق = د + و + ب$

جہاں ۱ اور ب مستقل ہیں۔

نیز ق = ۴۵ جبکہ و = ۱۵۰ اور ق = ۲۳۲ جبکہ و = ۱۴۵۰

اس لئے $\frac{1}{1450} = \frac{1}{232} \times \frac{1}{45}$ ، ب = ۲۳۲ تقریباً اس لئے ق = ۱۴۵۰ + ۲۳۲

نیز ق = $\frac{1}{4} = \frac{1}{9} \times 111$ و

$$\text{لہذا د} = \frac{\text{ق}}{\text{ق}} = \frac{111 \times 9}{232 + 1450 \times 9}$$

$$\text{اور م} = \frac{\text{ق}}{\text{ق}} = \frac{9}{232 + 1450 \times 9}$$

ان سے د اور م کی قیمتیں و کی کسی قیمت کے جواب میں حاصل ہو سکتی ہیں۔ جیسے جیسے و بڑھتا جاتا ہے د اور م کی قیمتیں بھی بڑھتی جاتی ہیں اگر و کی تمام قیمتوں کے لئے د کی مذکورہ بالا قیمت کو درست تسلیم کیا جائے تو د کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ و کی قیمت لا انتہا بڑی ہو جائے اور اس وقت د تقریباً ۷۷ ہوگا۔ پس اس مشین میں جو کام کیا جاتا ہے اس کا کم از کم ۲ فیصدی ضائع ہو جاتا ہے۔

پس مفاد چلی کی بڑی سے بڑی قیمت = $\frac{1}{1450}$ تقریباً ۷

اگر استعمال سے پہلے مشین کو اچھی طرح صاف کر کے چکنا بنالیا جاتا تو بالضرور مقابلہ اس سے بہت اچھے نتائج حاصل ہوتے۔

۲۴۹۔ دھوا قبل کی مثال کے امتداد دیگر مشینوں میں بھی حقیقی استعداد اکائی سے بہت کم ہوتی ہے۔

جن مشینوں کی استعداد بہت کم ہوتی ہے ان سے عموماً ایک عملی فائدہ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ جن مشینوں میں رگڑ کی مقدار قوت کی مقدار پر منحصر نہیں ہے ان میں کسی طاقت کے موجود نہ ہونے کی صورت میں وزن خود بخود نیچے نہیں اترے گا بشرطیکہ استعداد $\frac{1}{4}$ سے کم ہو۔ ہر قسم کی مشینوں کی مثال ایک ایسا بیج ہو سکتا ہے جس کا زادیہ چھوٹا ہوا جس کی طاقت دھوا ۲۴۱ کی طرح افقی

کے متوازی عمل کرے یا ایک سطح مائل ہو سکتی ہے جس میں طاقت سطح مائل کے ساتھ اوپر کی طرف عمل کرے۔

ان مشینوں میں جن میں رگڑ کی مقدار طاقت پر موقوف ہوتی ہے ایسا کوئی عام قاعدہ نظری طور پر ثابت نہیں کیا جاسکتا اور ہر ایک صورت پر جدا گانہ غور کرنا چاہیے لیکن جن مشینوں میں قوت کار رگڑ کی مقدار پر کم اثر پڑتا ہے ان کے لئے ہم تقریبی طور پر یہ اصول قرار دے سکتے ہیں کہ وزن نیچے نہیں اترے گا بشرطیکہ استعداد $\frac{1}{2}$ سے کم ہو ایسی مشینوں کے بارے میں کہتے ہیں کہ یہ بازگشت یا الٹ مار نہیں کرتی۔

مثلاً دفعہ ۲۳۰ کی معمولی فرنی چرخی کی استعداد $\frac{1}{2}$ سے کم ہوتی ہے اور طاقت کی عدم موجودگی میں یعنی جبکہ مشین کو چھوڑ دیا جائے اور رسی کو ڈھیلا کر دیا جائے تو بھی بوجھ و خود بخود نیچے نہیں اترے گا۔ مشین کے عدم بازگشت ہونے کی خوبی سے بہت حد تک مشین کی کم استعدادی کی تلافی ہو جاتی ہے۔

فرنی چرخ اور محور میں مفاد حیل اکثر زیادہ ہوتا ہے اور بناؤ علیہ استعداد بالعموم $\frac{1}{2}$ سے کافی زیادہ ہوتی ہے، لیکن چونکہ اس میں وزن خود بخود نیچے اتر سکتا ہے، اس لئے اسے عملی طور پر ہمیشہ فرنی چرخی سے زیادہ سودمند مشین تصور نہیں کیا جاسکتا۔ جو طالب علم عملی طور پر مشینوں کے استعمال کے متعلق مزید واقفیت حاصل کرنا چاہتا ہے وہ سرراہٹ بال کی کتاب "بجربئی حرکیات" کا مطالعہ کرے۔

مثالیں

۱۔ ایک چرخ اور محور کے مرکز نقل کا فاصلہ اس کے محوری خط سے دہرے، ثابت کر دو کہ مشین ایسی حالت میں ساکن رہ سکتی ہے جس میں اس کے محوری خط اور مرکز نقل میں سے گزرنے والی سطح مستوی سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ طے کم زاویہ بنائے جہاں جب طے $\frac{1}{2}$ جب خود اس میں ب محور کا نصف قطر اور نہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۲۔ ایک ترازو کے بازو مساوی طول کے ہیں اور ڈنڈی پر مختلف وزن ہیں، اگر ایک جسم کو باری باری سے ہر ایک بازو میں رکھ کر توازن قائم کر دو کہ اس کا اصلی وزن اس کے ظاہری وزنوں کے حسابی واسطے کے مساوی ہوگا۔

۳۔ ایک ترازو کے بازو غیر مساوی طول کے ہیں لیکن جب ڈنڈی کے سروں پر کوئی وزن نہ ہو تو ڈنڈی افق کے متوازی رہتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کسی جسم کو باری باری سے دونوں پلڑوں میں رکھ کر توازن جائے تو اس کا اصلی وزن اس کے ظاہری وزنوں کا ہندسی اوسط ہوگا۔

نیز ثابت کرو کہ اگر کوئی دو کا نذر اس ترازو کے دونوں پلڑوں میں باری باری سے کوئی چیز تول کر دے تو خود اس کو نقصان ہوگا۔

۴۔ ایک ترازو کے پلڑوں کے وزن غیر مساوی ہیں اور ڈنڈی کے بازوؤں کے طول بھی غیر مساوی ہیں۔ اگر ایک دو کا نذر کسی خدیار کو کوئی شے مساوی حصوں میں دونوں پلڑوں سے طول کر دے تو ثابت کرو کہ اسے خود نقصان ہوگا اگر ڈنڈی کا مرکز ثقل بے بازو کے اندر ہو۔

۵۔ ایک معمولی تک کی درجہ بندی اس معرودہ کی بنا پر کی گئی ہے کہ اس کا اپنا وزن ق ہے اور متحرک راکب کا وزن و ہے۔ مگر یہ دونوں معرودے غیر صحیح ہیں۔ اگر دو جسموں کے اصلی وزن س اور س ہوں اور ظاہری وزن س + لا اور س + ما ہوں تو ثابت کرو کہ قابل حرکت وزن اور تک کے وزن بالترتیب ان کی معرودہ نمیتوں سے بقدر $\frac{ق}{س+لا}$ (لا - ما) اور

$\frac{ق}{س+لا}$ (ما - لا) - $\frac{ق}{س+لا}$ (س + ما - س + لا) کے کم ہیں جہاں $س+لا = س+ما$ - لا - ما

اور ب اور ب بالترتیب وہ قائلے ہیں جو نصاب سے (دونوں ایک ہی سمت میں) صلاح کے مرکز ثقل تک اور شے کے نقطہ آویزش تک ناپے گئے ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ اگر کسی جسم کا اصلی وزن س ہو تو اس کا ظاہری وزن ہوگا

$$س + \frac{س(لا - ما)}{س + لا}$$

۶۔ ثابت کرو کہ بیچ کی استعداد بڑی سے بڑی ہوگی جب کہ اس کا زاویہ ۵۴° - ۵۶° ہو۔ رگڑ کی موجودگی میں کسی بوجھ کو اٹھانے کے لئے جو طاقت درکار ہوتی ہے وہ

$$= \frac{ق}{س+لا} (س+لا) + (لا+ما)$$

اور جب رگڑ موجود نہ ہو تو طاقت

$$= 3 \times \frac{1}{11} \text{ مس م}$$

مطلوبہ استعداد ان کی نسبت ہوتی ہے۔ پس

$$\text{استعداد} = \frac{\text{مس م} \times \text{جب (۲+۱) - جب ل}}{\text{مس (۲+۱) - جب (۲+۱) + جب ل}}$$

$$= \frac{۲ \text{ جب ل}}{۱ - \text{جب (۲+۱) + جب ل}}$$

استعداد کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جب $۲+۱=۹۰$

۷۔ چرخوں کے دوسرے نظام میں ہر دو قالب میں دو چٹیاں ہیں۔ بتاؤ کہ ۳۰۰ پونڈ کا بوجھ اٹھانے کے لئے کتنی طاقت درکار ہوگی؟ اگر رگڑ کی وجہ سے کوئی طاقت اس وزن کا جو یہ رگڑ کی عدم موجودگی میں اٹھا سکتی ہے صرف ۵ گنا وزن اٹھا سکے تو بتاؤ کہ کتنی طاقت درکار ہوگی۔

$$[۴۵ \text{ پونڈ، } \frac{۲}{۳} ۱۶۶ \text{ پونڈ}]$$

۸۔ چرخوں کے دوسرے نظام میں رفتار کی نسبت ۱:۸ ہے، رگڑ اس قدر ہے کہ طاقت کا صرف ۵۵ فیصد حصہ مفید کام انجام دے سکتا ہے۔ بتاؤ کہ کتنی طاقت ۵ ہنڈریٹ وزن اٹھانے کے لئے درکار ہوگی۔

$$(\text{جواب } \frac{۳}{۲۲} \text{ ہنڈریٹ})$$

۹۔ ایک بیچ جاک میں بوجھ دو کی قیمتیں! ترتیب ۱۵۰، ۱۸۰، ۲۱۰، ۲۴۰

اور ۲۶۰ پونڈ ہیں اور طاقت کی متناظر قیمتیں ۲۰، ۲۲، ۲۴، ۲۵، ۲۸، ۳۱ پونڈ وزن ہیں۔

یہ فرض کر کے کہ $۱+۲+۳+۴$ اور $۱+۲+۳+۴+۵$ کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

$$[۵۳، ۹۰]$$

۱۰۔ چرخوں کے دوسرے نظام میں مزاحمت و اور طاقت کی متناظر قیمتیں حسب ذیل ہیں، وزن میں نیچے کے قالب کا وزن بھی شامل ہے۔

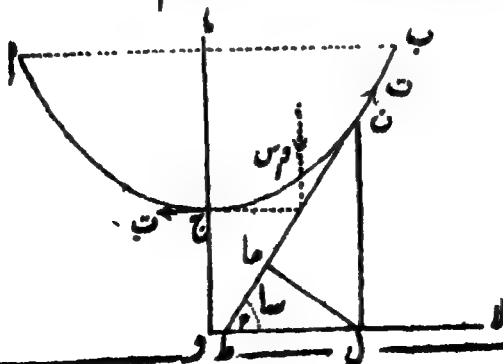
تیرھواں باب

رسیوں اور زنجیروں کا تعادل

۲۵۰۔ کامل طور پر مڑ سکنے والی رسی اس رسی کو کہتے ہیں جس کی کسی عادی تڑا مش پر کا تعامل صرف ایک قوت پر مشتمل ہو جس کی سمت رسی کے ماس کی سمت ہو۔ اس تڑا مش کو اتنا چھوٹا فرض کرنا چاہیے کہ کسی محض ایک مخنی خط تصور ہو سکے۔ رسی اپنے کسی نقطہ پر مڑنے کے خلاف کوئی ممانعت پیش کر سکتی اس لئے اس کی شکل میں کوئی استواریت نہیں ہے اگر کسی زنجیر کی کڑیاں بہت چھوٹی اور چکنی ہوں تو اسے بھی مڑ سکنے والی رسی تصور کیا جاسکتا ہے۔

ساتویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی رسی میں جو مکمل طور پر مڑ سکنے والی نہ ہو یا تار کی صورت میں کسی عمادی تڑش پر کے فعال صفت ایک ماسی قوت میں تحویل نہیں ہو سکتے بلکہ ایک جنت اور ایک قوت میں تحویل ہو گئے ہیں۔

۲۵۱۔ ایک یکساں وزنی انکسج رسی جاؤ ذہ ارض کے زیرِ عمل آزادانہ لشک رہی ہے۔ جس مخنی کی شکل یہ اختیار کرتی ہے اس کی مسادات معلوم کرو۔



فرض کرو کہ منحنی کا سب سے نچلا نقطہ ج ہے، اور ن رسی پر کا کوئی اور نقطہ ہے، ج ن قوس کا طول س ہے، فرض کرو کہ ن پر کا تناؤ ت اور ج پر کا تناؤ ت ہے۔

تب رسی کا حصہ ج ن، تناؤں ت اور ت اور اس حصہ کے وزن \times س کے زیر عمل متعادل ہے جہاں و رسی کے اکائی طول کا وزن ہے۔
اگر ن پر کے مماس کا میلان افق کے ساتھ سا ہو تو

$$ت \text{ جم سا} = ت \quad \dots \quad (۱)$$

$$اور \quad ت \text{ جب سا} = \times س \quad \dots \quad (۲)$$

فرض کرو کہ سب سے نچلے نقطہ پر کا تناؤ رسی کے طول ج کے وزن کے مساوی ہے، تب ت = و ج

$$لہذا \quad م س سا = \frac{و س}{ت} = \frac{س}{ج} \quad \dots \quad (۳)$$

یعنی $\frac{فرا}{فرا} = \frac{س}{ج}$ بشرطیکہ لا اور ما کے محور انتصابی اور افقی ہوں تفرق کرنے سے

$$\frac{فرا}{فرا} = \frac{۱}{ج} \times \frac{۱}{فرا} = \frac{۱}{ج} \times \frac{۱}{\left[۱ + \left(\frac{فرا}{فرا} \right)^2 \right]}$$

$$\therefore \quad \frac{۱}{ج} = \frac{\frac{فرا}{فرا}}{\left[۱ + \left(\frac{فرا}{فرا} \right)^2 \right]}$$

مکمل کرنے سے لو کہ $\left[\frac{فرا}{فرا} + ۱ + \left(\frac{فرا}{فرا} \right)^2 \right] = \frac{۱}{ج} + \text{مستقل}$

اگر ما کا محور ج میں سے گزرے تو $\frac{فرا}{فرا} = ۰$ جبکہ لا = ۰ اس لئے مستقل با صفر ہے۔

$$ن = \frac{فرا}{فرا} + \sqrt{1 + \left(\frac{فرا}{فرا}\right)^2} = \frac{فرا}{فرا}$$

$$اب - \frac{فرا}{فرا} = \frac{1}{\frac{فرا}{فرا} + \sqrt{1 + \left(\frac{فرا}{فرا}\right)^2}} = \frac{فرا}{فرا}$$

اس لئے تقریب کرنے سے

$$\frac{فرا}{فرا} = \frac{1}{\left[\frac{فرا}{فرا} - \frac{فرا}{فرا}\right]} \quad (۴)$$

$$مکمل کرنے سے \frac{فرا}{فرا} = \frac{1}{\left[\frac{فرا}{فرا} + \frac{فرا}{فرا}\right]} + \frac{فرا}{فرا}$$

اگر مبدأ نقطہ ج سے حاصلہ ج نیچے لیا جائے تو ما = ج جب لا = ۰، اس لئے (۵) =

ان محوروں کے لحاظ سے منحنی کی مساوات ہے

$$\frac{ج}{فرا} = \frac{1}{\left[\frac{فرا}{فرا} + \frac{فرا}{فرا}\right]} = ج، جہز ج، \quad (۵)$$

اس منحنی کو سادہ زنجیرہ کہتے ہیں۔ اور ولا کو اس کا مرتبہ کہتے ہیں۔

مساواتوں (۳) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$س = ج، مس سا = ج، \frac{فرا}{فرا}$$

$$\frac{ج}{فرا} = \frac{1}{\left[\frac{فرا}{فرا} - \frac{فرا}{فرا}\right]} = ج، جہز ج، \quad (۶)$$

ان دو مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = ج + س، \quad (۷)$$

اس نتیجہ کو مساوات (۳) کے ساتھ ملانے سے

$$ما = ج، قسا اور س = ج، مس سا، \quad (۸)$$

اگر ن سے معین ن ل کھینچا جائے اور ل ما عمود ہون ط پر تو زاویہ
مال ن = سا

اور اس لئے (۸) سے

ل ما = ج = وج

اور ن ما = س = قوس ج ن

اب (۱) سے حاصل ہوتا ہے

تسا = وج، قسا = و ما

یعنی زنجیرہ کے کسی نقطہ ن پر کا تناؤ رسی کے اس طول کے وزن کے مساوی ہوتا ہے جو نقطہ ن اور مرتب کے درمیان عمودی فاصلہ کے برابر ہو مقدار ج کو جس سے زنجیرہ کا ناپ متعین ہوتا ہے اس کا تبدیل کہتے ہیں۔

۲۵۲۔ ج کی تمام قیمتوں کے لئے لا کی چھوٹی قیمتوں تک منحنی کی شکل میں مساوات سے تقریباً حاصل ہوتی ہے ج [ما - ج] = لا۔

یہ ام مساوات (۵) کی بائیں جانب کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلانے سے ظاہر ہے، لہذا منحنی کے سب سے نچلے نقطہ کے قرب میں منحنی کی شکل مکانی کی ہوتی ہے۔

ج کے مقابلہ میں لا کی بڑی قیمتوں کے جواب میں و $\frac{1}{2}$ کی قیمت نظر انداز ہو سکتی

ہے اس لئے اس صورت میں منحنی کی شکل قوت نما منحنی سے ملتی ہے۔

۲۵۳۔ مشتق ۱۔ ایک یکساں زنجیر کا طول ۲ ل ہے، اس کے سروں کو دو نقطوں سے جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ل ہے بانہ دیا گیا ہے، اگر ل،

۱ سے بقدر ایک چھوٹی مقدار کے بڑا ہو تو تابعت کو کہ زنجیر کا تناؤ اس کے طول ۲ ل سے $\frac{1}{2}$ (ل - ۱) ل

کے وزن کے مساوی ہوگا اور جھوک یعنی زنجیر کے دو سروں کو لانے والے خط سے سب

سے نچلے نقطہ کی گہرائی تقریباً $\frac{1}{2}$ ل (ل - ۱) ہوگی۔

چونکہ ل، و سے تھوڑا سا بڑا ہے اس لئے زنجیر کا تناؤ لازماً بہت بڑا ہوگا اور بنا رعلیہ ج، بہت بڑا ہوگا۔

$$\text{تب دفعہ ۲۵ کی سادات (۶) ہو جاتی ہے ل} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\text{ج}} - \frac{1}{\text{و}} \right]$$

قوت غنائی سلسلہ سے پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ل} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{ج}} + \dots \right] = \frac{1}{2} \left[\dots + \frac{1}{\text{ج} \times 4} + \frac{1}{\text{ج} \times 20} + \dots \right]$$

پس پہلے قریب تک

$$\text{ل} = 1 - \frac{1}{\text{ج} \times 4} \quad \text{اور اس لئے ج} = \frac{1}{(1 - \text{ل}) \times 4}$$

یعنی سب سے نچلے نقطہ پر کا تناؤ زنجیر کے اس قدر طول کے وزن کے مساوی ہے۔
اب دفعہ ۲۵ کی سادات (۵) کی رو سے زنجیر کے سرے کا معین

$$1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\text{و}} + \frac{1}{\text{ج}} \right] = \frac{1}{2} \left[\dots + \frac{1}{\text{ج} \times 2} + \frac{1}{\text{ج} \times 2} + \dots \right]$$

$$= \text{ج} + \frac{1}{\text{ج} \times 2} + \frac{1}{\text{ج} \times 2} + \dots$$

اس لئے سب سے نچلے نقطہ کا جھوک

$$1 - \text{ج} = \frac{1}{\text{ج} \times 2} \quad \text{تقریباً} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{ج}} = \frac{(1 - \text{ل}) \times 4}{2}$$

اس سے آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر سب سے نچلے نقطہ کا جھوک ۱۵ ہو تو وہاں تناؤ تقریباً زنجیر کے طول $\frac{1}{2}$ کے وزن کے مساوی ہوگا۔

مشق ۲۔ ایک پتنگ زمین سے بلندی ۵ پر اڑ رہی ہے اور ڈوری کا طول ل، چھوڑا جا چکا ہے۔ سی کا آزاد سر زمین کے ساتھ بند ہے۔ ثابت کرو کہ پتنگ پر ڈوری کا میلان زمین کے ساتھ ۲ مس $\frac{1}{2}$ ہے اور ڈوری کے تناؤ پتنگ اور زمین والے

سروں پر بالترتیب

۱۔ $\frac{ل^۲ + ح^۲}{م^۲}$ اور ۲۔ $\frac{ل^۲ - ح^۲}{م^۲}$ ہیں جہاں ۳۔ ڈوری کے اکائی طول کا وزن ہے۔
 دفعہ ۲۵۱ کی شکل کے مطابق ۴۔ ڈوری کا پتنگ والا سرا ہے اور ۵۔ ج زمین والا سرا۔

اس لئے $ل = م + ح$

لہذا شکل ۱ مان سے

$$(م + ح) ل = ل^۲ + ح^۲ + م ل$$

$$\therefore ح = \frac{ل^۲ - ح^۲}{م} \text{ اور } ل = م + ح = \frac{ل^۲ + ح^۲}{م}$$

$$\text{نیز جم سا} = \frac{ح}{م + ح} = \frac{ل - ح}{ل + ح} \text{ اس لئے مس } \frac{۱}{۲} = \frac{ل - ح}{ل + ح}$$

نیز ۱ اور ۲ ج پر مطلوب بتاؤ ہیں ۳۔ $ل$ اور ۴۔ $ح$ ۔
 مشق ۳۔ ایک یکسان وزنی رستی جس کا طول ۹۰ اینچ ہے دو چکنی میخوں پر سے جو مختلف بلندیوں پر ہیں لٹک رہی ہے رسی کے جو حصے انتصاباً لٹک رہے ہیں ان کے طول بالترتیب ۳۰ اینچ اور ۳۳ اینچ ہیں۔ ثابت کرو کہ زنجیر کا راس کل رسی کو ۵:۴ میں تقسیم کرتا ہے۔
 نیز میخوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ میخوں کے زنجیر کے راس ج سے فاصلے بالترتیب $س$ اور $س'$ ہیں، گویا

$$س + س' = ۹۰ - ۹۲ = ۲۴$$

اگر زنجیر کا سیدل ج ہو تو دفعہ ۲۵۱ کی مساوات (۷) کی رُو سے $س' = س + ح$ ہو گا۔

$$\text{اور } س' = س + ح = ۳۳$$

چونکہ چکنی میخ پر گزرنے سے رسیوں کے تناؤ میں کوئی فرق نہیں آتا اس لئے
 دفعہ ۲۵۱ کی آخری خاصیت کی رُو سے رسی کے دونوں سروں کو زنجیر کے مرتب پر
 واقع ہونا چاہیئے۔

$$\text{اس لئے آسانی سے } س = ۱۰، س' = ۱۴ \text{ اور } ح = ۲۰ = ۲۴$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ اور } 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \text{ ج، و } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 1$$

(۱) اور (۲) سے قیمتیں درج کرنے سے ہیں ۴ کی قیمت حاصل ہو سکتی ہے۔

مشق ۵۔ ایک زنجیر کا طول ۱۲ ہے، اسے دو چھوٹی یکجہی چرخوں پر سے جو ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے فاصلہ ۲ ہے واقع ہیں لٹکایا گیا ہے متبادل کے مثل معلوم کرو اور نیز بتاؤ کہ یہ قائم میں یا غیر قائم۔

چونکہ ایک طرف تو یہ آزاد حصہ ال کے وزن کے مساوی ہے اور دوسری طرف یہ زنجیر کے اس حصہ کے وزن کے مساوی ہے جس کا طول انتصاباً مرتب تک کے فاصلہ کے

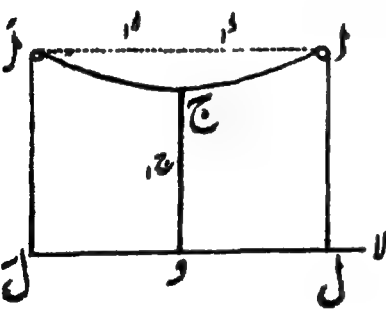
مساوی ہے (بوجب دفعہ ۲۵)

اس لئے ظاہر ہے کہ سرے ل اور

نیز ل دووں زنجیر کے مرتب پر واقع ہیں۔

اس لئے ل، قوس ج + ل + خال

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 0$$



$$+ \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = 1 \text{ ج، و } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ (۱)}$$

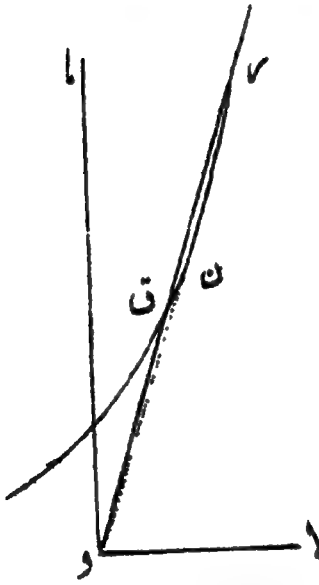
جہاں ج، زنجیر کا سبب ہے۔

مساوات (۱) کو جبریہ طور پر حل نہیں کیا جاسکتا لیکن اگر ل اور ل کی قیمتیں متبادل دی ہوئی

ہوں تو ایسی حل حسب ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{L}{J} = \text{لا رکھو، تب} \quad \text{ولا} = \frac{L}{J} \times \text{لا} \dots \dots (۲)$$

منحنی ما = ولا اور خط مستقیم ما = $\frac{L}{J}$ لا کھینچو۔ نقطہ ق اور م
(جہاں منحنی اور خط مستقیم ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں) ان کے فصلے مساوات (۲) کے
تقریبی حل ہیں اور اس لئے $\frac{L}{J} = \frac{1}{J}$ لا سے ج کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ
حل حقیقی، منطقی یا خیالی ہونگے



موجب اسکے کہ $\frac{L}{J} \leq \frac{1}{J}$ مسن ولا

جہاں و ن ماس ہے منحنی کا
نقطہ و سے۔

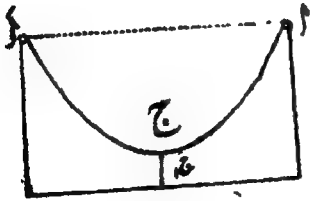
اب ن اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{مسن ولا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \\ = \text{ولا} = \text{ما}$$

اس لئے ن کے محدود (۱) ہیں
پس مسن ولا = و

پس ریخروں کا دو، ایک یا نہ ہونا اس بات پر منحصر ہے کہ با ترتیب $L \leq \frac{1}{J}$ و

ایک منحنی تقریباً ایسا ہوگا جیسا کہ پہلی
شکل میں دکھایا گیا ہے، اور دوسرا منحنی قیسری
شکل میں دکھایا گیا ہے۔



پہلی صورت میں ج کی قیمت صرفاً دوسری
صورت میں ج کی قیمت سے بڑی ہوگی۔

تبادل قائم یا غیر قائم۔
دفعہ ۴۴ کی
مشق ۲ کی دس

$$\text{مرکز نقل کی بلندی اس کے مرتب کے اوپر} = \frac{\text{ج، ل + س}}{\text{س}}$$

$$\therefore \text{اس کی گہرائی آؤ کے نیچے} = \text{ل} - \frac{\text{ج، ل + س}}{\text{س}} = \frac{\text{اس} - \text{لاج}}{\text{س}}$$

آؤ کے نیچے کل زنجیر کے مرکز نقل کی گہرائی

$$\frac{\frac{1}{2} \times 12 + \frac{\text{اس} - \text{لاج}}{\text{س}} \times 6}{\text{س} + 12} = \frac{\frac{1}{2} \times 12 + \text{اس} - \text{لاج}}{(س + 12)}$$

$$\text{بت بالا میں} \quad \text{ل} = 12, \quad \frac{\text{ج، ل}}{2} = \left(\frac{12}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{س} = \frac{\text{ج، ل}}{\left(\frac{12}{2} - \frac{1}{2} \right)}$$

$$\text{اور} \quad \text{ل} = 12 = \text{س} + \frac{\text{ج، ل}}{2}$$

کل زنجیر کے مرکز نقل کی گہرائی آؤ کے نیچے

$$\text{ل} = \frac{12}{2} - \frac{\text{ج، ل}}{2} = \frac{\text{ل}}{2} \times \frac{\text{ج، ل}}{2} - \left[\frac{\text{ج، ل}}{2} + \frac{\text{ل}}{2} \right] - 12$$

$$\frac{\text{ل}}{2} \times 2$$

$$\frac{+ \text{ج، ل} - 12}{\text{ل}} = \frac{(\text{ل} - 12) + (\text{ج، ل} - 12)}{\text{ل}}$$

یہ جگہ جتنا بڑا ہوگا اتنی ہی مرکز نقل کی گہرائی آؤ کے زیادہ نیچے ہوگی۔ اس لئے ممکن کی پہلی شکل قائم ہے اور دوسری طرہ قائم۔

۶۔ معلومہ طول ل کی ایک یکساں دزدہ اور اسی دو نقطوں ف اور ق کے درمیان ہے، ف سے ق کا افقی فاصلہ اور انحصاری فاصلہ ک ہے

یہ سی بجائ سکون جس زنجیر کی شکل اختیار کرتی ہے اس کے سہل ج کی قیمت معلوم کرو۔
 فرض کرو کہ مرتب ولا اور زنجیرہ کے سب سے پہلے نقطہ ج میں سے گزرنے والے
 انتصابی خط کے لحاظ سے نقطہ ن کے محد (۱۱) ہیں۔ (دیکھو دفعہ ۲۵۱)
 دفعہ مذکورہ کی مساواتوں کی تہ سے

$$(۱) \quad \dots \dots \dots \left[\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right] \frac{1}{\tau} = \dots$$

$$(۲) \quad \dots \dots \dots \left[\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right] \frac{1}{\tau} = \dots$$

$$(۳) \quad \dots \dots \dots \left[\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega} \right] \frac{1}{\tau} = \dots$$

$$(۴) \quad \dots \dots \dots \left[\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega} \right] \frac{1}{\tau} = \dots$$

$$(۵) \quad \dots \dots \dots \left[\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega} \right] \frac{1}{\tau} = \dots$$

$$\therefore \quad \dots \dots \dots \left[\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right] \frac{1}{\tau} = \dots$$

$$(۶) \quad \dots \dots \dots \left[\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega} \right] \frac{1}{\tau} = \dots$$

اس مساوات کو جبریہ طور پر حل نہیں کیا جاسکتا۔ لیکن رسمی حل $\frac{1}{\omega} = \dots$ لا رکھنے سے
 حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اس لئے (۶) سے حاصل ہوتا ہے

$$\dots \dots \dots \frac{1}{\omega} = \dots$$

اس لئے لا وہ نقطہ ہے جہاں خطوط مستقیم

$$ما = \frac{لا - ک}{م}$$

ما = چیز لا سے ملتے ہیں۔

منحنی کھینچنے سے ہیں لا کی دو مساوی اور مخالف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور اس لئے

لی دو مساوی اور مخالف قیمتیں ملتی ہیں بشرطیکہ $\frac{لا - ک}{م} < ۱$
بشرطیکہ ل بڑا ہو طول ف ق سے۔

چونکہ ج کی قیمت تقرب کے کسی مطلوبہ درجہ تک معلوم ہو سکتی ہے اس لئے مساوات
۱ سے لا کی اور مساوات (۱) سے م کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ پس حل مکمل ہے۔
ظاہر ہے کہ ج کی صرف مثبت قیمت یعنی چاہیئے کیونکہ ج کی منفی قیمت سے ما
ہو جائیگا۔

فرض کرو کہ مساوات (۲) کے تقریبی حل کے طور پر لا کی قیمت لا تقریبی طریقہ
۳ حاصل کی گئی ہے تب مزید درجہ کی تقریبی قیمت تحلیل طوری طور پر معلوم ہو سکتی ہے۔ کیونکہ
۱ میں اوپر کی علامت لینے سے اور

$$\frac{لا - ک}{م} = ل رکھنے سے ہیں چیز لا = لا کو حل کرنا ہے جہاں لا ایک تقریبی
ہے۔$$

$$لا = لا + د رکھو جہاں د بہت چھوٹا ہے$$

$$چیز (لا + د) = ل (لا + د)$$

$$۱ چیز لا + د چیز لا + = ل (لا + د) ٹیلہ کے سلسلے سے$$

ن لئے د کے مربعوں کو نظر انداز کرنے سے

$$د ۷۰ - جز ۷۰ = \frac{۱۰۰ - جز ۷۰}{۱۰۰ - جز ۷۰} = \frac{۱۰۰ - جز ۷۰}{۱۰۰ - جز ۷۰}$$

پس ۷۰ + د دوسری تقریبی قیمت ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک تار کا وزن ۱۵ پونڈ فی گز ہے۔ اس کے سرے دو نقطوں سے جن کے درمیان افقی فاصلہ ۱۰۰ فٹ ہے بند ہے ہیں اور تار کے جھوک یعنی سب سے نیچے نقطے کی گہرائی ۱ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ تار کا بڑے سے بڑا تناؤ تقریباً $\frac{۱}{۲}$ پونڈ وزن ہے۔

۲۔ ایک تار برقی کا نظام لوہے کے تار نمبر ۸ سے جس کا وزن ۳۰ پونڈ فی ۱۰۰ گز ہے بنا ہے کھمبوں کے درمیان فاصلہ ۱۵ فٹ ہے اور وسط میں تار کا جھوک ۱ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ سرے پر اس کا تناؤ ۲۰۵ پونڈ وزن کے مساوی ہے۔

۳۔ ایک تار ۱۲۰۰ فٹ نصف قطر والے سنخنی کے گرد کھمبوں پر بند ہوا ہے اور ہر دو متصل کھمبوں کے درمیان ۴۰ گز کا فاصلہ ہے اور ہر فصل کے وسط میں کھمبوں کے درمیان تار کا جھوک ۶ اینچ ہے۔ اگر تار کا وزن $\frac{۱}{۲}$ پونڈ فی گز ہو تو ثابت کرو کہ ہر ایک کھمبے پر عمالی افقی کشاؤ تقریباً ۱۸۰ پونڈ وزن ہو گا۔

۴۔ شخص سکونیات کے اصولوں کی مدد سے ثابت کرو کہ عام زنجیر کے نقاط اور ق کے ماس جس نقطہ پر ملے ہیں وہ قوس ن ق کے مرکز نقل اث میں سے گزرنے والے احتمالی خط پرواقع ہوتا ہے۔

۵۔ ایک یکساں وزنی زنجیر کو جس کا طول ۵۵ فٹ ہے دو نقطوں سے جو افقی سطح مستوی میں ۱۵۰ فٹ کے فاصلہ پرواقع ہیں دکھایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ سب سے نیچے نقطہ پر کا تناؤ کل زنجیر کے وزن کا تقریباً ۰.۸ گنا ہے۔

۶۔ اگر ایک یکساں زنجیر کو اس کے سرے پر سے لٹکایا جائے اور اسکی کڑیوں کی کوئی تعداد ایک ہی انتظامی سطح مستوی میں چکے افقی تاروں پر آزادانہ حرکت کر سکے تو ثابت کرو کہ ان مسلسل کڑیوں کے درمیان زنجیر کے حصے ایک ہی زنجیر کی قوس ہیں۔

۷۔ اگر سب بلند یوں پر ہوا کی رفتار دی ہو اور اس کا آخر جو ایک چنگ کی ڈوری پر پڑتا ہے نظر انداز ہو سکتا ہو تو ثابت کرو کہ جیسے جیسے چنگ اوپر چڑھتا ہے ویسے ویسے اسے قائم رکھنے کے لئے جو قوت درکار ہوتی ہے اس میں کمی ہوتی جاتی ہے۔

۸۔ ایک یکساں زنجیر کا طول ۲ ل اور وزن ۵ ہے اسے دو نقطوں (ا) اور (ب) سے جو ایک ہی افقی خط پر واقع ہیں لٹکایا گیا ہے۔ زنجیر کے وسطی نقطہ ۵ سے ایک وزن ق لٹکایا گیا ہے اور اس نقطہ کی گہرائی خط (ب) کے نیچے ۴ ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک سرے پر کشاؤ $\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} + \frac{5}{3} \right]$ ہے۔

۹۔ ایک ناقابل کشاؤ رسی کا طول ۲ ل ہے اور فی اکائی طول وزن ۵ ہے اس کو ایک ہی بلندی پر کے دو نقطوں سے جن کا درمیانی فاصلہ ۵ ہے لٹکایا گیا ہے۔ سہارے کے نقطوں کے نیچے رسی کے سب سے نیچے نقطہ کی گہرائی معلوم کرنے کی مساواتیں حاصل کرو۔

۱۰۔ ایک ذہنی یکساں رسی کا طول ل ہے، اس کے ایک سرے کو ثابت نقطہ (ا) سے بائیں دیا گیا ہے اور دوسرے سرے کو افقی قوت کے ساتھ جو رسی کے طول (۱) کے وزن کے مساوی ہے کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ (ب) کے درمیان افقی اور انحصائی فاصلے بالترتیب $\frac{1}{2}l$ اور $\frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l = l$ ہیں۔

۱۱۔ ایک یکساں زنجیر جس کا طول ل ہے ایک ہی افقی خط پر کے دو نقطوں (ا) اور (ب) سے اس طرح لٹکا نا منظور ہے کہ سروں پر کے کشاؤ وسطی نقطہ پر کے کشاؤ کا $\frac{1}{2}$ گنا ہوں ثابت کرو کہ فاصلہ (ب) ہوگا $\frac{L}{2} = \frac{L}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right]$ ۔

اگر $100 = 100$ اور $n = 3$ تو جدولوں کی مدد سے ثابت کرو کہ طول تقریباً ۳ و ۲ فٹ ہوگا۔

۱۲۔ ایک جہاز کو پانی میں اتارنے کے لئے اس کے پچھلے حصہ سے ایک زنجیر انتصاباً لٹکی ہوئی زمین تک پہنچتی ہے اور رسی کا باقی حصہ جہاز کی مخالف سمت میں ۸۰ گز کے فاصلہ تک

زمین پر پڑا ہے۔ اس کے دوسرے سرے کے ساتھ ایک وزنی لنگر بند ہے جس کو پلانے کے لئے ۲۵ ٹن کی افقی قوت درکار ہوتی ہے زنجیر کا انتصابی حصہ ۵۰ فٹ لمبا ہے۔ پتاؤ کو زنجیر کا وزن فی فٹ کیا ہونا چاہیے کہ جب جہاز کی متوازی الافقی حرکت سے کل زنجیر زمین پر سے اٹھ آئے تو تباؤ لنگر کو پہنچ سکنے کے لئے عین کافی ہو۔

[۶۸۶۶ پونڈ]

۱۳۔ ایک کشتی کو ایک ۲۰ فٹ لمبی یکساں زنجیر کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے۔ زنجیر کا ایک سر کشتی کے پچھلے حصہ کے نقطہ بے اور دوسرے سرے کو ایک گھبے کی چوٹی (اسے) جو بے ۱۲ فٹ اونچی ہے باندھ دیا گیا ہے۔ باقی کی روکشتی پر $\frac{1}{4}$ پونڈ وزن کی قوت لگائی ہے اور زنجیر کا وزن $\frac{1}{4}$ پونڈ فی فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ بے کا فاصلہ زمین سے گزرنے والے انتصابی خط سے ۳۰ فٹ ۱۱ پونڈ ہے۔

۱۴۔ ایک تار ۴۰ اگزی لمبا دو نقطوں کے درمیان ٹک رہا ہے۔ نقطوں کے درمیان فاصلہ افقاً ۱۳۸ اگزی اور انتصافاً ۵۰ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ سب سے پچھلے نقطہ پر تباؤ تقریباً ۴۹۵ پونڈ وزن ہے۔ تار کا وزن فی فٹ نصف پونڈ ہے۔

۱۵۔ ایک رسی جس کا طول l ہے دو نقطوں کے درمیان (جو ایک ہی انتصابی خط میں ہیں) اس طرح ٹک رہی ہے کہ سہارے کے نقطوں پر رسی انتصابی خط کے ساتھ بالترتیب θ اور ϕ کے زاوے بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کہ ایک نقطہ کی بلندی ہو دوسرے نقطہ کے اوپر اور زنجیر کا اس سہارے کے درمیان نہ ہو تو

$$ک جم = \frac{w}{2} = l جم = \frac{w}{2}$$

۱۶۔ طول l والی وزنی زنجیر کا ایک سر ایک نقطہ کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا سر ایک وزنی چھلے کے ساتھ بندھا ہے جو زمین سے گزرنے والی کھردری افقی سلاخ پر پھسل سکتا ہے۔ اگر چھلے کا وزن زنجیر کے وزن کا n گنا ہو تو ثابت کرو کہ اسے چھلے کا بڑے سے بڑا فاصلہ

$$\frac{l}{2} \sqrt{1 + n} \text{ فٹ}$$

جہاں $\frac{1}{r} = \text{سر} (۱ + n)$ نہ رگڑ کی قدر کو تعبیر کرتا ہے۔

۷۔ ایک وزنی کھردری یکسان رسی کا ایک سر ایک نقطہ سے بندھا ہے جس کی بلندی ایک میٹر کے اوپر m ہے۔ رسی کا طول l (حـ ل۔ m) ہے جس سے گرنے والی انتہائی سطح مستوی میں میز پر ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ جب رسی کو میز پر n سے اتنی دور کھینچا جائے جو تعادل کے منافی ہو تو l اس مساوات کو پورا کرے گا

$$y - 2(1 + m) = l - m = 0$$

جہاں نہ رگڑ کی قدر ہے اور l رسی کا طول ہے۔
[جب سے پچھلے نقطہ پر تناؤ میز پر کے طول کے وزن کا مدگنا ہوگا اس لئے $J = m y$ انیر

$$(m + J) = J + (l - y)$$

۸۔ ایک وزنی زنجیر کا کل طول l ہے۔ اس کا ایک سر ایک کھردرے میز پر پڑا ہے اور دوسرا کھردرے فرش پر۔ اس کو اتنا کھینچا گیا ہے جتنا کہ ممکن ہے یعنی تعادل انتہائی ہے اگر میز اور زمین دونوں پر رگڑ کی قدر m ہو اور میز کی بلندی b ہو تو ثابت کرو کہ فرسش پر زنجیر کا طول ہوگا

$$\frac{m}{b} + \left[\frac{b}{2} + \frac{m}{2} \right] - \frac{b}{2}$$

ل $< b + \frac{m}{2}$ سے۔

۱۹۔ ایک زنجیر کا طول $2l$ اور وزن $2w$ ہے اس کا ایک سر A ایک افقی تار کے ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا سر B ایک چکنے حلقہ کے ساتھ بندھا ہے جو تار پر پھسلتا ہے، اولاً A اور B ایک دوسرے پر منطبق ہیں ثابت کرو کہ حلقہ کو تار کے اوپر اتنا کھینچنے سے کہ A پر زنجیر کا میلان خط انتہائی کے ساتھ $2m$ کا زاویہ بنائے کام ہوگا

$$l [1 - 2m + (1 + 2m)]$$

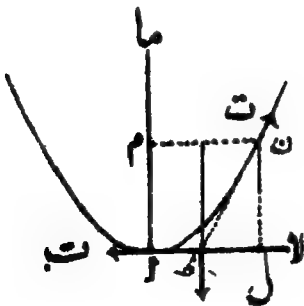
[دھڑ ۸۹ اور دھڑ ۸۸ کی مشق ۲ کو استعمال کرو]

۲۰۔ ایک یکساں رسی کا طول ۱۸ فٹ اور وزن ۳ پونڈ ہے۔ اس کے سرے ایک سلاخ کے سروں کے ساتھ بند ہے جس سلاخ کا وزن ۲ پونڈ ہے۔ یہ دونوں ایک چکنے افقی میز پر ساتھ پڑے ہیں۔ جب رسی کے وسطی نقطہ کو میز کے اوپر سے بلندی تک اٹھایا جائے تو میز پر کا دباؤ صفر ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ کا طول ۱۶ فٹ ۲ کو فٹ ہے اور اٹھانے میں جو کام انجام ہوتا ہے وہ $\frac{1}{4}$ و $(15 + 4\sqrt{2})$ فٹ پونڈ ہے۔

۲۱۔ ایک تاریکی کا کسی معلوم شے کا بنا ہوا ہے اور اس کا طول دو مساوی الارتفاع کھیل کے سروں کے ساتھ جن کا درمیانی فاصلہ د ہے بندھا ہے۔ اگر سرے کے نقطوں پر تار کے تناؤ کم سے کم ہوں تو ثابت کرو کہ $l = \frac{d}{2}$ جہاں l مساوات کے مسئلہ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۲۔ ایک رسی جاؤ براض کے زیر عمل لٹک رہی ہے اس کو اس طرح وزنی بنایا گیا ہے کہ اس کبھر جزو کا وزن اس جزو کے افقی نقل کے طول کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ رسی مکائی کی شکل میں لٹکتی ہے۔

فرض کرو کہ رسی کے کسی نقطہ پر تناؤ T ہے اور رسی کے سب سے نیچے نقطہ پر تناؤ T_0 ہے۔ T پر اس T_0 سے گزرنے والے افقی اور انتصافی خطوں پر T سے عمود l اور n م نکالو۔



چونکہ رسی l کے ہر جزو کا وزن n پر اس کے نقل کے متناسب ہے اس لئے ظاہر ہے کہ l کے مرکز نقل کا فصل n کے مرکز نقل کے فصل کے مساوی ہے یعنی l کے مرکز نقل میں سے گزرنے والا انتصافی خط n کی یعنی l کی

تصنیف کرتا ہے۔ نیز چونکہ اس انتصابی خط کو لازماً ط میں سے بھی گزرنا چاہیئے

$$\text{اس لئے} \quad \text{ط} = \text{ط} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$$

اب ن ط ل قوس ان کے لئے قوتوں کا مثلث ہے۔
اس لئے اگرستی کے افقی فصل کے فی اکائی طول کا وزن د ہو تو

$$\frac{\text{ن}}{\text{ط}} = \frac{\text{ت}}{\text{ط}} = \frac{\text{ن}}{\text{ط}} = \frac{\text{ن}}{\text{ط}}$$

اگر ت برسی کے افقی فصل کے طول ج کا وزن ہو تو

$$\frac{\text{و ج}}{\text{ط}} = \frac{\text{و ج}}{\text{ط}} = \frac{\text{و ج}}{\text{ط}} \text{ یعنی } \text{و ج} = ۲ \text{ ج}$$

یعنی مخنی و تر خاص ج کا مکانی ہے۔

$$\text{نیز ت} = \frac{\text{و ج}}{\text{ط}} \times \text{ن ط} = \frac{\text{و ج}}{\text{ط}} \times \frac{\text{و ج}}{\text{ط}} = \frac{\text{و ج}^2}{\text{ط}^2}$$

$$\frac{\text{و ج}}{\text{ط}} = \frac{\text{و ج}}{\text{ط}} = \frac{\text{و ج}}{\text{ط}}$$

چونکہ ط میں سے گزرنے والا انتصابی خط م ن کی تصنیف کرتا ہے اس لئے
یہ خط مستقیم ان کی بھی تصنیف کرے گا۔ پس مخنی ایسا ہے کہ اس کے دو ماسوں کے نقطہ
تقاطع میں گزرنے والا محور کے متوازی خط و تر تاس کی تصنیف کرتا ہے اور یہ مکانی
کی ایک اساسی خاصیت ہے۔ لہذا بغیر کسی قسم کے تحلیلی طریقہ کو استعمال کرنے کے یہ ظاہر
ہے کہ مخنی مکانی ہے۔

۲۵۵۔ جب زنجیر کو بہت زور سے کھینچا جائے تو یہ بالآخر قریب کے درجہ اول تک
مکانی بن جاتا ہے۔

چونکہ ج برسی کے اس حصہ کا طول ہوتا ہے جس کا وزن سب سے بچلے نقطہ پر کے
تناؤ کے مساوی ہو اس لئے ج بہت بڑا ہو گا۔

زنجیرہ کی مسادات جب کہ اس کے سب سے پہلے نقطہ ج کو مبداء مانا جائے یہ ہوتی ہے

$$..... + \frac{L}{J_1} \times 2 + \frac{L}{J_2} \times 2 + 2 \left] \frac{J}{2} = \left[\frac{L}{J_1} + \frac{L}{J_2} \right] \frac{J}{2} = J + J$$

مسئلہ قوت مکانی مد سے

$$..... + \frac{L}{J_{22}} + \frac{L}{J_2} + J =$$

$$..... + \frac{L}{J_{12}} + L = J, 2$$

جب ج کو بہت بڑا بنایا جائے تو زنجیرہ کی شکل تقرب کے پیلو درجہ تک مکانی لا = ۲ ج، ما ہو جاتی ہے۔ ایک دوسرے نقطہ نظر سے بھی ہمیں اسی نتیجہ کی توقع کرنی چاہیے تھی۔ کیونکہ جب زنجیرہ کو بہت زور سے کھینچا جائے تو اس کا میلان افق کے ساتھ بہت چھوٹا ہو جاتا ہے اس لئے اس کے کسی جزو پر کا بوجھ جو اس جزو کے طول کے متناسب ہے تقریباً اس جزو کے افقی ظل کے طول کے متناسب ہوگا۔ اس لئے دفعہ ہذا کا مسئلہ تقریباً دفعہ قبل کا مسئلہ بن جاتا ہے۔

۲۵۶۔ معلق پل۔ معلق پل کی صورت میں دو زنجیریں اس طرح لٹکتی ہوتی ہیں کہ وہ ایک

دوسرے کے متوازی ہوتی ہیں اور ان کے سروں کو ثابت سہاروں سے وابستہ کر دیا جاتا ہے ان زنجیروں کے مختلف نقطوں سے دیگر زنجیریں یا سلاخیں لٹکی ہوتی ہیں جو پل کے وزن کو سنبھالے رہتی ہیں۔ یہ سلاخیں عموماً اس طرح لگی ہوتی ہیں کہ ان کے درمیان افقی فاصلے ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

زنجیروں اور سلاخوں کے وزن کو پل کے وزن کے مقابلہ میں نظر انداز کیا جاسکتا ہے اس طرح ہم سلاخوں پر کے بوجھ کو پل کے مساوی حصوں کے وزن کے برابر تصور کر سکتے ہیں۔

لئے ہیں دفعہ ۲۵ کی صورت حاصل ہوتی ہے لہذا معلق پل کی زنجیر کی
کی شکل سے ملتی ہے سہارے والی سلاخوں کے درمیانی فاصلے اور
زنجیروں کے وزن جس قدر کم ہوں گے اتنا ہی اس کی شکل مکافی کے

۵۔ پل معلق پل کا کل وزن ۲۰۰ ٹن ہے جو اس کے تمام افقی فصل چپوں کا طول ۵۰ فٹ
پر تقسیم ہے اور اس کی بلندی ۲۰ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ زنجیر کے سب سے نیچے
سے کے مقاموں پر تناؤ بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ ۲۱۲ ٹن ہیں۔

ایک زنجیر کا فصل ۳۰ فٹ ہے اور سہارے کے مقاموں سے سب سے نیچے
فٹ ہے وزن جو فصل پر مساوی طور پر منقسم ہے فی فٹ نصف ٹن کے
ابھ کر کہ ہر ایک سرے پر کا تناؤ ۵۳۷۵ و ۹ ٹن وزن ہے۔

۶۔ زنجیر کا طول اور وزن وہی ہے، اس کو دو نقطوں A اور B سے جو افقی
ہے کھینچ کر لٹکایا گیا ہے زنجیر کے وسطی نقطہ C کی گہرائی امتصافاً خط A B
۱۔ ثابت کرو کہ زنجیر کا تناؤ تقریباً $\frac{1}{2}$ ہے۔

۷۔ امتصافاً کھینچو جن میں سے ہر ایک $\frac{1}{2}$ کو تعبیر کرے A اور B دونوں میں
A اور B پر کے عماسوں کے حوازی کھینچو۔ تب A و A' اور B و
B' ج پر کے تناؤ T، T' اور T'' کو تعبیر کر کے ہیں

$$W_B = 2 \times T + T'$$

$$T + T' = 2T'' + \frac{W}{2}$$

$$\frac{T + T'}{2} = \frac{W}{2} + \frac{1}{2} \text{ ک زنجیر کے خواص کی رو سے}$$

$$\text{نے سے } T + T' = 2T'' + (T + T') \left(\frac{W}{2} \right) + W$$

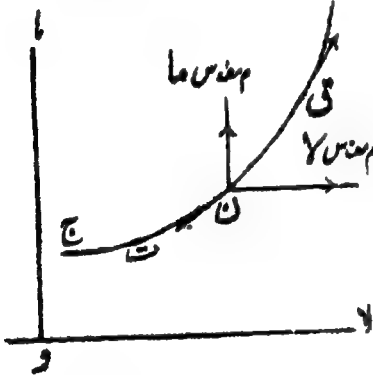
T = T'' اس لئے مساوات بالا سے حاصل ہوتا ہے

$$- = \frac{دک}{ل} ت + \frac{۲ دک}{ل} + ۲$$

$$بینی ت = \frac{ول}{۸س} + \frac{ک و}{۲ل} - \frac{ول}{۸س} \text{ تقریباً}$$

کیونکہ بہت چھوٹا ہے۔

۲۵۷۔ قوتوں کے ایک معلوم نظام کے زیر عمل رسی کے تعادل کی عام شرائط معلوم کرو۔



فرض کرو کہ رسی ایک ہی سطح مستوی میں ہے جس میں قوتیں عمل کرتی ہیں۔

فرض کرو کہ رسی کا کوئی

نقطہ (لا، ما) ہے جس کا توسی فاصلہ

ایک ثابت نقطہ ج سے ہے۔

فرض کرو کہ ق کوئی اور نقطہ ن کے

بہت قریب واقع ہے اس لئے

ن ق = معتس س اس لئے

نقطہ ق کے محدود لا + معتس لا، ما + معتس ما ہیں۔

فرض کرو کہ ن اور قی کے تناؤات اور ت + معتس ت ہیں

فرض کرو کہ ن پر نی کا نی کیفیت عمل کرنے والی قوتیں لا اور ما ہیں، لہذا

جزو ن ق پر محوروں کے متوازی عمل کرنے والی قوتیں بالترتیب م معتس س، لا

اور م معتس س، ما ہیں جہاں م کی اکائی طول کیفیت ہے۔

[حقیقت میں قوت کے یا جزائے ترکیبی ن پر عمل نہیں کرتے بلکہ ن اور ق کے درمیان

مختلف نقطوں پر عمل کرتے ہیں مگر چونکہ ہم ن ق کو بہت چھوٹا کر رہے ہیں اس لئے

یہ کہنے میں کو وہ ن پر عمل کرتے ہیں کسی نقطہ کا اندیشہ نہیں ہے]

ن پر کے تناؤ کو محور لا کی سمت میں تحلیل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ت ف

اور یہ مریخا فوس س کا کوئی تفاعل ف (س) ہے کیونکہ اس کی قیمت ن کے مقام

پر موقوف ہے۔

اسی طرح سے قی کے تناؤ کا جزو تحلیل محور ولا کی سمت میں
 $= \text{ف} (\text{س} + \text{مف س}) = \text{ت} (\text{س}) + \text{مف س} \times \text{ت} (\text{س}) + \dots$ ٹیلر کے مسئلہ سے

$= \text{ت} (\text{ف س}) + \text{مف س} (\text{ف س}) (\text{ت ف س}) + \dots$

ف س ن قی پر ولا کی سمت میں عمل کرنے والی قوتوں کو مساوی کرنے سے

$\text{ت} (\text{ف س}) = \text{م} \times \text{مف س} \times \text{لا} + \text{ت} (\text{ف س}) + \text{مف س} \times (\text{ف س}) (\text{ت ف س}) + \dots$

+ مف س کے مربیع اور بالاتر قوتوں والی رقیبیں

مف س پر تقسیم کرنے اور اختصار کرنے سے اور مف س کو بہت چھوٹا بنانے سے یعنی
 قی کون کے بہت قریب لانے سے

$\text{ف س} (\text{ت ف س}) + \text{م لا} = \dots = (1)$

اسی طرح سے قوتوں کو محدودا کے متوازی تحلیل کرنے سے

$\text{ف س} (\text{ت ف س}) + \text{م ما} = \dots$

اگر قوتیں لا اور ما اور نیز کیفیت م کی قیمتیں رسی کے ہر ایک نقطہ کے لئے معلوم ہوں

تو ان دو مساواتوں سے کسی نقطہ پر ت کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

جنہیں رسی کی شکل کے لئے تقریقی مساوات معلوم ہو جاتی ہے۔

۲۵۸۔ مشتق ۱۔ بعض کر کے رسی یکساں ہے اور دفعہ ۱۵۱ کی مانند جا ذہ ارض کے زیر عمل

آزادانہ ملک رہی ہے لہذا اگر محور متوازی الف ن ا د اعتدالی ہوں تو لا = اور ما = ج

اس لئے مساوات (۱) اور (۲) یکساں اختیار کرتی ہیں

$\text{ف س} (\text{ت ف س}) = \dots$ اور $\text{ف س} (\text{ت ف س}) = \text{م ج}$

پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے $\text{ت ف س} = \text{مستقل} = \text{م ج گ}$ (فرض ہو کہ) یعنی

بسی کے تمام طول میں افقی تناؤ مستقل ہے۔

دوسری مساوات میں ت کی قیمت مندرجہ کرنے سے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} (\text{گ فرلا}) = ۱$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{فرس}} \times \frac{۱}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{فرلا} (\text{فرلا})}$$

دفعہ ۲۵۱ کی تفریق مساوات بھی یہی ہے۔

مشق ۲۔ فرض کرو کہ رسی کو اس طرح وزن بنایا گیا ہے کہ ہر جزو کا وزن افقی نل کے طول کے متناسب ہے (جیسا کہ معلق پل کی صورت میں ہوتا ہے)

تب ۴ = ۰، ما مفس = - - ل مفس
اس لئے مساوات (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} (\text{ت فرس}) = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} (\text{ت فرس}) = \text{ل م فرس}$$

$$\text{ت فرس} = \text{فرلا} = \text{م فرس} (\text{گ فرلا}) = \text{ل م فرس}$$

$$\text{یعنی گ فرلا} = \text{ل م}$$

تکمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۲۵۱ کے مطابق معنی مکانی ہے مگر رسی کے اٹائی طول کی کمیت کسی طرح بدلے تو بھی اسی طرح حاصل ہو سکتا ہے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} (\text{گ فرلا}) = \text{م ج}$$

اگر م جو مفس کے مقام کی رقوم میں معلوم ہو تو اس مساوات سے معنی کی شکل حاصل ہوتی ہے نیز اگر رسی کے معنی کی شکل معلوم ہو تو اسی مساوات سے کمیت کا تفریحی معلوم ہو سکتا ہے۔

۲۵۹۔ یکساں طاقت کا نتیجہ۔ فرض کرو کہ ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ نتیجہ کی مساوات کیا ہوگی اگر رسی کی کمیت اس کے ہر ایک نقطہ پر اس کے تناؤ کے متناسب

ہو۔ اس صورت میں رسی کی طاقت ہر نقطہ پر اس قوت کے تناسب ہوتی ہے جو اسے
برداشت کرنی پڑتی ہے۔

اس صورت میں $\frac{1}{2} =$ اور $\frac{1}{2} =$ ج اور $\frac{1}{2} =$ ت یعنی $\frac{1}{2} =$ ت
جہاں $\frac{1}{2}$ کوئی مستقل ہے۔

تب دفعہ ۲۵ کی مساواتیں ہو جاتی ہیں

ت $\frac{1}{2} =$ گ اور $\frac{1}{2} =$ (ت $\frac{1}{2}$) = ت ج $\frac{1}{2} =$ (۱۱۰)
ت کی قیمت مندرجہ کرنے سے

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{ ج } \frac{1}{2}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ج } \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{ ج } [1 + \left(\frac{1}{2} \right)]$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)}$$

تکمل کرنے سے $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ج } = \frac{1}{2} \text{ ج } + \frac{1}{2}$

اگر ہم $\frac{1}{2}$ کے سب سے پہلے نقطہ کی تبدیلیوں کو $\frac{1}{2} =$ جبکہ $\frac{1}{2} =$ اور اس لئے $\frac{1}{2} =$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ج } = \frac{1}{2} \text{ ج } \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{ ج } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ج } \frac{1}{2}$$

تکمل کرنے سے $\frac{1}{2} =$ اور $\frac{1}{2} =$ اور $\frac{1}{2} =$ اور $\frac{1}{2} =$

تکمل کا مستقل صفر ہے کیونکہ $\frac{1}{2}$ ایک ساتھ صفر ہوتے ہیں

اس معنی کے دو انتصابی متقارب ہیں $\lambda = \pm \frac{\pi}{p}$

اسی کی کیت کی تبدیلی کا قانون :-

$$(1) \text{ سے } t = \frac{g}{\omega} = \frac{g}{\omega} + 1 \left(\frac{\omega}{\omega} \right) = \frac{g}{\omega} \text{ قط } \frac{\omega}{\omega}$$

اس لئے $s = \omega$ کو $s = \left(\frac{\omega}{\omega} + \frac{\pi}{p} \right)$ اگر s کو s سے نچلے نقطہ سے ناپا جائے۔

$$\therefore \omega + \omega = \frac{\omega}{\omega} = \frac{\omega}{\omega} + \frac{\pi}{p} + \frac{\omega}{\omega} = \left(\frac{\omega}{\omega} + \frac{\pi}{p} \right) \text{ مم } \frac{\omega}{\omega} = \frac{\omega}{\omega} \text{ قط } \frac{\omega}{\omega}$$

$$t = \frac{g}{\omega} = \left(\frac{\omega}{\omega} + \frac{\pi}{p} \right) \text{ مم } \frac{\omega}{\omega}$$

اس لئے کسی لفظ n پر جس کا فاصلہ s سے نچلے نقطہ سے s ہے کیت فی اکائی طول ایسے بنتی ہے جیسے

$$\frac{1}{p} \left(\frac{\omega}{\omega} + \frac{\pi}{p} \right) \text{ یعنی ایسے بنتی ہے جیسے } \text{جز } \left(\frac{\omega}{\omega} \right)$$

۲۶۰۔ اگر سی ایک ہی سطح مستوی میں واقع نہ ہو اور توڑوں کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی نہ ہوں تو قاعدہ کی مساواتیں دفعہ ۲۵ کے مطابق حسب ذیل ہوں گی

$$\frac{f}{\omega} = \left(\frac{\omega}{\omega} \right) + m = \frac{f}{\omega}$$

$$\frac{f}{\omega} = \left(\frac{\omega}{\omega} \right) + m = \frac{f}{\omega}$$

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرس}} - \left(\frac{\text{فت}}{\text{فرس}} \right) + \text{م} = \text{ے} =$$

$$(۱) \quad \text{اس تے} \quad \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فت}}{\text{فرس}} + \text{م} = \text{لا} =$$

$$(۲) \quad \text{ت} \quad \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فت}}{\text{فرس}} + \text{م} = \text{ما} =$$

$$(۳) \quad \text{ت} \quad \frac{\text{فر۱ی}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر۱ی}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فت}}{\text{فرس}} + \text{م} = \text{ے} =$$

ان مساواتوں کو بالترتیب $\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}}$ ، $\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}}$ ، $\frac{\text{فر۱ی}}{\text{فرس}}$ سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$\text{اور مائلات} \quad \left(\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \right)^2 + \left(\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \right)^2 + \left(\frac{\text{فر۱ی}}{\text{فرس}} \right)^2 = ۱$$

$$\text{اور بناؤ علیہ} \quad \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فر۱ی}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر۱ی}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر۱ی}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فر۱ی}}{\text{فرس}} =$$

$$= \frac{۱}{۳} \left[\left(\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \right)^2 + \left(\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \right)^2 + \left(\frac{\text{فر۱ی}}{\text{فرس}} \right)^2 \right] =$$

کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فت}}{\text{فرس}} + \text{م} (\text{لا} \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \text{ما} \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \text{ے} \frac{\text{فر۱ی}}{\text{فرس}}) = \text{ے} =$$

$$\text{ت} = \text{گ} - \text{م} (\text{لا} \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \text{ما} \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \text{ے} \frac{\text{فر۱ی}}{\text{فرس}})$$

پس اگر بیرونی قوتیں ایسی ہوں جن کا ماس کی سمت کوئی جزو ترکیبی نہ ہو تو تناؤ مستقل ہوگا۔

فیر اگر ہم مساوات (۱) (۲) اور (۳) سے ت اور $\frac{\text{فت}}{\text{فرس}}$ کو ملاحظہ کر دیں تو

$$\begin{aligned} & \text{لا} \left[\frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} - \frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \right] + \text{ما} \left[\frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} - \frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \right] \\ & + \text{ے} \left[\frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} - \frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \right] = 0 \\ & \text{یعنی لا + ما + ے = 0} \end{aligned}$$

جہاں (لا، ما، ے) اس منحنی کے ثنائی عماد (Binormal) کی سمتیہ جیب التمام ہیں جس میں رسمی واقع ہے۔

اس لئے کسی نقطہ ن پر جو حاصل بیرونی قوت عمل کرتی ہے اس کی سمت ن پر کے ثنائی عماد کی سمت پر علی القوا تم ہوتی ہے۔

اگر ہم (۱) اور (۲) کو $\frac{\text{فرا}}{\text{فرس}}$ ، $\frac{\text{فرا}}{\text{فرس}}$ ، $\frac{\text{فرا}}{\text{فرس}}$ سے بالترتیب ضرب دے کر جمع کریں تو

$$\frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \text{م} = 0$$

جہاں ر انحناء کا نصف قطر ہے اور م بیرونی قوت کا جزو تھیلی ہے صدر عماد کی سمت میں جس کی سمتیہ جیب التمام ہیں

$\frac{\text{فرا}}{\text{فرس}}$ ، $\frac{\text{فرا}}{\text{فرس}}$ ، $\frac{\text{فرا}}{\text{فرس}}$ دلفہ ہذا کی مساواتوں کو ایک دفعہ اور تکمیل کرنے سے

$$\text{ت} \frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} + \text{ل} \text{لا فرس} = \text{ا}$$

$$\text{ت} \frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} + \text{م} \text{ما فرس} = \text{ب}$$

$$\text{ت} \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} + \text{ل} \text{ے فرس} = \text{ج}$$

اس لئے اُس منحنی کی مساداتیں جس میں رسی واقع ہے یہ ہیں

$$\frac{1 - \text{کم لا فرس}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}} = \frac{\text{ب} - \text{کم ما فرس}}{\frac{\text{فرا}}{\text{فرس}}} = \frac{\text{ج} - \text{کم مے فرس}}{\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}}$$

جہاں ۱، ب، ج مستقل ہیں۔

۲۶۱۔ رسی جریک چکنی سطح پر معلومہ قوتوں کے زیر عمل پڑی ہے۔
فرض کرو کہ رسی کے کسی نقطہ پر سطح کا دباؤ سر ہے اور اس نقطہ پر سطح کا جو عماد
اُذر کی طرف کھینچا جائے اس کی سمتی جیب التمام (ل، م، ن) ہیں۔ تب تعادل کی
مساداتیں ہیں

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} - (\text{ت} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}) + \text{م لا} - \text{س ل} = ۰ \quad (۱)$$

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} - (\text{ت} \frac{\text{فرا}}{\text{فرس}}) + \text{م ما} - \text{س م} = ۰ \quad (۲)$$

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} - (\text{ت} \frac{\text{فری}}{\text{فرس}}) + \text{م مے} - \text{س ن} = ۰ \quad (۳)$$

یہ سطح کی مسادات معلوم ہے جو فرض کرو یہ ہے

$$\text{ت} (ل، م، ن) = ۰ \quad (۴)$$

$$\text{چونکہ ل، م، ن} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{م} \frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} + \text{ن} \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \text{ متناسب ہے}$$

$$\frac{\text{جفت فرلا}}{\text{جفت لا} \times \text{فرس}} + \frac{\text{جفت فرا}}{\text{جفت ما} \times \text{فرس}} + \frac{\text{جفت فری}}{\text{جفت مے} \times \text{فرس}}$$

کے لہذا وہ صفر کے مساوی ہے۔

مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) کو دفعہ ۲۹۰ کی طرح بالترتیب $\frac{فرا}{فرس}$ ، $\frac{فرا}{فرس}$ ، $\frac{فری}{فرس}$ سے ضرب دینے اور جمع کر کے تکمیل کرنے سے

$$ت = گ - م (لا فرا + ما فرا + مے فری) \dots (۵)$$

گ۔ قد اگر بیرونی قوتیں ذرا تفاعل قد کے ذریعہ دی ہوئی ہوں۔

نیز اگر مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) میں سے ہم $\frac{فرا}{فرس}$ اور $\frac{فری}{فرس}$ کو سا قلم کر دیں تو

$$(ت \frac{فرا}{فرس} + م لا) (\frac{فرا}{فرس} - ن) - \frac{فری}{فرس} م + \dots = \dots$$

ت کی مندرجہ بالا قیمت مندرج کرنے سے ہمیں مساوات (۴) کی مدد سے اس منحنی کی مساوات معلوم ہو سکتی ہے جو سی سے بنتا ہے۔

$$۲۹۲ - اگر دفعہ اقبل میں سی پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں تو لا = ما = مے =$$

اور اس لئے (۵) سے ت = مستقل = گ

اس لئے (۱)، (۲) اور (۳) سے

$$\frac{فرا}{فرس} = \frac{فرا}{فرس} = \frac{فری}{فرس}$$

$$\frac{لا}{ن} = \frac{م}{م} = \frac{ل}{ل}$$

$$\frac{فرا}{فرس} = \frac{فرا}{فرس} = \frac{فری}{فرس}$$

$$\frac{جفت}{جفت} = \frac{جفت}{جفت} = \frac{جفت}{جفت}$$

یعنی

اس لئے بھی کا منحنی ایسا ہے کہ ہر نقطہ پر اس کا صد عا د سطح کے عا د پر منطبق ہوتا ہے یعنی سی کے ہر نقطہ پر کاٹمی مستوی سطح کے عا د میں سے گزرتا ہے۔ اس قسم کے منحنی

کوسط کا تقسیم ارضی منحنی کہتے ہیں اور یہ ایسا ہوتا ہے کہ اس کا کوئی جزو نہ فی اسط پر نہ اور ق کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ یکساں طاقت کے زخیرو میں ثابت کردہ

۱ = وسا ، س = ویک { فسا + مس سا } ، جم سا جز سا = ۱

اور = ۱ جزو ۱ جہاں راغنا کا نفت قطر ہے اور سامحور لا کے ساتھ ماس کا میلان ہے۔

اس لئے ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر فی اکائی طول کی کمیت ایسے بدلتی ہے جیسے اس

نقطہ پر انحناء کا نصف قطر

۲۔ یکسان طاف کے ذخیرہ کا فصل ۵۰ فٹ اور اس کا کل وزن ۶۰۰ پونڈ ہے۔ مادہ کی کثافت ۸۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہے۔ اور اس کی تراش پر پی مرلے ایچ سٹاؤ ۲۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے مٹھنی کی مساوات معلوم کرو۔ اور سب سے نیچے اور اوپر کے نقطہ پر اس کی تراشوں کے رتبے معلوم کرو۔

$$\left[\frac{1}{36} = \frac{1}{\text{لک}} , \frac{0}{36} , 15 \text{ م } \frac{25}{36} , \text{ اور } 15 \text{ ق } \frac{25}{36} \text{ مرلے ایچ } \right]$$

۳۔ اگر ایک سی کے ہر ایک نقطہ پر کثافت ایسے بڑے جیسے اس معنی کا نصف قطر انفرادی یہ لٹک رہی ہو تو ثابت کر دو کہ معنی یکساں حالات کا ذخیرہ ہوگا۔

م۔ ثابت کر دو کہ اگر متعلق پل کی سلاخوں کے وزن کو بھی ملحوظ رکھا جائے لیکن باقی پل کے وزن کو نظر انداز کر دیا جائے تو متعلق پل کے پھٹنے کی شکل و ذخیرہ کا قایم ظل ہوگی۔ سلاخوں کو انتصالی اور ایک دوسرے متساوی الفصل فرض کیا جائے۔

۵۔ ایک رسی کی کثافت کسی نقطہ پر $\frac{1}{J}$ قسط $\frac{1}{J}$ ہے جہاں $\frac{1}{J}$ تبتناؤ ہے رسی

پچھلے نقطہ پر اور اس فاصلہ پر متغیر لفظ کا اس نقطہ سے۔ روس کے مغربی کی شکل معلوم کرو۔

[نصف قطر کا دائرہ]

۷۔ ایک غیر متجانس رسی جس کی ترامن کا رقبہ کسی نقطہ پر اس کے تناؤ کے بالعکس تناسب کے جاذبہ ارض کے زیر عمل لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی شکل ایک مکافاتی کی قوس ہے جس کا محور انتصابی ہے۔

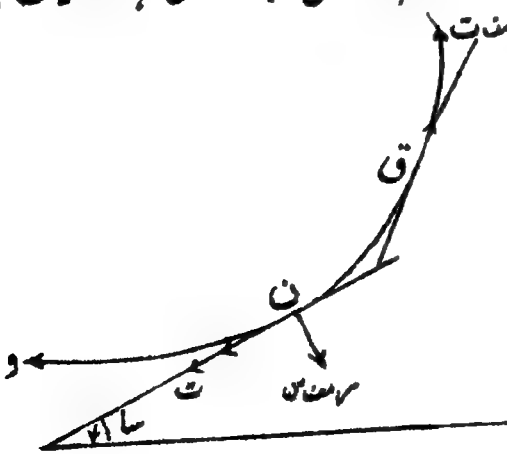
۸۔ ایک یکساں رسی مکافاتی کی شکل میں لٹک رہی ہے جس کا ہر حصہ ایک رسی ہے۔ اس پر عمل کرنے والی قوتیں ہر نقطہ پر عماد کی سمت میں ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر کی قوت بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے (س ن) $\frac{1}{2}$ اور تناؤ مستقل ہے۔

۹۔ ایک استداد پذیر رسی جو ایک چکے مستوی سفینی پر ساکن ہے۔ فرض کرو کہ ن ق رسی کا کوئی جزو نصف س ہے جہاں قوس و ن کا طول س ہے اور و سفینی پر کوئی ثابت نقطہ ہے۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے تناؤ بالترتیب ت اور ت + نصف ت ہیں اور ان پر کے عماس کسی ثابت خط کے ساتھ زاوے سا اور سا + نصف سا بناتے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ سفینی کا جو تعامل رسی کے جزو ن ق پر عمل کرتا ہے وہ فی کائی طول س کے مساوی ہے پس اس جزو پر کا تعامل س نصف س ہے اور یہ ن پر کے عماد کی سمت میں باہر کی سمت ت + نصف ت طرف عمل کرتا ہے۔

ن پر کے عماس اور عماد کی سمتوں میں تحلیل کرنے سے



(ت + نصف ت) ×

جم نصف سا = ت

(ت + نصف ت) جب نصف سا = س نصف س

اس لئے مف سا کی درجہ اول کی قیمتوں تک جم مف سا = ۱ اور جب مف سا = مف سا

ت = مف ت = ت یعنی مف ت = (۱)

ت مف سا = مف س جوائنٹائی صورت میں ہو جاتا ہے

ت = س $\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}$ = س \times ر \times جواں نقطہ ن پر نصف قطر انحناء کی قیمت ہے۔

(۱) سے حاصل ہوتا ہے ت = مستقل
اس لئے ہلکی رسی کا تناؤ جو ایک چکنے منحنی پر ساکن ہو ہر جگہ مستقل ہوتا ہے۔
نیز (۲) سے حاصل ہوتا ہے س \times ∞ $\frac{1}{r}$ یعنی عمادی تعادل + یہ بدلتا ہے جیسے منحنی کا انحناء۔

۲۶۴۔ وزنی رسی جو ایک چکنے منحنی پر ساکن ہے۔
اگر وہ خط جس سے سانا یا جائے افقی ہو اور اسے لا کا محور مانا جائے تو ہمیں
دفعہ ماقبل کی قوتوں کے علاوہ ن پر عمل کرنے والی انتصابی قوت و مف س کو بھی
شریک کرنا پڑے گا۔

اس لئے دفعہ ماقبل کی مساواتوں کی بجائے ہمیں ذیل کی مساواتیں ملیں گی

(ت + مف ت) جم مف سا = ت + و مف س \times جب سا

اور (ت + مف ت) جب مف سا = مف س + و مف س \times جم سا
ان سے حسب سابق حاصل ہوتا ہے

مف ت = و مف س \times جب سا = و مف سا (۱)

ت $\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}$ = س + و جم سا (۲)

(۱) سے حاصل ہوتا ہے ت = گ + و اگر و کو مستقل فرض کیا جائے۔

اس لئے اگر تسم اور تسم تناؤ ہوں ان نقطوں پر جن کے معین ما اور لم ہیں تو

$$\text{تسم} - \text{تسم} = \text{و} (\text{لم} - \text{لم})$$

یعنی اگر ایک وزنی یکساں دسی ایک چکے مغنی پر ساکن ہو تو اس کے کسی دو نقطوں پر کے تناؤ کا فرق ان نقطوں کے معینوں کے فرق کے برابر طول والی دسی کے وزن کے سادسی ہوتا ہے۔

جب تسم معلوم ہو جائے تو (۲) سے تقابل مرا حاصل ہوتا ہے

$$\text{سما} = \frac{\text{تسم}}{\text{ر}} - \text{و جم سما}$$

جہاں ر مغنی کا نصف قطر اٹھائے ن ہے۔

۲۶۵ - مشق - ایک یکساں وزنی دسی ایک ایسے چکے زنجیر وار متناکلا بڑی ہے جس کا محور انحصاری اور اس اوپر کی طرف ہے۔ کسی نقطہ پر دباؤ اور دسی کا تناؤ معلوم کرو۔

دفعہ اقبل کی سادائیں اس صورت میں ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} + \text{و جب سما} = \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{سما} = \frac{\text{تسم}}{\text{ر}} + \text{و جم سما} \dots \dots \dots (۲)$$

$$\text{لیکن سما} = \text{سم سما یعنی} \frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} = \dots \dots \text{و جم سما} \frac{\text{جب سما}}{\text{جم سما}}$$

$$\text{تسم} = \dots \dots \frac{\text{و جم سما}}{\text{جم سما}} + \text{و جم سما} [\text{قط سما} - \text{قط سما}]$$

جہاں با آزاد مردوں میں سے کسی ایک سرے پر کے ماسن کا میلان ہے۔

اس لئے (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$r = \frac{\text{ت حجم سا}}{ج} + \text{و حجم سا} = \text{و قسط سا} \times \text{حجم سا}$$

$$= \frac{r_2}{r_1} \times \text{قطب}$$

اس میں سر بالکس ایسے بدلتا ہے جیسے پنجرہ کے مرتب سے نقطہ کے فاصلہ کا مربع۔

۳۲۶۔ ہلکی انگیچ رسی انتہائی تعادل کی حالت میں ایک کھ درے مستوی مخنی پر بغیر کسی برزونی قوت کے عمل کے ساکن ہے ۔

فرض کر دو کرسی کا کوئی جنون Q ہے، نیز فرض کر دو کہ قوس W اس کے مساوی ہے جہاں Q کوئی ثابت نقطہ ہے۔ N ہی، مع S ہے اور N ، Q پر کے S کسی ثابت خط کے ساتھ S اور S مع S کے

زاویے بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ ان نقطوں پر

جہاں اسی منحنی کو چھوڑتی ہے اسی

کے تناؤ اور تپ ہیں،

نیز فرض کرو کہ تفاوت است

پرفالب آجانے کے عین قریب

ہے یعنی جڑوں و ماس

نق کی سمت میں حرکت کرنے

کے عین قریب ہے گویا رگڑ سمت ن ت میں عمل کرتی ہے۔

اگر ن ق پر تعال فی اکائی طول سے ہو تو مجموعی عبادی تعال چون ق ہو

عمل کرتا ہے۔ μ مع س کے مساوی ہوگا اور اس کا نقطہ عمل \bar{X} فرض کیا جائیگا

ہے اور عاسی عمل نہ صرف سزا دیا جاسکتا ہے جو نیک کی سمت میں

عمل کرتا ہے۔

ن پر کے پاس اور ہادی سمت میں فوفوں کو تحلیل کرنے سے

(ت + مع ت) = جم مع سا = ت + مر سا = مع س

اور (ت + مع ت) = جب مع سا = مر مع س

لیکن جم مع سا = ا اور جب مع سا = مع سا جبکہ مع سا کے مربوں کو نظر انداز کیا جائے۔

اس لئے ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} = \text{مر سا} \quad \text{اور} \quad \text{ت} = \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \text{مر}$$

$$\text{مر کو سا قلم کرنے سے} \quad \frac{\text{فرت}}{\text{ت}} = \text{مر فرسا}$$

$$\text{لوک ت} = \text{مر سا} + \text{مستقل}$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ت} = \text{ا و مر سا}$$

اگر سا ایک ایسے خط سے ناپا جائے جو رسی کی اس سمت کے متوازی ہو جہاں یہ منحنی کو چھوڑتی ہے تو ت = ت جبکہ سا = ۔

$$\text{اس لئے} \quad \text{ا} = \text{ت} \quad \text{اور} \quad \text{ت} = \text{ت و مر سا}$$

اس سے کسی نقطہ پر کاتناؤ سرے پر کے تناؤ اور اس زاویہ کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے جو سرے پر کے ماس اور نقطہ ن کے ماس کے درمیان ہوتا ہے۔
۲۶۷۔ بطور عددی مثال کے اس رسی پر غور کرو جو ایک کھجے کے گرد ایک مکمل گردش میں سے لپٹی ہوئی ہے۔ اگر معمولی موج کی رسی کو آہنوس کے کھجے کے گرد لپیٹا جائے تو مر = ۱ تقریباً

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{ت}}{\text{ت}} = \frac{\text{ت}^2}{\text{ت}^2} = \text{تو} = \frac{3.14159}{2\pi} (2\pi \times 18) = 2.3 \text{ تقریباً}$$

یعنی رسی کاتناؤ کھجے کے گرد ایک دفعہ لپٹنے سے تقریباً ۲.۳ گنا چھوٹا ہے اگر اسے دودفعہ

لیٹا جائے تو تناؤ ۳۵ گنا ہو جاتا ہے۔

۲۶۸۔ وزنی رستی۔ اگر رسی وزنی ہو اور اس کا وزن فی اکائی طول \bar{w} ہو اور
سرا کو افقی سمت سے ناپا جائے تو دفعہ ما قبل کی مساواتوں کی بجائے مساویات حاصل ہوتی ہیں

(ت + مع ت) = جم مع سا = ت + مر مع س + \bar{w} مع س جب سا

(ت + مع ت) جب مع سا = مر مع س + \bar{w} مع س جم سا
اس لئے انتہا میں

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} = \text{مر} + \bar{w} \text{ جب سا} \quad (۱)$$

$$\text{ت} = \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \text{مر} + \bar{w} \text{ جم سا} \quad (۲)$$

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} - \text{مر ت} = \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \bar{w} \text{ (جب سا - مر جم سا)}$$

چونکہ ہماری شکل میں س اور سا ایک ساتھ بڑھتے ہیں اس لئے $\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{ر}$

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرسا}} - \text{مر ت} = \bar{w} \text{ (جب سا - مر جم سا)}$$

اس خطی تقرقی مساوات کو حل کرنے کے لئے ہم حسب قاعدہ \bar{w} سے ضرب دیتے ہیں۔ تب تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} - \bar{w} = \text{گ} + \bar{w} \text{ (جب سا - مر جم سا)} \quad \bar{w} - \bar{w} \text{ فرسا}$$

چونکہ ہیں وہ سختی جس پر رسی ساکن ہے معلوم ہے اس لئے ہم سا کو \bar{r} کی
رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اور بائیں طرف کے مکملہ کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

۲۶۹۔ ایک یکساں انکج رسی جس کا طول l ہے انتہائی تناؤ کی حالت میں ایک
نابغ کھردرے اسطوانہ پر جس کا محور افق کے متوازی اور جس کا نصف قطر

اوپر لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ دو انتصابی حصوں میں سے بڑے حصہ کا طول ہے

$$\frac{l - 2\pi}{2\pi + 1} + \frac{2\pi}{2\pi + 1}$$

فرض کرو کہ بڑے اور چھوٹے حصے بالترتیب افقی قطار اب کے سروں (ا) اور ب سے لٹک رہے ہیں اور ان کے طول بالترتیب 2π اور $2\pi + 1$ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ حرکت اسے ب کی طرف شروع ہونے والی ہے۔ تب اگر کسی نقطہ n پر تناؤ t ہو اور l ان کے محاذی مرکز پر زاویہ ط بنتا ہو تو ہمیں دفعہ ما قبل کے مطابق حاصل ہوتا ہے۔

(ت + مف ت) جم مف ط - ت - مر مف س - م ج جم ط مف س = ۰

اور (ت + مف ت) جب مف ط - مر مف س + م ج جب ط مف س = ۰

$$\frac{1}{2} \frac{ت}{ط} = مر س + م ج جم ط$$

$$\frac{ت}{و} = مر - م ج جب ط$$

اس لئے $\frac{ت}{ط} = مر ت = م ج و (جم ط + مر جب ط)$

$$ت و - مر ط = م ج ا (جم ط + مر جب ط) و - مر ط$$

$$م ج و - مر ط = \left[\frac{(1 - مر) (جم ط - مر جب ط)}{2\pi + 1} \right] + گ$$

اگر ط = ۰ تو ت = م ج 2π اور اگر ط = 2π تو ت = م ج $2\pi + 1$

$$م ج 2\pi = م ج 2\pi + 1 - \frac{2\pi}{2\pi + 1} + گ$$

اور مرج نام = و - س = مرج ۱ $\frac{م ۲}{م ۱ + م ۲}$ و - س + گ

اس لئے مرج نام و - س = م ۱ $\frac{م ۲}{م ۱ + م ۲}$ (۱ + و - س)

نیز م ۱ + م ۲ + ل = ل

لہذا نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک واحد قابل حرکت چرخ جس کا وزن و ہے طاقت ق کے ذریعہ جو ایک ہلکی رسی کے ایک سرے پر لگائی گئی ہے ساکن ہے۔ رسی کو چرخ کے نیچے سے گزار کر ایک ثابت نقطہ کے ساتھ باندھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر رسی کے اس حصہ کے محاذی جو چرخ سے مس کرتا ہے مرکز پر زاویہ ذ بنے قی (۱-۲) وسطہ حجم ذ + و ۲ = و

۲۔ ایک ہلکی رسی دو کھردری بیضوں ل اور ب پر سے گزاری گئی ہے جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ہے۔ رسی کے سروں کو ایک وزن ج کے ساتھ باندھا گیا ہے۔ انتہائی تعادل کی حالت میں ل ب کے محاذی ج پر واریہ قائمہ بنتا ہے ثابت کرو کہ ج کا افقی فاصلہ ل ب کے وسطی نقطہ سے و سنر (۳-۲) ہے جہاں و رگز کی قدر ہے۔

۳۔ ایک وزنی ذرہ ایک ہلکی انکج رسی کے حلقہ کے ساتھ بندھا ہے اور رسی کا یہ حلقہ ایک انتصابی سطح مستوی میں ایک ثابت کھردری چرخ پر سے گزرتا ہے۔ اگر رسی کے سیدھے حصے ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ بنائیں تو ثابت کرو کہ انتہائی تعادل کے لئے سمت انتصابی کے ساتھ ان کے میلان مستجاب $\frac{ج ۲}{ج ۱ + ج ۲}$ ہیں۔

۴۔ ایک انتصابی سطح میں چار گول کھردری کھونٹیاں اس طرح لگائی گئی ہیں کہ ان سے ایسا مرج بنتا ہے جس کے اعلا و افقی اور انتصابی ہیں۔ ان بیضوں میں سے ہر ایک بیض پر سے ایک رسی گزرتی ہے جس کے ایک سرے سے وزن و بندھا ہے اور

رسیوں کے دوسرے سروں کو ایک دوسرے کے ساتھ بانہ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو اس گره کے ساتھ بانہا جاسکتا ہے تاکہ یہ گره مربع کے مرکز پر رہے $2\sqrt{3}$ و $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ جبکہ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ہے۔

۵۔ تین مساوی طور پر کھردری میخیں A، B، C جن کی مراشیں گول اور مساوی ہیں ایک ایسے مساوی الاضلاع مثلث A B C کے کونوں پر لگی ہیں کہ B ج افقی خط ہے اور A اس کے اوپر ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ایک رسی کے ایک سرے سے وزن و بانہ کرسی کو ان میخوں پر سے گزارا جائے تو رسی کے دوسرے سرے سے زیادہ سے زیادہ وزن و $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ سہارا جاسکتا ہے جہاں مرکز کی قد ہے۔

۶۔ ایک دائرہ ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح ساکن ہے کہ یہ ایک رسی کی دھب سے کامل طور پر کھردری انتصابی دیوار کو دبا رہا ہے رسی کا ایک سر دیوار کے ایسے نقطے سے جو دائرہ کے اوپر ہے بند ہے۔ اور دوسرے سرے سے وزن قی ٹنگ رہا ہے۔ رسی اور دائرہ کے درمیان رگڑ کی قد ہے۔ اگر دائرہ کا وزن و چو اور رسی اور دیوار کے درمیان زاویہ ط بنے تو ثابت کرو کہ جب دائرہ پھسلنے کے

میں قریب ہو تو ق (۱+جم ط) وسط = و + ۲ ق

۷۔ ایک بے وزن رستی ایک ہی سطح مستوی میں ایک کھردرے کہ پر تنی چوٹی ہے۔ کہ کا نصف قطر A ہے۔ ثابت کرو کہ سطح مستوی کا فاصلہ مرکز سے A جب د سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔ جہاں د رگڑ کا زاویہ ہے۔

۸۔ اگر ایک وزنی یکساں رسی ایک ہی انتصابی مستوی میں بہت سے چکے بنخیزوں کے گرد گزرتی ہو اور اس کے سرے آوازاں ٹکٹے ہوں تو ثابت کرو کہ یہ سرے ایک ہی افقی خط میں واقع ہونگے۔

۹۔ ایک یکساں وزنی رسی ایک چکے مکانی پر جس کا محور انتصابی اور ماسس اوپر کی طرف ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کے سرے و ترغاص کے سروں پر

ثابت کرو کہ اس نقطہ پر جس پر مماس افق کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہے سمتی پر دباؤ

۲ (۲ جم ۳ ذ + جم ۴) ہوگا جہاں و رسی کے اکائی طول کا وزن ہے۔

۱۰۔ ایک کھردرے دائرہ پر جو انتصاباً ثابت ہے ایک رسی پڑی ہے جس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ قائمہ ہے۔ اگر رسی پھسلنے کے عین قریب ہو تو ثابت کرو کہ اس کے اوپر والے سرے کا دائرہ کے بالا نقطہ سے زاویہ قائمہ عد مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{جم (ع + ج - ۵۲)} = \frac{\text{و رسی د}}{\text{جم (ع - ۵۲)}}$$

جہاں ۵ رگڑ کا زاویہ ہے اور ع اس سمت میں تاپا گیا ہے جس میں رسی پھسلتی ہے۔
۱۱۔ ایک یکساں وزن دار رسی ایک ایسے کھردرے انتصابی دائرہ کی اوپر کی سطح پر ساکن ہے جس کا نصف قطر اسے رسی کے سرے آزادانہ لٹک رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر رسی کا ایک سرہ دائرہ کے سب کے اوپر کے نقطہ پر جو بڑے سے بڑا طول جو

$$\text{آزادانہ لٹک سکتا ہے} = \frac{۲ - ۵ + (۱ - ۲) \frac{\pi}{۲}}{۱ + ۲}$$

۱۲۔ ایک وزنی زنجیر کا طول ۱ ہے۔ اس کا کچھ حصہ ایک کھردرے میز پر پڑا ہے اور باقی حصہ اس کے چلنے لگنا شروع کر کے جو نصف قطر کے ایک اسطوانہ کی شکل کا ہے آزادانہ نیچے لٹک رہا ہے اگر میز اور رسی کے درمیان رگڑ کی قدر صفر ہو تو ثابت کرو کہ میز پر چبوتے سے چبوتا طول ہے

$$\frac{۱}{۱ + ۲} \left[۱ - \frac{۴\pi}{۲} \right]$$

۱۳۔ ایک وزنی یکساں زنجیر ایک کھردرے خطہ ویر پر پڑی ہے جس کا محور انتصابی اور داس اوپر کی طرف ہے۔ زنجیر کا ایک سرہ اس پر اور دوسرا قرن پر ہے اگر تعادل

$$\text{انتہائی ہو تو ثابت کرو کہ } (۱ + ۲) = ۳$$

۴۱۔ ایک وزنی یکساں رسی ایک کھردرے ذخیرہ پر پڑی ہے جس کا محور انتصابی ہے اور رأس اوپر کی طرف ہے۔ رگڑ کی قدر $\mu = \frac{3}{4}$ سے معلوم ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر رسی کا ایک سر از ذخیرہ کے رأس پر ہو اور رسی انتہائی تعداد کی حالت میں ہو تو اس کا طول ذخیرہ کے مبدل کے مساوی ہوگا۔

۴۵۔ ایک رسی ایک کھردرے نصف دائرہ پر ساکن ہے اور اس پر ایک مستقل کشش کی قوت اس کے ایک سرے کی طرف عمل کرتی ہے اور رگڑ حرکت کو روکنے کے لئے

عین کافی ہے۔ ثابت کرو کہ رگڑ کی قدر $\mu = \frac{3}{4}$ سے حاصل ہوتی ہے۔

۴۶۔ ایک انکج رسی جس کا طول ۲ ل ہے دو مساوی چکنی سید چرخوں پر سے گزرتی ہے جن کے مرکز ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ ۲ ب ہے۔ اگر چرخوں کا نصف قطر ۱ ہو اور ایک چرخ سے رسی کا جو حصہ مس کرتا ہے اس کے محاذی مرکز پر زاویہ ذب نے قیامت کرو کہ $b + 4$ جم ذ

$$= \text{مم فہ} \quad (\text{ا جب ذ + ل - و ذ}) \quad \text{وک مس فہ}$$

۴۷۔ ایک رسی جس کا طول ل ہے دو چھوٹی کھردری سیخوں پر جو ایک دوسرے سے ۲ فاصلہ پر ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں لٹک رہی ہے۔ اگر رسی کا ایک آزاد سر دوسرے سر سے اتنا نیچے ہو جتنا ممکن ہے تو سیخ پر اس کی سمت کا میلان طہ سمت انتصابی کے ساتھ مساوات $\frac{ل}{۲}$ جب ط وک مم ط = جم ط + جز { (ط - ۲) ط } سے حاصل ہوتا ہے۔

یہ ثابت کرو کہ انتصابی حصوں کے طولوں کی نسبت $\mu = \frac{3}{4}$: و ۲ طہ ہے اور سیخوں کے درمیان رسی کا حصہ ۲ مم ط + وک مم ط ہے۔

۲۷۰۔ مرکزی قوتیں۔ ایک انکج رسی ایک سطح مستوی میں ایسی قوتوں کے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} = \text{ف م جم ف} = \text{ف م فرس} \quad (۳)$$

اور ت = ف م + ل × جب ف = ف م × ر فرس = ف م × ع فرس (۴)
جہاں ع عمود ہے و سے ن پر کے ماس پر اور ل نصف قطر انحناء ہے
(۳) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ت} = \text{ک م ف فر} + \text{ہر} \quad (۵)$$

اور (۳) اور (۴) کو حل کرنے سے

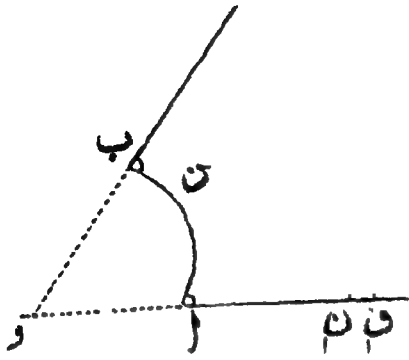
$$\frac{\text{فرت}}{\text{ت}} = \frac{\text{فرع}}{\text{ع}}$$

اور اس لئے ت × ع = مستقل = ب (۶)
یسی کے کسی محدود حصہ کے تعادل پر غور کرنے سے مساوات (۶) آسانی
حاصل ہو سکتی تھی نقطہ و کے گرد ج ن پر عمل کرنے والی سب قوتوں کا معیار اثر
و کے گرد لینے سے ظاہر ہے کہ مرکزی قوتیں سب کی سب نقطہ و میں سے گزرتی ہیں
اور اس لئے ان کا کوئی معیار اثر و کے گرد نہیں ہے۔ اس لئے و کے گرد ن
اور ج پر کے تناؤں کے معیار اثر مساوی ہیں۔ اس لئے

$$\text{ت} \times \text{ع} = \text{ت ب} \times \text{ع} = \text{مستقل} \quad (۷)$$

جہاں ت تناؤ ہے ج پر اور ع عمود ہے و سے ج پر کے ماس پر۔
مساوات (۶) اور (۷) سے تعادل کی سب شرائط حاصل ہوتی ہیں، اولاً فرض کرو کہ
قوت ف معلوم ہے، تب (۵) سے ت حاصل ہوتا ہے اور (۶) میں درج
کرنے سے ہمیں ع اور ر کا مشتق یعنی منحنی کی مساوات ملتی ہے

$$\frac{1}{\text{ع}} = \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}} \left(\frac{\text{فر}}{\text{قوت}} \right)^2$$



فرض کرو کہ رسی کے سیدھے
حصہ کے کسی نقطہ پر تناؤ جس کا حاصل
مرکز و سے لایا ہے ت ہے۔

ت (ت + مت لے ت)

$$+ \frac{م}{۲۲} = ت - ت = ۰$$

$$جس سے حاصل ہوتا ہے - \frac{م}{۲۲} = \frac{ت}{۲۲} - \frac{م}{۲۲}$$

$$اور ت = مت = \frac{م}{۲۲} + ک \dots \dots \dots (۱)$$

چونکہ سرخا لٹا ہی پر دی کا تناؤ صفر ہونا چاہئے ۔ ک = ۰

اس لئے اگر د = ۱ م تو ل پر تناؤ $\frac{م}{۲۲}$ ہوگا۔ اب چونکہ رسی ل پر ایک پکڑنے والے حصے میں سے

گزرتی ہے اس لئے ل پر اس کے تناؤ میں تبدیلی نہیں ہوتی اس لئے ل پر کے مغنی حصہ
پر بھی اس کا تناؤ $\frac{م}{۲۲}$ ہے۔

مغنی حصہ کے لئے دفعہ گزیرنے کی مساوات (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$ت = - \left(\frac{م}{۲۲} \right) فر = \frac{م}{۲۲} + م$$

$$بیز جبر = ل قوت = \frac{م}{۲۲} جس سے م = ۰$$

تب مساوات (۶) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{ع} = \frac{م}{۲۲} = \frac{ل}{۲۲} جہاں ل کوئی مستقل ہے$$

$$\therefore \frac{۱}{ع} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \left(\frac{فر}{قوت} \right) = \frac{۱}{ع} = \frac{۱}{۲}$$

$$\therefore \quad \tau = \frac{F \cdot r}{r^2} = \text{جب } \frac{F}{r} + \text{ج}$$

∴ $r = \text{رجب (ط - ج)}$ جو دائرہ کی مساوات ہے۔

اگر ابتدائی خط ول ہوا۔ وب = ب اور > اوب = و تو
دو نقطے (۱، ۰) اور (ب، ۱) منحنی پر ہیں اس لئے مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$r = \frac{1}{2} \text{ جم ط} + \frac{b - \frac{1}{2} \text{ جم و}}{\text{جب و}}$$

مثالیں

اگر رسیاں قطب سے مرکزی قوت ف کے زیر عمل ذیل کے منحنیوں کی شکلیں اختیار کریں تو
قوت کا قانون معلوم کرو۔

۱۔ $\text{مکا فی جکا ماسکہ قطب ہے}$ $[f \propto r^{-\frac{1}{2}}]$

۲۔ مادی الزدایا لوبی $r = \frac{1}{2} \text{ و ط م و}$ $[f \propto r^{-2}]$

۳۔ $\text{قائم نائہ جکا مرکز قطب}$ $[f \text{ مستقل اور جاذبی}]$

۴۔ اٹیرن $r = \frac{1}{2} \text{ و ط م ط}$ $[f \propto r^{-2}]$

۵۔ ر جم ن ط = ون $[f \propto r^{-2} \text{ اور جاذبی اگر } n < 1]$

۶۔ اگر چند مرکزی قوتوں کے زیر عمل رسی متبادل میں ہو تو رسی کے کسی جزون ق پر حاصل
تقابل و ط کی سمت میں چگا جہاں و قوت کا مرکز ہے اور ط نقطہ تقاطع ہے ن
اور ق پر کے ماسوں کا۔

۷۔ ایک متجانس رسی ایک ایسی مرکزی اندفاعی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو فاصلہ کے
مرتبہ کے بالعکس بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ رسی کی شکل ان دو منحنیوں میں سے ایک ہے

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + \text{قطرہ جم (ط جب م)} \quad \text{یا} \quad \frac{ل}{ر} = ۱ + \text{قطرہ جمز (ط جب م)}$$

۸۔ ایک رسی کا طول لا تھا ہی ہے۔ اس کا ایک سر ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھا ہے رسی ایک چھوٹے چکنے ثابت حلقہ میں سے گزر کر لا تھا ہی تک جاتی ہے اس پر مرکز سے ایک انفرامی قوت جبراً لکس متناسب ہے فاصلہ کی ن میں قوت کے عمل کرتی ہے ثابت کرو کہ رسی کے معنی حصہ کی مساوات ہے

$$۲-۵ = ۳-۵ \text{ جم (ن-۲) ط}$$

اگر ن = ۲ تو ثابت کرو کہ معنی حصہ مساوی الہوا یا لوبھی ہے۔

۹۔ ایک رسی ایک مرکزی انفرامی قوت کے زیر عمل ایک مستوی معنی کی شکل میں ساکن ہے۔ اگر کسی نقطہ پر قوت انخا کے متناسب ہو تو ثابت کرو کہ معنی مکافاتی ہے۔

۲۷۲۔ قابل کھنچاؤ رسیاں۔ قابل کھنچاؤ رسی کے متبادل کی مساواتیں باب ہذا کے گذشتہ حصہ کی طرح بنائی جاتی ہیں رسی کے کسی جزو کا اس جزو کے چپنے ہوئے اور نہ کھینچے ہوئے طولوں کے درمیان فرقہ کے کلیہ کے ذریعہ مربوط ہوتا ہے۔ یہ بات قابل غور ہے کہ وزنی پیکر اور رسی کی کثافت کھنچاؤ کے بعد یکساں نہیں رہتی خواہ وہ کھنچاؤ سے پہلے یکساں ہو۔

۳۷۳۔ ایک یکساں قابل کھنچاؤ رسی کا وزن و اور طبعی طول ل ہے رستی کو ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے اور اس کے دوسرے سرے سے وزن و لٹکایا گیا ہے۔ اگر پچک کی قدر ل ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا کل کھنچاؤ $\left[\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳}\right] \times$ ہو گا۔

فرض کرو کہ گہرائی لا اور لا + مع لاپر متناؤت اور ت + مع ت نیز فرض کرو کہ اس حصہ کا غیر کھنچا ہوا طول لا اور کھنچا ہوا طول لا ہے۔ اس لئے اس حصہ کا وزن جس کا کھنچا ہوا طول مع لا ہے $\frac{۲}{۳} \times$ مع لا ہو گا۔ اس جزو کے متبادل کے لئے



$$ت = ت + معن ت + \frac{و}{ل} \times فرلا$$

یعنی $\frac{فرلا}{فرلا} = \frac{و}{ل} \dots (۱)$
 نیز ہنگ کے کلیہ کی رو سے

$$ت = لہ = \frac{معن لا - معن لا}{معن لا}$$

اس لئے $\frac{فرلا}{فرلا} = ۱ + \frac{ت}{ل} \dots (۲)$

(۱) اور (۲) سے $\frac{فرلا}{فرلا} = \frac{و}{ل}$

∴ $\frac{فرلا}{فرلا} = \frac{و}{ل} + ۱ \dots (۳)$

اب جب لا = ل تو ت = و اور اس لئے (۲) سے

$$\frac{فرلا}{فرلا} = ۱ + \frac{و}{ل}$$

اس لئے (۳) سے $۱ + \frac{و}{ل} = ۱ + \frac{و}{ل}$

∴ $\frac{فرلا}{فرلا} = \frac{و}{ل} + ۱ + \frac{و}{ل}$

∴ $۱ = \frac{و}{ل} \times \frac{لا}{۲} + (۱ + \frac{و}{ل}) \dots (۴)$

چونکہ لا اور لا ایک ساتھ صفر ہوتے ہیں اس لئے یکم کا مستقل صفر ہے۔
 (۴) سے کسی بغیر کھینچے طول کے جواب میں کھینچا ہوا طول حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے اگر لا = ل

$$\text{توکل کنچا: } = \frac{د}{ل} \frac{ل}{د+ل} = \frac{ل}{د} \frac{د}{د+ل} \left[\frac{د}{د+ل} \right]$$

۴۶۴۔ ایک وزنی پکڑا رسی جاذبہ ارض کے زیر عمل معمولی زنجیرو کی شکل میں لٹک رہی ہے مگر بن کنچھی رسی کا طول سچ ہو اور اس کا وزن سب سے پہلے نقطہ پر کے تناؤ کے مساوی ہو اور اس تناؤ کو لچک کے مقیاس کے ساتھ نسبت ک ہو تو رسی کی شکل کی مساواتیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ رسی پر ایک نقطہ (لا، ما) ایسا ہے جس کا قوسی فاصلہ سب سے نیچے نقطہ سے س ہے، فرض کرو کہ اس نقطہ پر تناؤ ت ہے۔ اگر قوس س کا طول بغیر کنچاؤ کے س ہو تو

$$\frac{ت}{س} = \frac{فرس - فرس}{فرس}$$

$$\text{یعنی } \frac{فرس}{فرس} = 1 + \frac{ک}{ت} \times \frac{د}{ج} \quad (۱)$$

جہاں د رسی کے بن کنچھے اکائی طول کا وزن ہے۔ تب دفعہ ۲۵۴ کی مساواتیں حسب ذیل ہو جاتی ہیں

$$- \frac{ت}{فرس} + \left\{ \frac{ت}{فرس} + \frac{فرس}{فرس} \right\} (ت \frac{فرس}{فرس}) = \{ \dots + \dots \}$$

$$- \frac{ت}{فرس} + \left\{ \frac{ت}{فرس} + \frac{فرس}{فرس} \right\} (ت \frac{فرس}{فرس}) = \{ \dots + \dots \}$$

$$\text{یعنی } \frac{فرس}{فرس} (ت \frac{فرس}{فرس}) = \dots \quad (۲)$$

$$\text{اور } \frac{فرس}{فرس} (ت \frac{فرس}{فرس}) = \dots \quad (۳)$$

ان سے حاصل ہوتا ہے

$$ت = \frac{فرلا}{فرس} = مستقل = د، ج$$

اور ت = $\frac{فرلا}{دس} = د، س$ کیونکہ س اور س ایک ساتھ صفر ہوتے ہیں

ان کو مرہج کر کے جمع کرنے سے $د = \overline{راج + س}$

$$(۴) \text{ اس لئے } \frac{فرلا}{فرس} = \frac{فرلا}{فرس} \times \frac{د، ج}{د، ج} = \frac{فرلا}{فرس} \left[\frac{۱}{د، ج} + \frac{ک}{راج + س} \right] \dots (۴)$$

$$(۵) \text{ فرلا } = \frac{فرلا}{فرس} \times \frac{فرلا}{فرس} = د، س \left[\frac{۱}{د، ج} + \frac{ک}{راج + س} \right] = \frac{ک}{راج + س} + \frac{س}{راج + س} \dots (۵)$$

اور د، ج لینے اور جمع کرنے سے

$$\frac{فرس}{فرس} = ۱ + \frac{ک}{راج + س}$$

ان مساواتوں کو تکمیل کرنے سے

$$(۶) \dots \dots \dots \left[\frac{س + ۱۷س + ۲ج}{ج} \right] = ک + س + ۱۷ج + ۱۷ک$$

$$(۷) \dots \dots \dots ۱۷ک + \frac{س}{ج} + ۱۷س + ۲ج - ج = ک$$

$$(۸) \dots \dots \dots \left[\frac{س + ۱۷س + ۲ج}{ج} \right] = ک + س + ۱۷ج + ۱۷ک$$

اس مفروضہ پر کہ لا اور ما، س کے ساتھ صفر ہوتے ہیں۔

(۶) سے س، ما کی رقوم میں اور پھر (۶) اور (۸) سے لا اور س، ما کے تقاطعوں کے طور پر معلوم ہوتے ہیں۔

مساواتوں (۴) اور (۵) سے

$$\frac{س}{ج} = \frac{فرسا}{فرلا} = مس سا$$

اور اس لئے (۸) سے

$$س = ج مس سا + \frac{ک ج}{۲} [قطسا مس سا + لوک (قطسا + مس سا)]$$

اگر ہم س = ج، جبزر رکھیں تو مساواتیں (۶) و (۷) اور (۸) حسب ذیل ہو جاتی ہیں

$$\frac{لا}{ج} = ۶ + ک جبزر$$

$$\frac{سا}{ج} + ۱ + \frac{ک}{۲} = \frac{ک}{۲} + جبزر ۶$$

$$اور \frac{س}{ج} = جبزر ۶ + \frac{ک}{۲} + \frac{ک}{۲} جبزر ۶$$

۲۷۵- مشق - امتداد پذیر رسی کو بہت آہستہ آہستہ ایک پہیہ کے گرد لپیٹا جا رہا ہے پہیہ پھیلنے کے عمل کو روکنے کے لئے کافی کھردرا ہے۔ رسی کے دو سرے سرے کے ساتھ ایک وزن ۶ بند ہوا ہے جو زمین پر پہیہ کے مرکز سے ٹھہرائی لی ہے اس حالت میں رسی کا ٹکٹنے والا حصہ انتصابی ہے اور بغیر کھنچاؤ کے ہے۔ ثابت کرو کہ وزن کو زمین پر سے عین اٹھانے کے لئے پہیہ کو کھانے میں جس قلعہ کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$ل و - ل ل لوک [۱ + \frac{۶}{۲}]$$

ہے جہاں رسی کے وزن کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

اس عمل - کسی آئن میں فرض کرو کہ رسی کے انتصابی حصہ کا طول پہیہ کھنچاؤ کے لا ہے اور اس کا تناؤ صاف ہے۔ تب تک کے کلیہ سے

$$ت = د \frac{ل - لا}{لا} \quad (۱)$$

اگر ل، ل + ۱ معطی ہو جائے جہاں ۱ پہیہ کا نصف قطر ہے اور معطی وہ زیادہ ہے

جس میں سے پہلے کو گھمایا جائے تو

$$\frac{\text{ل} - \text{ل}}{\text{ل} + \text{مفت ط} - \text{لا}} = \frac{\text{ل}}{\text{ل} + \text{مفت ط}}$$

$$\text{جس سے مفت ت} = \frac{\text{ل} \times \text{مفت ط}}{\text{لا}}$$

اس لئے اس لا انتہا چھوٹے کھنچاؤ میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$\text{ت} \times \text{لا} = \text{مفت ت} \times \text{ل} \quad \text{ت} \times \text{لا} = \text{مفت ت} \times \text{ل}$$

اس لئے وزن کے اوٹھ آنے تک کل کام جو انجام پذیر ہوتا ہے یعنی جبکہ ت مساوی ہو جائے ہے وکے وہ

$$\text{ل} \times \text{ت} = \text{مفت ل} \times \text{ت} = \text{ل} \times \text{ت} = \text{ل} \times \text{ت}$$

مثالیں

مجبب ایک یکساں پکدار رسی (ب) جاذبہ الارض کے زیر عمل تنگ رہی ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا بالائی حصہ نیچے نصف کی نسبت دو چند کھنچ جاتا ہے۔

اگر اس پر کوئی نقطہ (ن) ایسا ہو کہ (ن : ب = ۱ : ۱) تو ثابت کرو کہ اس سے اوپر والے اور نیچے حصوں کے کل کھنچاؤ مساوی ہو گئے۔

۲۔ ایک وزنی پکدار رسی کا طبعی طول ۲ ل ہے۔ اگر اس کو ایک سرے سے آزادانہ کھنچا جائے تو اس کا طول ۳ ل ہو جاتا ہے۔ یہ رسی ایک پکٹے میٹر پر جس کی چوڑائی ۲ ل ہے اس طرح پڑی ہے کہ اس کے سرے نیچے تنگ رہے ہیں۔ رسی کا کل کھنچاؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ رسی کا جو حصہ میٹر سے مس کرتا ہے اس کا تناؤ رسی کے وزن کا

نقطہ ن پر ایک قوت ف اس کے طول کی سمت میں ایسی عمل کرے کہ ن پر کھینچاؤ اس کے آزاد سرے سے اس کے فاصلہ کے متناسب ہو تو ثابت کر دو کہ $\frac{F}{L}$ (جہاں ف ثابت سرے پر ف کی قیمت ہے) بغیر کھینچاؤ کی صورت میں ثابت سرے سے ن کے فاصلہ کے متناسب ہوگا۔

۸۔ ایک یکساں رسی جس کا وزن W اور لمبک کا مقیاس L ہے منی ہوئی حالت میں ایک کھردرے افقی میز پر جس کی درگڑ کی قدر r ہے پڑی ہے۔ اگر ہر نقطہ پر یہ سکرٹے کے عین قریب ہو تو بتاؤ کہ اس کا کھینچا ہوا طول اس کے بن کھینچے طول کا $(1 + \frac{W}{2L})$ گنا ہے۔
۹۔ ایک یکساں وزنی ٹھیکہ اور رسی کو جس کا طبعی طول L ہے اس قدر کھینچا گیا ہے جتنا ممکن ہے اور یہ انتہائی تعادل کی حالت میں ایک کھردری سطح مائل پر پڑی ہے۔ ثابت کر دو کہ درگڑ کی سمت رسی کے اس نقطہ پر بدل جاتی ہے جس کا طبعی فاصلہ اوپر کے سرے سے $1/2$ [مس و مم د] ہے جہاں درگڑ کا زاویہ ہے اور سطح کا میلان ہے افقی کے ساتھ۔

۱۰۔ ایک یکساں شہتیر جس کا طول L ہے ایک سطح مائل کے خطا میلان اعظم پر پڑا ہے۔ سطح مائل کا میلان افق کے ساتھ θ ہے۔ شہتیر پیش کے اضافہ کے زیر اثر چھپتا اور پھر ٹھنڈا ہو کر سکرٹا ہے۔ بتاؤ کہ شہتیر کے کون سے نقطے ان دونوں عملوں کے آغاز میں ثابت رہتے ہیں نیز ثابت کر دو کہ فی الجملہ کل شہتیر سطح مائل پر بدل مس و مم د فاصلہ نیچے اترتا ہے جہاں پیش کے انتہائی تغیر کے لئے طول میں نی اکائی طول کا اضافہ ہے اور درگڑ کا زاویہ ہے۔

۱۱۔ ایک لمبک دار رسی کا طبعی طول L اور وزن M ج ہے۔ اس رسی کا ایک سرا ایک کھینچنے افقی میز کے ایک نقطہ کے ساتھ بندھا ہے اور یہ میز پر یکساں زاویہ θ رخواہ سے کے ساتھ گھوم رہی ہے۔ ثابت کر دو کہ کھینچا ہوا طول

$$\frac{1}{2} \left(\frac{L}{M} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{M}{L} \right) \right\} \text{ ہے جہاں } L \text{ لمبک کا مقیاس ہے۔}$$

۱۲۔ ایک لچکا بندہ جس کا طول بغیر کھنچاؤ کے ۲ و ۶ ہے۔ اس کو چار رسی چار بیخوں 'ا' ب' ج' د' کے گرد جو ایک ایسے مربع کے کونوں پر لگی ہیں جس کا ہر ضلع ۱ ہے لپیٹا گیا ہے۔ اگر اس کو 'ا' اور 'ب' کے درمیان کسی نقطہ 'ن' پر پکڑ دیا جائے اور 'ب' کی سمت میں کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ بندہ 'ا' اور 'ب' کے گرد وقت واحد

میں پھسلنے لگے گا اگر $\frac{ان}{ب} = \frac{۲}{۶}$

۱۳۔ ایک وزن 'ن' ایک دوسرے وزن 'ق' کو ایک لکڑی لچکا درسی کے ذریعہ تھامے ہوئے ہے جو کہ ایک کھر در سے مستدیر اسطوانے پر سے گزرتی ہے جس کا محور افقی ہے۔ ثابت کرو کہ درسی کے اس حصہ کا کھنچاؤ جو اسطوانہ سے مس کرتا ہے

$\frac{۱}{۲}$ تک $\frac{ق + ل}{ن + ل}$ ہے جہاں 'ا' اسطوانہ کا نصف قطر ہے، 'م' مرکز کی قدر ہے اور 'ل' لچک کا مقیاس ہے۔

۱۴۔ ایک لکڑی لک لچکا در تار کے ذریعہ چھت سے ٹٹک رہی ہے تار کا مقیاس 'م' لکڑی کے وزن کے نصف کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ چھت تک چڑھنے میں لکڑی جو کام کرتی ہے وہ اس کام سے ایک تہائی کم ہے جو تار کے بے لچک ہونے کی صورت میں لکڑی کو کرنا پڑتا۔

۱۵۔ ایک وزنی لچکا در رسی کا طبعی طول 'ل' اور کثیت 'س' ہے رسی کو ڈھیلے طور پر لپیٹ کر ایک افقی میز پر رکھا گیا ہے۔ اگر رسی کے ایک سرے کو آہستہ سے انتہائی اتنا اوپر اٹھایا جائے کہ رسی کھل کر میز سے عین اوپر اٹھ آئے تو ثابت کرو کہ ایسا کرنے

میں $\frac{۱}{۲}$ سے ج ل [$ا + \frac{۲}{۳}$ سے ج ل]

کام کرنا پڑے گا جہاں 'ل' رسی کی لچک کی کا مقیاس ہے۔

[جب رسی کا ایک سر فاصلہ 'لا' اوپر اٹھ آئے اور اگر رسی کا لا طول بن کھنچی حالت میں لا طول کے مساوی ہو تو وقت ۳ کی رو سے لا = لا + $\frac{۲}{۳}$ سے ج ل نیز اوپر کے سرے پر کا تناؤ ستا = سے ج ل، پس طول کے لا سے لا + $\frac{۲}{۳}$ سے ج ل لا چڑ جائے

میں جو کام ہوتا ہے $د = ت$ مع $لا = مرج$ لا $[ا + مرج]$ مع $لا$ ۔ اس کو عدد

صفر اور ل کے اندر رکھ کر نئے سے ہمیں نتیجہ بالا حاصل ہوتا ہے

۱۶۔ ایک بجیاں لچکدار سی ایک افقی سطح مستوی پر اپنی طبعی حالت میں ساکن ہے اور اس کا ایک سر اکنا رہ کے ساتھ بندھا ہے۔ اگر سی کو اس نقطہ سے آزادانہ لٹکنے دیا جائے تو ثابت کرو کہ تجاذبی قوت انائی بالعمود میں

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \text{ و ل کی کمی واقع ہوگی جہاں } د \text{ سی کا وزن ہے } ۱ \text{ اس کا طبعی طول ہے}$$

اور ل بک کا مقیاس ہے۔

رسیوں اور زنجیروں پر متفرق مثالیں

(۱) ایک رسی کا طول ل اور وزن و ل ہے۔ اس کے وسطی نقطہ ج کے ساتھ ایک حلقہ بندھا ہے جس کا وزن و ب ہے۔ رسی دو چکینی میخوں پر جو ایک ہی خط افقی میں واقع ہیں اس طرح مشاکلا لٹک رہی ہے کہ رسی کے سرے انتصا باً لٹک رہے ہیں ثابت کرو کہ زنجیرو کا تبدل ج ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ب + ل = و + [ب + ل + ج + ب]$$

جہاں ۲ میخوں کا درمیانی فاصلہ ہے اور ل کی کم سے کم قیمت جس کے لئے تقاد ل ممکن

$$\text{ہے اس وقت ہوتی ہے جبکہ } \frac{1}{ب} = \frac{1}{ل} - \frac{1}{(ل + ج)}$$

نیز ثابت کرو کہ ج پر کا ماس سمت انتصا بی کے ساتھ جزادیہ طہ بناتا ہے وہ مساوات

$$ب \text{ مسطرہ کوک } (ل + ب) \times \left(\frac{\text{جسم طہ}}{ب + ل} \right) = ۱۲$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اس لئے اس کی بڑی سے بڑی قیمت جسم طہ ہے کیوں کہ

۱ منفی نہیں ہو سکتا۔

۲۔ ایک ٹرسکنے والی رسی کا طول ۲ ل، ۱ خطی کثافت ہے، اس کے وسطی نقطہ کے ساتھ کیت ۲ ہے۔ ک کا ایک وزن منکابندھا ہے۔ رسی کے سرے دو ثابت نقطوں کے ساتھ بندھے ہیں جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ک ہے جو ۲ ل سے ذرا سا کم ہے ثابت کرو کہ رسی کے کسی نصف کے ذخیرہ کا مبدل تقریباً $\frac{1}{2} \left(\frac{2k + k + k}{(l - k)} \right)$ ہے۔

۳۔ دو چکنے مستدیر اسطوانے ہیں جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ۱ ہے ان کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کے محور ایک دوسرے کے متوازی ایک ہی افقی سطح میں واقع ہیں اور ایک دوسرے سے فاصلہ ۲ ب (۲ ل) پر ہیں۔ ایک رسی اسطوانوں پر متشابہ لٹائی گئی ہے اور رسی کے سرے انتصافاً لٹک رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ رسی کا چھوٹے سے چھوٹا ممکن طول ۲ ب + ۲ ل (۲ سن - د) ہے جہاں درگزر کی قدر ہے۔
(دفعہ ۲۶۹ کی سولہویں مشق کے نتیجے کو استعمال کرو)

۴۔ ایک سلاخ کو جس کا طول ۲ ب ہے دو وزن رسیوں کے ذریعہ لٹکا یا گیا ہے جو ایک طرف اس کے سروں کے ساتھ اور دوسری طرف دو ثابت نقطوں کے ساتھ بندھی رسیں ثابت نقطوں کا درمیانی فاصلہ ۲ (۱ + ب) ہے۔ سلاخ کا محل متوازی الافق ہے اور دونوں ثابت نقطے سلاخ کے اوپر بلندی ۱ پر واقع ہیں۔ اگر ہر ایک رسی کا طول ۱ ہو تو ثابت کرو کہ سلاخ کا تناؤ رسی کے ایک ایسے ٹکڑے کے وزن کے مساوی ہوگا جس کا طول ج مساوات ل = ۱ + ۲ ب جہز $\frac{1}{2}$ سے حاصل ہوتا ہے۔

۵۔ ایک سلاخ کا طول ۲ ل ہے اس کے سرے ایک وزن رسی کے سروں کے ساتھ بندھے ہیں جس کا طول ۲ ل ہے۔ اس رسی کے ذریعہ سلاخ ایک میخ پر متشابہ لٹک رہی ہے۔ سلاخ کا وزن رسی کے وزن کا ن گنا ہے اور افقی تناؤ ۱ گنا ہے

ثابت کرو کہ $م + ن = (ن + ۱) قزم - ن ممز$ $\frac{1}{2}$

۶۔ ایک یکساں ذخیر جس کا طول س ہے دو ثابت نقطوں ۱ اور ب سے لٹک

رہی ہے جو ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے ۲ لم فاصلہ پر واقع ہیں۔ ثابت کرو
اگر س ب لے تو زنجیرہ کے مرتب کی کم سے کم گہرائی $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{1-1}}$ ہوگی جہاں ی مساوات
ی س ز ی = ۱ سے حاصل ہوتا ہے اور س کی متناظر قیمت $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{1-1}}$ ہوگی۔

نیز ثابت کرو کہ مرتب کی کسی گہرائی کے جواب میں جو کم سے کم گہرائی سے زیادہ ہو س کی
دو قیمتیں ہونگی اور اگر س کو ان دو قیمتوں میں سے بڑی قیمت سے ذرا سا بڑھا دیا جائے تو
مرتب نیچے آجاتا ہے اور اگر س کو ان دو قیمتوں میں سے چھوٹی قیمت سے ذرا سا بڑھا
دیا جائے تو مرتب اوپر چڑھ جاتا ہے۔

۷۔ ایک یکساں زنجیرہ کے سرے درمیان کے ساتھ بند ہے جس میں سے ایک میخ
دوسری میخ سے افقی فاصلہ ۱۲ پر اور انصافی فاصلہ ۲ ب پر نیچے واقع ہے۔ ثابت
کرو کہ جیسے جیسے زنجیرہ کا طول بدلتا ہے تو سب سے اونچے مرتب والے زنجیرہ کا مبادل

$$\text{مساوات } \frac{1}{\text{ج}} - \frac{1}{\text{ممر ج}} = \frac{1}{\text{ب ج}} - \frac{1}{\text{قمر ج}} \text{ سے حاصل ہوتا ہے۔}$$

۸۔ ایک یکساں زنجیرہ جس کا طول ۲ ل ہے دو نقطوں ۱ اور ب سے جو ایک ہی ہمواری
میں واقع ہیں ٹنگ رہی ہے اور زنجیرہ کے سب سے نیچے نقطہ کی گہرائی ۱ ب کے نیچے
ک ہے۔ اگر فاصلہ ۱ ب (س) میں بقدر ۱ کے خفیف سا اضافہ کیا جائے تو

ثابت کرو کہ زنجیرہ کا اس بلند سی صف ۱ ب کے جسم سا $\frac{1}{\text{ج}} - \frac{1}{\text{ل ج}}$ میں سے اوپر اٹھ آئیگا جہاں
سا وہ زاویہ ہے جو ۱ یا ب پر کے تماس افق کے ساتھ بنائے ہیں۔

۹۔ ایک معلوم طول ل کی ایک یکساں وزنی زنجیرہ جس کے ایک سرے کو ایک
ثابت نقطہ کے ساتھ بانڈہ دیا گیا ہے۔ زنجیرہ ایک اور چکنی میخ پر سے جواول الذکر
ثابت نقطہ کی ہمواری پر اس سے ۲ فاصلہ پر واقع ہے گزرتی ہے۔ ثابت کرو کہ
تبادل کے دو محل ہیں جتنے یا کوئی بھی محل نہیں ہو گا مگر جب اس کے کہ

$$\frac{1}{\text{ج}} - \frac{1}{\text{ل ج}} = \frac{1}{\text{ب ج}} - \frac{1}{\text{ق ج}}$$

جہاں لامعات ۳ نو $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ کی مثبت اصل ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگر تعادل کے دو محل ہوں تو وہ محل جس میں نہ بخیرو کا مبدل بڑا ہو قائم تعادل کا محل ہوگا۔

۱۰۔ ایک یکساں زنجیر کا طول معلوم ہے۔ اس کے دو سروں کو دو نقطوں کے ساتھ جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں باندھ دیا گیا ہے۔ زنجیر ایک اور چکنی سطح پر سے گزرتی ہے جو ان دونوں نقطوں کے درمیان واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اگر تعادل کا محل مرفہ تشاکل کا محل ہو تو یہ انقباضی سطح مستوی میں ہشادوں کے لئے قائم تعادل کا محل ہوگا لیکن اگر عدم تشاکل کی صورت میں تعادل کا محل ہو تو پہلا محل غیر قائم تعادل کا محل ہوگا۔

۱۱۔ طول l کی ایک زنجیر کو اس کے سروں پر سے تمام لیا گیا ہے اور اس کو ان نقطوں کو لانے والے خط کے گرد گھمایا گیا ہے۔ پھر اس کے سروں کو کھینچ کر اس طرح $2a$ لایا گیا ہے کہ زنجیر تقریباً سیدھی ہو جاتی ہے اور اس کا تناؤ اس کے طول h کے وزن کے مساوی ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ فی ثانیہ گردشوں کی تعداد $n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$ ہے۔

۱۲۔ ایک وزنی یکساں رسی کو ایک سرے سے لٹکایا گیا ہے اور رسی ہوا کے ذریعہ محل جو افقی سمت میں یکساں رفتار کے ساتھ چل رہی ہے متعادل ہے۔ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ ہوا رسی کے کسی جزو پر جو عادی قوت لگاتی ہے وہ جب اس کے تناسب سے جہاں سادہ ذریعہ ہے جو جزو مذکور کا $2a$ اس افقی سمت کے ساتھ بناتا ہے تو ثابت کرو کہ رسی کی

شکل $s = (\text{جم سا} - \text{مس و}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = (\text{جم سا} + \text{مم و}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ مستقل ہے

جہاں w ایسا مستقل ہے کہ رسی کے آزاد سرے پر ماس کی قیمت $\text{جم} (ms)$ ہے۔

۱۳۔ دو رفتار معلوم کرو جس پر ایک بچے کے ذریعہ بڑی سے بڑی طاقت منتقل ہو سکے۔

جب ایسا ہو تو ثابت کرو کہ بچے کی تنے ہوئی طرف اور ڈھیل طرف کے تناؤں کی نسبت $(2 + 1) : 3$ ہوگی جہاں m رگڑ کی قدر ہے اور w چرخی اور بچے کے درمیان تماس کا زاویہ ہے۔

[اگر چرخ کا نصف قطر r ہو اور فی اکائی طول کثیت m ہو اور سر پہیے کی زاویائی رفتار ہو
تو ابتدائی علم حرکت کی رو سے

$$m \text{ نصف } s = s^2 \div 4 = (ت + نصف ت) \text{ جب نصف } ط - \text{ سر نصف } s$$

$$\text{اور } 0 = (ت + نصف ت) \text{ جم نصف } ط - ت - \text{ سر سر نصف } s$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \text{سر } ت - \text{سر } م = s^2 \div 4$$

$$\text{ہذا } ت = 4 \div \text{وسط } + م = s^2 \div 4$$

اس لئے اگر t اور s سروں پر کے تناؤ ہوں تو ہمیں آسانی سے حاصل ہوتا ہے

$$ت = \text{وسط} (ت - م = s^2 \div 4) + م = s^2 \div 4$$

اس لئے طاقت جو منتقل ہوتی ہے

$$= (ت - م) (ت - م) = (وسط - 1) (ت - م = s^2 \div 4) \div 4$$

اور اس لئے s کی مختلف قیمتوں کے لئے بڑی سے بڑی ہوگی جب $s = s^2 \div 4 = ت$

$$\text{اور } ت = \frac{ت}{ت} = \frac{2 \div \text{وسط} + 1}{3}$$

۴۴۔ ایک بے سرے والا رسی کا حلقہ ایک چکنے قائم اسطوانہ کے گرد جس کا نصف قطر
وہ ہے متساویانہ لگا رہا ہے۔ اگر رسی اسطوانہ کے محیط کے تین چوتھائی حصہ کو مس
کرے تو اس کا کل طول اور سب سے نیچے نقطہ کا مقام معلوم کرو۔

۴۵۔ ایک دہائی یکساں رسی ایک انتصابی دائرہ کے گرد لپیٹی ہوئی ہے اور اس قدر تنی
ہوئی ہے کہ یہ سب سے نیچے نقطہ پر دائرہ کو چھوونے کے مین قریب ہے۔ ثابت کرو کہ
سب سے اونچے نقطہ پر تناؤ سب سے نیچے نقطہ پر سب سے زیادہ کا مین گنا ہے۔

۴۶۔ ایک چکنا قرص قطع ناقص کی شکل کا ہے جس کے نیم محور a اور b ہیں۔ اس کو ایک
انتخابی سطح سنوسی میں اس طرح ثابت کر دیا گیا ہے کہ اس کے دونوں محور خط انتصابی کے
ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ایک دہائی رسی قرص کے گرد کس کراتی ہے اور اسے

آہستہ آہستہ ڈھیلا کیا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ جس نقطہ پر رسی قرص سے اٹک ہوئی ہے اس نقطہ کا خارج المرکز زاویہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$2 \text{ اُبتس } 2 \text{ ذ} - 1 \text{ (م } 1 - \text{ ج } 1) \text{ م } 1 \text{ ذ} + 1 \text{ ب (م } 3 - \text{ ج } 1) \text{ م } 1 \text{ ذ} - 2 \text{ اُبتس } 1 =$$

[یہ نقطہ اس بنا پر معلوم ہوتا ہے کہ اس فقہ پر بخنی کا دباؤ سفاور کم سے کم ہے]

۷۱۔ ایک یکساں رسی جس کے سرے ایک نشہ لپڑ بند ہے ہیں ایک قوت کے مرکز و گھیرے ہوئے ہے اس کی مرکزی قوت انضمامی قوت ہے اور فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے ثابت کرد کہ اگر رسی کا طول ۳۰ و ۱۰ یو تو لپڑ رسی کے دو حصوں کے درمیان جزا دی اندرونی طور پر بننا ہے ۱۲۰۰۰ کے مساوی ہے ۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ ایک یکساں سی ایف دائرہ کی قوس کی مثل میں ساکن ہوگی اگر اس کے ہر جزو پر مگر یہی قوت ایسی مل کر تہ جو قوت کے مرکز سے اس جزو کے فاصلہ کے بمعین کے بالعکس متناسب ہو جبکہ قوت کا مرکز محیط پر کا کوئی نقطہ ہو۔

۱۹- (ب ج د) ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع ۱ ہے۔ ایک کیساں رسی جس کی خطی کثافت ۳ ہے اور جسے ب اور د پر ثابت کر دیا گیا ہے اسے ایک اندفاعی قوت ۲ کے زیر عمل متعادل ہے اگر ب اور د پر رسی کے تماس ب د پر عمود وار ہوں اور اگر ان نقطوں میں سے ہر ایک پر تناؤ $\frac{1}{4}$ کے ساتھ متعادل کر دیا جائے تو رسی منحنی $y = x^2$ (جب ط ۱) کی شکل میں ساکن ہوگی۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ یکساں طاقت کے ریجنز کے لئے نوہی کی قوس ممکن شکل ہو سکتی ہے جبکہ رسی کے ہر جزو پر اندفاعی قوت قطب سے فاصلہ کے باحسب متناسب ہو اور رسی کے دونوں سرے ثابت کر دئے گئے ہوں۔

۲۱۔ ایک پہنچ رسی کا معلومہ طول حلقہ کی شکل میں ہے اس کے ہر جزو پر دو مرکزی قوتیں جن میں سے ہر ایک فاصلہ کے کام کے بالکل متناسب ہے عمل کرتی ہے۔ ثابت کرنا کہ رسی کی شکل ایک دائرہ ہو سکتی ہے۔ اس دائرہ کا مرکز معلوم کرو۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ ایک دسی ایک قطع ناقص کی شکل میں متبادل ہو سکتی ہے جبکہ اس پر

اس کے ماسکوں سے دو اندفاعی قوتیں (مر $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{2}$) اور (مر $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{2}$) عمل کریں جہاں ر اور ر کسی جزو کے نام ملے ہیں ماسکوں سے۔ نیز ثابت کر دو کہ کسی جزو پر تناؤ مرکز سے اس جزو پر کے ماس پر عمود کے طول کے متناسب ہوتا ہے۔
 ۳۴۔ ایک چکینے سے یا سطوانہ کو جس کا نصف قطر اسے اس طرح ثابت کر لیا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور ایک چکینی افقی میچ اس میں لگا دی گئی ہے اب ایک رسی (جس کا طول ۲ ل ہے) کا حلقہ اس سطوانہ کے اوپر اس طرح ڈال دیا گیا ہے کہ حلقہ میچ سے الٹا جاتا ہے۔ ثابت کر دو کہ تعادل کے محل میں میچ پر رسی کے دو حصوں کے درمیان زاویہ قائم ہے۔

مثبت ہے جہاں ج جیزر $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ل۔ اگر رسی کے سب سے پچھلے نقطہ کو مبرا مانا جائے اور سی کا محور انتصابی ہو اور لا اس مستدیر قوس کا طول ہو جو کسی قوس دن کا نکل ہو تو ہمیں افقی اور انتصابی سمتوں میں تحلیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} (\text{ت فری}) = \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} (\text{ت فرس}) = 0$$

$$\text{لہذا ت فرس} = \text{مستقل} = \text{و ج} \quad \text{اس لئے فرس} = \left(\frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \right) = \frac{1}{\text{ج}}$$

یعنی $\frac{\text{فری}}{\text{فرس}} = \frac{1}{\text{ج}}$ ، یہ دفعہ ۲۵۱ کی تفرقی مساوات ہے اور اس لئے اس کا حل بھی وہی ہے۔ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ رسی میں کوئی اتمال واقع نہ ہوگا اگر اسطوانہ کو پھیلا کر ایک انتصابی سطح مستوی میں تحویل کر دیا جائے۔

۳۴۔ ایک یکساں وزنی رسی جس کا طول ۲ ل ہے نصف قطر کے ایک چکینے انتصابی اسطوانہ کے ساتھ مس کرتی ہوئی لٹک رہی ہے۔ اسے دو نقطوں کے ساتھ ثابت کر دیا گیا ہے جو ایک ہی افقی سطح مستوی میں ہیں اور نیز اسطوانہ کے محور میں سے گزرنیوالی انتصابی سطح مستوی میں محور سے (جہاں و ک ر) واقع ہیں۔ ثابت کر دو کہ رسی کے سب سے پچھلے نقطہ کی گہرائی ماہر ایک مہار سے کے نقطے کے نیچے مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$\text{رجب}^1 \frac{1}{2} + \text{م}^2 - \text{ر}^2 = \frac{\text{ل}^2 - \text{ل}^1}{\text{ل}^2} \text{وک} \frac{\text{ل} + 1}{\text{ل} - 1}$$

۳۵۔ ایک دسی ایک چکنے کو دہر اس طرح پڑی ہے کہ یہ ایک ثابت قطر میں سے گزرنے والی سب تراشوں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ اسی حالت میں ساکن رہے گی اگر اس کے ہر جزہ پر ایک قوت عمل کرے جو معادہ قطر پر عمود وار ہو اور اس جزہ کے فاصلہ کے مربع کے بالکس متناسب ہو۔ نیز بتاؤ کہ تناؤ فاصلہ کے بالکس متناسب ہوتا ہے۔

قطبی محدودوں (۱) (۲) کو مستقل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دسی کا سختی مذکورہ بالا تراشوں کو ایک ہی زاویہ قطع کرے گا اگر $\frac{\text{ف}^2}{\text{فس}} = \text{جم}^2$ اور $\frac{\text{ف}^2}{\text{فس}} = \text{جب}^2$ جب یہ اس لئے آسانی سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ف}^2}{\text{فس}} = \text{جم}^2 = \text{جم}^2 \text{ ف}^2 \text{ جم}^2 = \text{جب}^2 \text{ ف}^2 \text{ جب}^2$$

$$\frac{\text{ف}^2}{\text{فس}} = \text{جم}^2 = \text{جب}^2 \text{ ف}^2 \text{ جم}^2 + \text{جم}^2 \text{ ف}^2 \text{ جب}^2$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{فری}}{\text{فس}} = - \text{جب}^2 \text{ جم}^2$$

ثابت قطر کے گرد میپار انٹرینے سے

$$\text{ت} \text{ جب}^2 = \text{ا} \text{ جب}^2 = \text{مستقل} \text{ ت} = \frac{\text{م}}{\text{جب}^2}$$

دفعہ ۲۶۱ کی تیسری مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م} \text{ جم}^2 = \frac{\text{فری}}{\text{فس}} (\text{ت} \frac{\text{فری}}{\text{فس}}) = \frac{\text{فری}}{\text{فس}} (- \text{ت} \text{ جب}^2 \text{ جم}^2) = -$$

پس مسا = -

اس لئے اگر ثابت قطر پر عمود وار باہر کی طرف عمل کرنے والی قوت ف ہو تو دفعہ ۲۶۱ کی مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

ف جم ذ۔۔۔ فرس (ت فرس) =۔۔۔ مر فرس (جم ہم ط جم ذ) جب ذ جب ہ (جب ط جب ط)

۔۔۔ مر جم ذ جس سے ف = وجب ط

۲۶۔ ایک رسی کا طول (و۔۱) ۱۲ + ذ جب ط ہے اور اس کے سروں کو ایک قائم

محزوط کی سطح پر کے دو نقطوں کے ساتھ جن کے فاصلے محزوط کے راس سے رادہ قو x ر میں ثابت کر دیا گیا ہے جہاں ۲ محزوط کا راسی زاویہ ہے اور ذوہ زاویہ ہے جو محزوط کے محز اور دو معلومہ نقطوں میں سے گزرنے والی سطح مستوی کے درمیان بنتا ہے۔ اگر رسی سطح پر بحالت تعادل راس سے ایک ایسی اندفاعی قوت کے زیر عمل جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہو ساکن رہے تو ثابت کرو کہ رسی کا توازن کا مخفی محزوط کے ہر کون کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرے گا۔

[بہاں دو لوکاریتوں کے نیچری نظام کی اساس ہے]

۲۷۔ ایک ایسی چکنی گرنشی سطح کی شکل دریافت کرو کہ جب اس کا محز انتصابی ہو اور جب

یکساں دستی اس پر ساکن ہو تو یہ سب نصف النہار کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرے۔
(کون مخفی قائم ماند ہے)

۲۸۔ دو پڑے ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن ل ن ہے۔ ان کو ایک بے وزن چکڑا رسی کے ذریعہ جس کا معیاس پک ل ہے ملا دیا گیا ہے۔ رسی ایک ثابت کھر درے افقی اسطوانہ پر جس کا نصف قطر ل ہے متشاکل لنگ رہی ہے۔ ابتداؤ رسی اپنے پورے طول میں یکساں طور پر چھینچی ہوئی ہے۔ اگر ایک پڑے کو جدریک و ذنی کیا جائے تو ثابت کرو کہ دوسرے پڑے کے حرکت کرنے سے پہلے پڑے کو سہارنے والی رسی کے زامنا انتصابی حصہ کا طبعی طول

$$\frac{1}{n} \log \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1} \log \frac{n+2}{n+1}$$

۲۹۔ ایک وزنی لچک درسی کا طول ۲ اور لچک کی قدر اس کے وزن کے مساوی ہے یہ رسی ایک چکنے مکانی پر پڑی ہے جس کا وتر خاص ۴ ہے اور مکانی کا محور انتصابی ہے اور رسی کا آزاد سر اس پر ہے جو سب سے نیچا نقطہ ہے۔ مکانی پر کا وہ نقطہ معلوم کرو جس کے ساتھ اوپر کا سر اواد بستہ ہے اور ثابت کرو کہ اُس نقطہ پر رسی کا تناؤ (۲۱-۱) ہے جہاں و رسی کا وزن ہے۔

۳۰۔ ایک رسی جو ابتداً متجانس اور جس کا طول ۱ ہے دو معلوم نقطوں کے ساتھ بندھی ہے اور تعادل کی حالت میں ایک دائرہ کی قوس کی شکل میں ایک ایسی اندفاعی قوت کے زیر عمل جو محیط پر کے ایک معلوم نقطہ سے باہر کی طرف عمل کرتی ہے ساکن ہے قوت کا قانون معلوم کرو۔

۳۱۔ ایک وزنی لچک درسی بغیر کھنچاؤ کی حالت میں یکساں ہے۔ اس کو ایک چکنے مستدیر اسطوانہ کے گرد جس کا محور افقی ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ یہ اسطوانہ کے سب سے نیچے نقطہ کے ساتھ عین تماس نہیں رکھتی۔ اگر اس نقطہ پر جس کو مرکز سے ملائے والا خط سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے تناؤ T ہو تو ثابت کرو کہ $(T + L)$ = $\frac{1}{2}$ جم طہ + $\frac{1}{2}$ ب جہاں L لچک کا مقیاس ہے اور $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ب مستقل ہیں جن کی قیمتیں لچک کے مقیاس رسی کے وزن اور اسطوانہ کے نصف قطر پر موقوف ہیں۔ اگر رسی کے اس انکج طول کا وزن جو اسطوانہ کے نصف قطر کے مساوی ہے W ہو اور لچک کا مقیاس بھی W ہو تو ثابت کرو کہ سب سے اونچے نقطہ پر تناؤ T مساوی $T + \frac{1}{2} = \frac{W + 9}{2}$ سے حاصل ہوگا۔

۳۲۔ ایک وزنی لچک درسی جو انکجی حالت میں یکساں ہے ایک چکنے انتصابی دائرہ کی محذب جانب پڑی ہے اور اس کا ایک سر دائرہ کے سب سے اونچے نقطہ کے ساتھ بندھا ہے۔ اگر تعادل کی حالت میں کل طول دائرہ کے رچ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا طبعی طول ۱۲۷ لوک (۲۱+۱) کے مساوی ہوگا جہاں ۱ دائرہ کا نصف قطر ہے، ۲ لچک کی قدر ہے اور ۱ طبعی طول کی ایک اکائی کا وزن ہے۔

۳۳۔ ایک لچکدار رسی جو انچھی حالت میں یکساں ہے ایک چکنی مستدیر نیلی کے اندر ایک جا ذبی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو نیلی کے محیط پر گئے ایک ایسے نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے جو رسی کے وسطی نقطہ کے عین مقابل ہے۔ اگر رسی تعادل کی حالت میں عین نصف دائرہ کو گھیرے ہوئے ہو تو ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا تناؤ

$$= ۲ (۱ + ۲) \text{ ک } (۱) - ۱$$

جاں ل لچک کی قدر ہے، و علی کا نصف قطر ہے، ک انچھی رسی کے اکائی طول کی کمیت ہے اور قوت فاصلہ کامد گنا ہے۔

۳۴۔ ایک وزنی لچکدار رسی جب طبعی طول ل ہے۔ ایک ثابت نقطہ سے حالت تعادل میں تنک رہی ہے اور اس کا کل کمیناؤ م ل ہے۔ رسی کو مغزولہ شکل کی ایک چکنی ثابت نیلی میں بند کیا گیا ہے جس کے کسی نقطہ پر کا ماس افق کے ساتھ ایک مستقل زاویہ عہ بناتا ہے۔ رسی کے بالاترین نقطہ کو نیلی کے ساتھ ثابت کر دیا گیا ہے اور رسی تعادل کا محل اختیار کر لیتی ہے۔ ثابت کرو کہ اب کل پھیلاؤ م ل جب عہ ہے۔

۳۵۔ ایک رسی ایک سطح مستوی میں ایک مرکزی قوت کے زیر عمل تعادل میں ہے۔ ثابت کرو کہ مرکزی قوت ایسے بدلتی ہے جیسے $\frac{۱}{\text{وزر}} (۱) -$

علم حرکت میں اس کے مماثل کیا ہے۔

اگر رسی لچکدار ہو تو ثابت کرو کہ رسی کے معلومہ شکل اختیار کر لینے کے لئے مرکزی

قوت ایسے بدلتی ہے جیسے $\frac{۱}{\text{وزر}} (۱ + \frac{۱}{۲})$ جہاں اس رسی کے ہر نقطہ کے لئے مستقل ہے۔

۳۶۔ ایک ثابت کرہ بر جس کا نصف قطر ل ہے ایک وزنی لچکدار حلقہ جس کا طبعی نصف قطر ج ہے متوازی الافق حالت میں پڑا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے محل تعادل میں زاویہ ۲ عہ جو حلقہ کے کسی قطر کے عمادی کرہ کے مرکز پر جتا ہے مساوات ذیل سے

ماہل ہوتا ہے $\text{مس عہ} = ۲ \text{ ک } \frac{\text{جب عہ} - \text{جب ج}}{\text{جب ج}}$ جہاں ج = ل جب عہ اوّل حلقہ

کے وزن کا ک گن لچک کے تقیاس کے مساوی ہے۔
اگر کہ ذرا سا کھردرا ہو اور گرد کی قدر ۲ ہو تو ثابت کر دو کہ تعادل کے ٹوٹنے سے پہلے
حلقہ کو اس قدر نیچے اتارا جاسکتا ہے کہ زاویہ ۲۷ بقدر ۲۷ $\frac{\text{جب ب}}{\text{جب پ}} - \frac{\text{جب ب}}{\text{جب پ}}$ کے
تقریباً بڑھ جائے

۳۷۔ ایک کھردری گردش سطح کو اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ اس کا محور انتظامی ہے۔
ایک لچکدار رسی کا حلقہ اس پر متوازی الافاق محل میں اس سطح ساکن ہے کہ یہ مساوی طور پر
کھینچا ہوا ہے۔ اگر رسی خواہ اسے کہیں رکھا جائے اور پھسلنے کے عین قریب ہو تو سطح کے ٹکڑے
منحنی کی مسادات معلوم کر دو اور ثابت کر دو کہ اگر لچک کا مقیاس لہوؤں گرد کی قدر ۲ رسی کا وزن
۱۲۲۲ اور اس کا طبعی طول ۲۲۲ ہو اور گردش کے محور کو ماکہ محو مانا جائے تو یہ مسادات
لا۔ ۱۷ = ۱۷ (۱ + ۲) لوک $\frac{1}{2}$ ہو جاتی ہے۔

۳۸۔ قضیہ اسلینج بینکے والابے سے پٹا دو مساوی چرخوں پر تپا ہوا ہے۔ ثابت کر دو کہ پٹا

ہر ایک چرخ پر جو جنت لگا سکتا ہے وہ $\frac{(۱۲ + ۱۲) ۱۲}{۱۲ + ۱۲}$ ت کے مساوی ہے

جہاں ہر ایک چرخ کا نصف قطر ہے، ج ان کے مرکوزوں کا درمیانی فاصلہ ہے، اور گرد
کی قدر ہے اور ت متاؤ ہے پٹے کا جبکہ یہ چرخوں پر لگایا گیا ہے۔

۳۹۔ اگر ایک سائیکل کے ٹائروں کو ایک پتلا لچکدار بندھو کر کیا جائے جو پرم میں جس کا بیرونی نصف
قطر ہے گہرائی د کی ایک چکنی نالی میں تپا ہوا ہو تو ثابت کر دو کہ ٹائروں کو پرم پر سے نکالنے میں
جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$\frac{1}{2} \left(\text{جب ف} - \text{ف جم ف} \right) \left(\text{ف} - \text{ف} \right) \text{جم ف} + \text{جب ف} - \frac{1}{2} \left(\text{ف} - \text{ف} \right)$$

ہے جہاں ل بند کا انجمنی حالت میں طول ہے اور جم ف = $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$
اور پیچیدگی چوڑائی کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

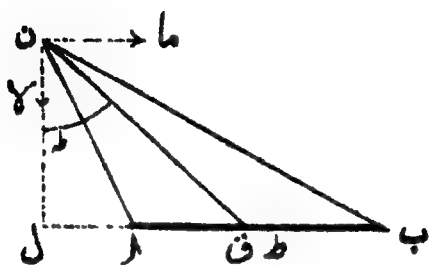
چودھواں باب کشش اور قوت

۲۷۶۔ مادہ کے ذرات کے درمیان کشش کا کلیہ جس کو نیوٹن کا کلیہ کشش بھی کہتے ہیں حسب ذیل ہے:۔ مادہ کا ہر ایک ذرہ مادہ کے ہر دیگر ذرہ کو ایسی قوت کے ساتھ کھینچتا ہے جو کیتوں کے حاصل ضرب کے با راستہ اعلان کے درمیانی فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

اس لئے m اور m' گرام کی کیتوں کے درمیان جو ایک دوسرے سے $\frac{1}{100}$ ڈائن کے مساوی ہوتی ہے جہاں لائن میٹر کے فاصلہ پر ہوں کشش $\frac{1}{10000}$ ہے جس کی قیمت دفعہ مابعد میں معلوم کی جائیگی۔ اس مقدار جو کشش کا مستقل کہتے ہیں۔

اس منزل پر طالب علم کو چاہیے کہ اوپر کے کلیہ کو بطور مفروضہ تسلیم کرے۔ اس کا کوئی باقاعدہ ثبوت فی الحال نہیں دیا جاسکتا ہے تاہم طالب علم فرض کر سکتا ہے کہ یہ کلیہ تمام عالم کائنات کے لئے صحیح ہے اور سیارات و اجرام فلکی کی حرکت کی توجیہ اس اصول کی بنا پر کافی طور پر ہو سکتی ہے۔ نیز اس حقیقت کی تصدیق علم حرکت کے اصولوں سے ہوتی ہے۔

ہم چند مثالیں ایسی بھی کوئے جن میں مربع بالعکس کے کلیہ کے علاوہ دیگر قوانین کشش فرض کر لئے جائیں گے۔ لیکن یہ مثالیں اس کائنات میں کسی حقیقی کشش کی بنا پر مبنی نہیں ہونگی۔



ن ل سے سلاخ پر عمود
ن ل (ع) سلاخ
اور فرض کرو کہ سلاخ
پر کوئی نقطہ ق ایسا ہے

اگر سلاخ کی عمودی تراش ک اور کثافت ہر ہو تو چوہ فی ط کی کشش
 ن پر کی اکائی گیت پر۔ $\frac{\text{ن فی}^2}{\text{ع ا ق ط ل ا}} - \frac{\text{ج ک م ر م ف ل ا}}{\text{ج ک م ر م ف ل ا}} - \frac{\text{ج ک م ر م ف ل ا}}{\text{ع}}$

کیونکہ لا = ع مسئلہ اور اس لئے مف لا = ع قسط = ع مسئلہ
بالآخر اگر ق ط بہت چھوٹا ہو تو کشش کی سمت ن ق کی سمت ہوگی۔

اس لئے اس کے اجزائے ترکیبی بالترتیب ن ل کی سمت ہیں اور اس پر
چوک مرچ طہ \times مف طہ اور چوک مرچ طہ \times مف طہ ہونگے۔

عمود دار

اس نے اگر کل سلاخ کی کشت کے اجزائے ترکیبی ن ل کی سمت میں اور
اس پر عمود وار سمت میں لا اور ماہوں اور اگر ناول ن ل اور
ل ن ب بالترتیب عم اور ب ہوں تو

۷- $\frac{\text{جرک مر} \times \text{جم طه فطر}}{\text{ع}} = \frac{\text{جرک مر}}{\text{ع}} [\text{جب طه}]$

$$= \frac{\text{جک م}}{ع} [\text{جب ب} - \text{جب م}] \dots \dots (۱)$$

اور ما = $\frac{\text{جک م} \times \text{جب م} \times \text{فرد}}{ع} = \frac{\text{جک م}}{ع} [\text{جم م}]$

$$= \frac{\text{جک م}}{ع} [\text{جم م} - \text{جم ب}] \dots \dots (۲)$$

اور حاصل کشش سرا ہو جو ن ل کے ساتھ زاویہ ذ بنائے تو

$$\text{سرا} = \text{لا} + \text{ما} = \frac{\text{جک م}}{ع} [\text{جب ب} - \text{جب م}] + \frac{\text{جک م}}{ع} [\text{جم م} - \text{جم ب}]$$

$$= \frac{\text{جک م}}{ع} [\text{جم م} - \text{جم ب}] = \frac{\text{جک م}}{ع} [\text{جم م} - \text{جم ب}]$$

$$= \frac{\text{جک م}}{ع} [\text{ان ب}] \dots \dots (۳)$$

$$\text{اور مس ذ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{جم م} - \text{جم ب}}{\text{جم م} + \text{جم ب}}$$

$$\text{اور اس لئے ذ} = \frac{\text{جم م} + \text{جم ب}}{\text{جم م} - \text{جم ب}} \dots \dots (۴)$$

اس لئے حاصل کشش کی سمت زاویہ ان ب کی تعریف کرتی ہے۔

نتیجہ صریح :- اگر سلاخ ا ب کا طول لا متناہی ہو تو $\frac{90}{90} = 1$ اور $\frac{90}{90} = 1$

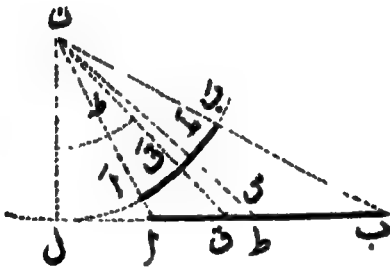
$$\therefore \text{سرا} = \frac{\text{جک م}}{ع}$$

پس ایک لا متناہی سلاخ کی کشش کسی بیرونی نقطہ کے فاصلہ کے بالعکس تناسب ہوتی ہے۔

۲۷۸۔ اگر ہم دقتہ ما قبل کے نتیجہ (۳) میں $ع = 1$ رکھیں جس کے یہ معنی ہیں کہ ہم نقطہ ن کو سلاخ کی سطح پر لیں تو ہمیں جواب لا متناہی حاصل ہوتا ہے

یہ ممکن ہے۔ ہماری تحلیل کی ظاہری ناکامی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے دوران عمل میں قی پر تراش کے ہر جزو کو ن سے متساوی الفصل فرض کیا تھا۔ اب اگر نقطہ ن سلاح پر ہوتو ن میں سے گزرنے والی عمودی تراش کے نقطوں کے فاصلے جو ن سے ہیں وہ صفر سے لیکر سلاح کے قطر تک مسلسل بدلنے میں اس لئے ان کو باہم مساوی فرض نہیں کیا جاسکتا۔

اس صورت میں دفعہ ۲۸۵ کی مشق (۲) میں مکرر بحث کی گئی ہے۔
۲۸۹۔ ایک سلاح ا ب ہے اور اس کے باہر ایک نقطہ ن ہے۔ ن سے سلاح ا ب پر عمود ن ل (= ع) نکالا گیا ہے اور ن کو مرکز مان کر نصف قطر ن ل کے ساتھ ایک دائرہ کھینچا گیا ہے۔ اس دائرہ کی قوس جو ن ل اور ن ب کے اندر منقطع ہوتی ہے وہ ا ب ہے۔ ثابت کرو کہ سلاح ا ب کی جو کشش ن پر ہے وہ مساوی ہے اس کشش کے جو قوس ا ب کی وجہ سے نقطہ ن پر ہے جب کہ قوس دائرہ کو اسی مادہ کی بنی ہوئی فرض کیا جائے جس سے



سلاح بنی ہوئی ہے۔
قی ط سلاح کا کوئی جزو
لو اور فرض کرو کہ اس کے
جواب میں مستند قوس کا
جزو قی ط ہے
قی ط کی کشش ن پر
قی ط کی کشش ن پر

$$\frac{ق\ ط}{ن\ ق} + \frac{ق\ ط}{ن\ ق}$$

$$= \frac{ق\ ط}{ق\ ق} \times \frac{ق\ ق}{ق\ س} \times \frac{ق\ ق}{ق\ س} = \frac{ق\ ط}{ق\ ق} \times \frac{ق\ ق}{ق\ س}$$

$$\text{لا} = \text{ھ مس ط رکھو جس سے لاکھ دو صفر سے مس} \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}} \\ \text{یعنی جب} \frac{\text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ا}^2 + \text{ا}^3} \text{ ہو جائیں گی۔}$$

$$\text{مجموع} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{\text{ا}} = \frac{\text{جب}^2}{\text{ا} + \text{ا}^2 + \text{ا}^3} \text{ جب ط فرط}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}} - \left[\frac{\text{جب}^2}{\text{ا} + \text{ا}^2 + \text{ا}^3} \right] \text{ جب} \frac{\text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ا}^2 + \text{ا}^3}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}} - \frac{\text{جب}^2}{\text{ا} + \text{ا}^2 + \text{ا}^3} \text{ جب} \frac{\text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ا}^2 + \text{ا}^3}$$

$$\text{لا} = \frac{\text{مجموع}}{\text{ا}} - \frac{\text{جب}^2}{\text{ا} + \text{ا}^2 + \text{ا}^3} \text{ جہاں م تختی کی کیت ہے۔}$$

مثالیں

۱۔ تین سلاخوں کو جن کی کیت فی اکائی طول یکساں ہے جوڑنے سے ایک مثلثی قالب بنایا گیا ہے۔ ان کی کشش قانون قدرت کے مطابق ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ذرہ کو اس مثلث کے اندر فی دائرہ کے مرکز پر رکھ دیا جائے تو یہ ذرہ متعادل رہے گا۔

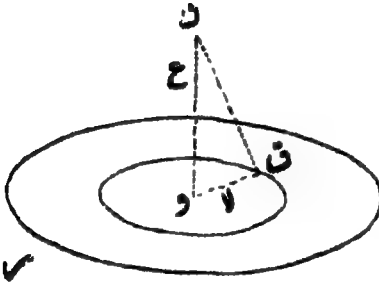
(دفعہ ۲۷۹ کا مسئلہ استعمال کرو)

۲۔ ثابت کرو کہ ایک یکساں سلاخ (ب) کی کشش نقطہ ن پر کی اکائی کیت پر (ا) ب

$$\text{کیت کے متوازی ایسے دہنی ہے جیسے} \frac{1}{\text{ن}} - \frac{1}{\text{ن} + \text{ب}}$$

اس لئے کل کشش = $\frac{2\pi R^2 \rho \times \text{ک فزلا} = \text{وغیرہ}}{2\pi R^2 \rho \times \text{ک فزلا} = \text{وغیرہ}}$

۲۸۱۔ ایک یکساں مستدیر چلی تختی ہے جس کا نصف قطر λ اور موٹائی k ہے۔ تختی کے محور پر ایک نقطہ



ن ہے جس کا فاصلہ مرکز سے e ہے۔
نقطہ ن پر تختی کی کشش دریافت کرو۔
تختی کے اس حصہ پر غور کرو جو

دو ہم مرکز دائروں نصف قطر λ اور $\lambda + \text{مفت لا کے درمیان}$ واقع ہو۔
اس حصہ کے کسی نقطہ ق کی کشش

ن پر کی اکائی کمیت پر ن ق کی سمت میں ہے اور اس کا جزو تحلیل ن و کی سمت میں

$$= \text{ج} \times \frac{\text{ق پر کے جزو کی کمیت}}{\text{ن ق}} \times \text{ہم و ن ق}$$

$$= \text{ج} \times \frac{\text{ق پر کے جزو کی کمیت}}{\text{ن ق}} \times \frac{e}{\text{ن ق}}$$

= جزوی رقبہ کے ہر ایک نقطہ کے لئے درست ہے۔

اس لئے اس جزوی رقبہ کی حاصل کشش

$$= \text{ج} \times \frac{\pi \lambda^2 \times \text{مفت لا} \times \text{ک مر} \times e}{\pi \lambda^2 \times \text{ک مر} \times e} = \frac{\pi \lambda^2 \times \text{مفت لا} \times \text{ک مر} \times e}{\pi \lambda^2 \times \text{ک مر} \times e}$$

جہاں مرتختی کی کثافت ہے فی اکائی رقبہ

اس لئے کل تختی کی کشش

$$= \frac{\pi \lambda^2 \times \text{ک مر} \times e}{\pi \lambda^2 \times \text{ک مر} \times e} = \frac{\pi \lambda^2 \times \text{ک مر} \times e}{\pi \lambda^2 \times \text{ک مر} \times e}$$

$$\pi_2 \text{ جک مرع} = \left[\frac{1}{\frac{1}{\pi} (1 + \frac{1}{\pi})} - \frac{1}{\pi} \right] \pi_2 \text{ جک مر} = \left[\frac{1}{\frac{1}{\pi} (1 + \frac{1}{\pi})} - \frac{1}{\pi} \right] \pi_2 \text{ جک مر}$$

اگر تختی کے کسی نصف قطر (۱) کے محاذی ن پر زاویہ θ بنے تو

$$\text{جم} = \frac{\text{ون}}{\text{ن}} = \frac{\frac{1}{\pi} (1 + \frac{1}{\pi})}{\frac{1}{\pi} (1 + \frac{1}{\pi})}$$

اور تختی کی مائل کشش جو مرکز جان و کی سمت میں عمل کرتی ہے

$$\pi_2 \text{ جک مر} = [1 - \text{جم}]$$

نتیجہ صریح - فرض کرو کہ تختی کا نصف قطر لا متناہی ہو جاتا ہے اور بناؤ علیہ زاویہ θ ہو جاتا ہے۔ جب حاصل کشش π_2 جک مر ہے جو تختی سے نقطہ ن کے فاصلہ $\frac{1}{\pi}$ کے فیر تاج ہے۔

پس ایک لا متناہی پتلی تختی کی کشش کسی نقطہ ن پر جو تختی سے محدود فاصلہ پر ہوں کے فاصلہ پر منحصر نہیں ہوتی اور حاصل ضرب π_2 جک مر تختی کی کثیت فی اکائی رقبہ کے مساوی ہوتی ہے۔

۲۸۲ - اکائی کثیت کا ایک ذرہ ایک پتلی کشش کرنے والی سطح میں سے ایک جانب سے دوسری جانب عمود وار گزرتا ہے۔ بناؤ کہ ذرہ پر سطح کی کشش میں کیا تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ سطح کے مختلف جانبوں پر دو نقطے ن اور ن کے ایسے ہیں جو سطح کے لا انتہا قریب ہیں اور ن سطح مذکور پر عمود ہے۔ سطح پر ایک چھوٹا سا دائرہ ایسا کھینچو جس کا محور ن ن ہو اور جس کا رقبہ $\frac{1}{\pi}$ ہو۔ سطح کے باقی ماندہ حصہ کو ب سے دور کر دو۔



تب ن پر کی کشش = ل کی کشش ن پر + ب کی کشش ن پر۔ (۱)

اور ن پر کی کشش = ا کی کشش ن پر + ب کی کشش ن پر ... (۲)
جب چونکہ ن اور ن دونوں سطح کے انتہا قریب ہیں اس لئے انتہا میں
سطح کے حصہ ب کی کشش نقطہ ن پر = حصہ ب کی کشش نقطہ ن پر۔
 نیز کشش کی حد تک حصہ ا کو نقطہ ن سے وہی نسبت ہے جو ایک لامتناہی
مستوی کو محدود فاصلہ پر کے ایک نقطہ سے ہے۔

اور حسب سابق دفعہ حصہ ا کی کشش ن پر = ۲۲ جہ مرک
اور حصہ ا کی کشش ن پر = ۲۲ جہ مرک

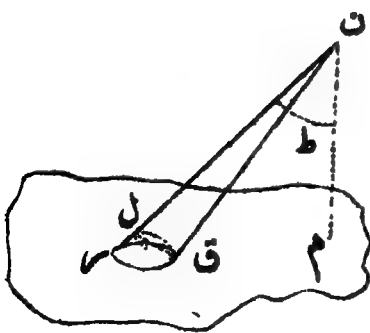
اس لئے (۱) اور (۲) سے عل تفریق سے حاصل ہوتا ہے

ن پر کی کشش - ن پر کی کشش = ۲۲ جہ مرک

اس لئے جب اکائی کثیت کا ذرہ کسی پتلی سطح کے ایک جانب کے لا انتہا قریب
نقطہ سے سطح کے دوسری جانب لا انتہا قریب نقطہ تک سطح کے علی القواکم گزرتا
ہے تو سطح کی جو کشش اس ذرہ پر ہے اس میں بقدر ۲۲ جہ مرک کے تبدیلی
واقع ہو جاتی ہے اور بناء علیہ تبدیلی سطح کی موٹائی اور مقام گزر کی کثافت پر
مختصر ہوتی ہے۔

۲۸ ۳۰ - ثابت کرو کہ ایک مستوی پترے کی بیرونی نقطہ پر کشش کا پترے کی

عادی سمت میں جزو تجلیلی جہ م۔
ہوگا جہاں پترے کی فی اکائی رقبہ
کثیت م ہے اور وہ جسم زاویہ
ہے جو پترے کے محاذی ن پر
بننا ہے۔



فرض کرو کہ قی مسا پترے کا
کوئی بہت چھوٹا جند ہے جس کے
محاذی م ن پر جسم زاویہ م
بننا ہے۔ نیز فرض کرو کہ ن ق یا

ن س = ۱

تب انتہائیں ن پلس جزو کی کشش = جرم \times رقبہ سراق
ن م پترے پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ ق ل خط ن سا پر عمود ہے
تب \angle سراق ل = ۹۰ \angle ق سراق ل = \angle سراق ن م = ط

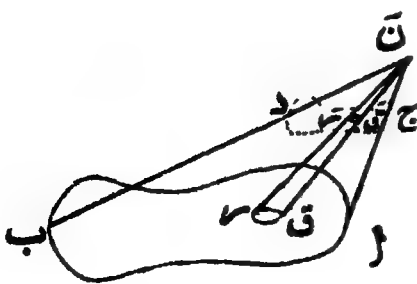
ن پرق مرکی کشش کا جزو تخلیلی ن م کی سمت میں
= جرم \times رقبہ سراق \times جرم ط = جرم \times رقبہ ق ل
ن ق \times جرم م = جرم \times مفع
پس پترے پر علی القوائم سمت میں ن پر پترے کی کشش کا جزو تخلیلی

= \angle جرم \times مفع = جرم سے جہاں سے وہ مجسم زاویہ ہے

جو کل پترے کے محاذی ن پر بنتا ہے۔

۲۸۴ - ایک یکساں مخروط کے تمام مقطوع جن کی موٹائی مساوی ہے اور جن کے مستوی رخ مخروط کے قاعدہ کے متوازی ہیں مخروط کے راس پر مساوی کشش رکھتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب اور ج د ایک مخروط کی دو تراشیں ہیں جو مخروط کے قاعدہ کے متوازی ہیں اور جن کی موٹائیاں ایک چھوٹی مقدار د کے مساوی ہیں۔



فرض کرو کہ ایک چھوٹا مخروط جس کا راس ن اور ایسی زاویہ بہت چھوٹا ہے، ان تراشوں کو بہت چھوٹے منحنیات ق سراق اور ق م میں قطع کرتا ہے۔

چونکہ ق سا اور ق سا متساوی معنی ہیں اس لئے اُن کے رقبے اور بناؤ علیہ ان کی مٹائیاں مساوی ہونے کی وجہ سے اُن کی کمیتیں، راس ن سے ان معنیوں کے فاصلوں کے مربعوں کے متناسب ہونگی۔

$$\text{اس لئے } \frac{\text{ن ہرق سا کی کشش}}{\text{ن ق سا}} = \frac{\text{رقبہ ق سا}}{\text{ن ق سا}} \div \frac{\text{رقبہ ق سا}}{\text{ن ق سا}}$$

$$= \frac{\text{رقبہ ق سا}}{\text{رقبہ ق سا}} \times \frac{\text{ن ق سا}}{\text{ن ق سا}} = \frac{\text{ن ق سا}}{\text{ن ق سا}} = 1$$

چونکہ متناظر اجزاء ق سا اور ق سا کی کششیں مساوی ہیں اس لئے کل رقبوں اب اور ج د کی کششیں بلحاظ مقدار اور سمت کے برابر ہونگی۔

اس لئے عمل جمع سے ایک ہی موٹائی کے دو ناقص مخروطوں کی کشش اُس مخروط کے راس پر جس سے یہ ناقص مخروط حاصل کئے گئے ہوں مساوی ہوتی ہے۔

۲۸۵- مشق ۱- ایک یکساں جسم قائم مستطیل مخروط ہے جس کی بلندی ۵ اور راسی ۱۰ ہے۔ اس کی کشش اس مخروط کے مستوی قاعدہ کے مرکز و پر معلوم کرو۔

اگر قاعدہ کے اوپر اونچائی لا پر ایک مستوی تراش لی جائے اور اس کے مساوی مرکز و پر ۲۰ ہے۔

$$\text{جسم ب} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + (\text{لا} - ۵)^2 \text{مسو}}} = \frac{\text{لاجمو}}{\sqrt{\text{لا}^2 - ۲۰\text{لاجمو} + ۵۰\text{جسم ب}}}$$

اگر اس تراش کی موٹائی صاف لا ہو تو اس کی کشش

$$= ۲۰ \text{ جسم ب} = ۲۰ \left[\frac{\text{لاجمو}}{\sqrt{\text{لا}^2 - ۲۰\text{لاجمو} + ۵۰\text{جسم ب}}} - ۱ \right] \text{ دفعہ ۲۸۱ کی رو سے}$$

اس لئے کل مخروط کی کشش

اس سے آسانی ن پرکشش πr جہ مرجع حاصل ہوتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک یکساں اسطوانہ ہے جس کی بلندی h ، نصف قطر a اور کثافت ρ ہے۔ اس کے محور پر اس کے باہر ایک نقطہ N ہے جس کا فاصلہ اس کے سرے سے c ہے۔

ثابت کرو کہ اسطوانہ کی کشش اس نقطہ پر $\frac{\pi \rho a^2}{2} \left[\frac{h}{a} - \frac{1}{c} \right]$ ہے۔

۲۔ ایک کرہ میں سے جس کا نصف قطر a اور کثافت ρ ہے ایک قطعہ کا اگیا ہے ثابت کرو کہ اس قطعہ کی کشش اس کے راس پر ایک کالی کثیت کے ذریعہ

$$\frac{\pi \rho a^2}{2} \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right] \text{ ہے اور اس قطعہ کے قاعدہ کے مرکز پر}$$

$$\frac{\pi \rho a^2}{2} \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right] \left[\frac{1}{2} (h - a) \right] \text{ ہے جہاں } h \text{ قطعہ کی بلندی ہے}$$

۳۔ ایک ٹھوس یکساں نصف کرہ ہے جس کا نصف قطر a ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے محور کے ایک نقطہ پر نصف کرہ کی کشش صفر ہے جہاں اس نقطہ کا مرکز سے فاصلہ c مساوات $\frac{1}{2} (h - a) = \frac{1}{2} (h - a) + \frac{1}{2} (h - a) = 0$ کی اصل ہے۔

ثابت کرو کہ $\frac{1}{2} (h - a) = \frac{1}{2} (h - a)$ تقریباً

۴۔ ایک قائم مستدیر مخروط ہے جس کی کثافت ρ ہے۔ اس کا محور اخصابی اور وہ اس کے اوپر کی طرف ہے اس کے محور پر اس سے c فاصلہ پر ایک نقطہ N ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ پر مخروط کی کشش ہے

$$\frac{\pi \rho}{2} \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right] \left(\frac{1}{2} (h - a) \right)$$

جہاں a مخروط کا راسی زاویہ ہے اور h وہ زاویہ ہے جو قاعدہ کے نصف قطر کے محاذی N پر بنتا ہے۔

۵۔ ایک یکساں بجوت پتے مقطع مخروطی کے متوی سروں کے نصف قطر مساوی

ہیں۔ مخروط کے نقطہ رأس پر اکائی کیت کا ایک ذرہ ہے جسے مقطوع مخروط کھینچتا ہے۔ ثابت کرو کہ کشش ۲۲ جہر جب حجم مرکز سے ہے جہاں ۲ مخروط کا راسی زاویہ ہے اور مخروط کی سطحی کثافت ہے

۶۔ ایک متجانس قائم مستطی اسطوانہ ہے جس کا طول ایک سمت میں لامتناہی ہے اور دوسرے سرے کی تراش کوڑوں پر علی القوائم ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کی کشش اس سرے کے مرکز پر $\frac{2}{3} \pi$ ہوگی جہاں ہم کیت ہے اسطوانہ کی نی اکائی طول اور اسطوانہ کے مستوی سرے کا نصف قطر ہے۔

۷۔ ایک انتصابی ٹیوں اسطوانہ ہے جس کی لمبائی ۱ ہے اور جس کے سرے کا نصف قطر ۱ ہے۔ اس کی کثافت ۱ ہے اور اس کے سرے اس کے کوڑوں پر علی القوائم ہیں۔ اس کو اس کے محور میں سے گزرنے والی سطح مستوی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ثابت کرو کہ ایک حصہ کی کشش اس کے قاعدہ کے مرکز پر ۱ جہر مرکز $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ہے

۸۔ نیز معلوم کرو کہ مائل کشش محور کے ساتھ کیا زاویہ بناتی ہے۔ ایک متجانس منشور کا طول لامتناہی ہے اس کی تراش ایک مساوی الاضلاع مثلث ۱ ب ج ہے۔ ثابت کرو کہ منشور کی کشش ۱ پر $\frac{2}{3} \pi$ ہے جہاں ہم منشور کی نی اکائی طول کیت ہے اور ۱ مثلث کے ایک ضلع کا طول ہے۔

۹۔ ایک ناقصی قرص کی موٹائی ۱ اور کثافت ۱ ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی کشش اس کے مرکز پر $\frac{1}{2} \pi$ ہے جہاں ۱ اور ۲ ب اس کے نیم محور ہیں۔ [مطلوبہ کشش = $\frac{1}{2} \pi$ جبکہ ہر فرط ذرہ ۱ جہر ۱ جہاں رکی حدود صفر سے ۱۔ ز جہر ۱

اور ط کی حدود صفر سے ۲ ہیں۔ اس طرح دوران عمل میں ایک لامتناہی مقدار مرکز ر آجاتی ہے جبکہ صفر ہے۔ اس سے بچنے کے لئے اس کے گرد ایک دائرہ کھینچو

جس کا نصف قطر $\frac{1}{2}(a+b)$ ہو۔ اس دائرہ کی حاصل کشش سرچا تشاکل سے صفر ہے۔ اب تکملہ کی قیمت معلوم کر دیجکہ ر کی حدود سے $\frac{1}{2}(a+b)$ اور $\frac{1}{2}(a-b)$ کی حدود صفر سے $\frac{1}{2}(a+b)$ ہیں۔

۱۰۔ ایک ناقصی قرص کی کیت m اور نیم محور a اور b ہیں اس مفروض پر کلک کشش $\frac{m}{a+b}$ ہے ثابت کرو کہ نقطہ $(a, 1)$ پر اس کی کشش کے اجزائے ترکیبی محوروں کی سمتوں میں $\frac{m}{a+b} \times \frac{a}{r}$ اور $\frac{m}{a+b} \times \frac{b}{r}$ ہیں۔

اس سے مستنبط کرو کہ ایک لامتناہی متجانس ناقصی اسطوانہ کی کشش کے (جو کلیہ قدرت کے مطابق ہے) اجزاء ترکیبی نیم محوروں کے متوازی $\frac{m}{a+b} \times \frac{a}{r}$ اور $\frac{m}{a+b} \times \frac{b}{r}$ ہونگے جہاں a اور b تراش کے نیم محور ہیں اور ہر کثافت ہے۔

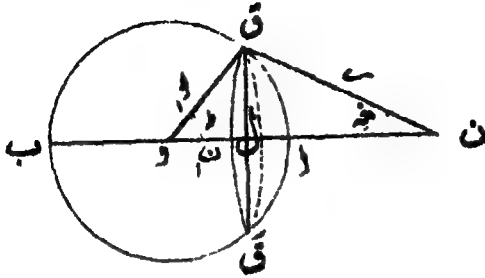
۱۱۔ ثابت کرو کہ نصف قطر r کے ایک مستدیر قرص کی کشش جس کا کلیہ تجاذب $\frac{m}{a+b}$ (فاصلہ) $\frac{m}{a+b} \times \frac{a}{r}$ یا $\frac{m}{a+b} \times \frac{b}{r}$ ہوگی جب اس کے کہ $a > b$ ۔

m قرص کی کیت ہے اور مجذوب نقطہ قرص کے مستوی میں واقع ہے اور مرکز سے فاصلہ c پر ہے۔

۱۲۔ ایک یکساں مستدیر مستوی حلقہ کی کشش اس کی سطح مستوی میں کسی بیرونی نقطہ پر معلوم کر دیجکہ کشش کا قانون فاصلہ کی ساتویں قوت کا مقلوب ہے۔

۲۸۶۔ ایک پتلے یکساں کردی خول کی کشش کسی اندرونی یا بیرونی نقطہ N پر معلوم کرو۔

فرض کرو کہ کردی خول کا نصف قطر a ہے، k اور ہر بالترتیب اسکی



مرئی اور کثافت

ہیں اور ج نقطہ

ن کا کہہ کے مرکز

و سے فاصلہ ہے

اگر ق خول

پر کا کوئی نقطہ ہو،

ق ل خط ون پر

عمود ہو اور ط = ح ون وق

تو جس دائرہ کا نصف قطر ل ق ہے اس پر کے سب نقطے ن سے متساوی الفضل

ہونگے اور ہر ایک کی کشش کا جزو تحلیل ن و کی سمت میں ∞ جم ف

اس لئے خول کا جو حصہ قوس ل نصف ط سے مرسم ہوتا ہے اس کی حاصل کشش

$$= \text{جرک مر} \times \frac{\text{ل نصف ط} \times \pi \times \text{ل جب ط}}{\text{ن ق}^2} \times \text{جم ف}$$

$$\text{اب} \quad \text{سرا} = \text{ل} + \text{ج} - ۲ = \text{ل ج} \text{جم ط}$$

اس لئے س نصف سرا = ل ج جب ط نصف ط

اس لئے اس جزوی حصہ کی کشش

$$= \pi \times \text{جرک مر} \times \frac{\text{ل ج}}{\text{سرا}} \times \text{جم ف} \times \text{س نصف سرا} = \pi \times \text{جرک مر} \times \frac{\text{ل ج}}{\text{سرا}} \times \text{جم ف} \times \left(\frac{\text{سرا} + \text{ج} - \text{ل}}{\text{سرا}} \right) \times \text{ن نصف سرا}$$

اولاً فرض کرو کہ ن خول کے باہر ہے یعنی ج < ل۔

اس لئے اگر ہم اوپر کی مقدار کو سرا کی قیمتوں ن ل سے ن ب جرک

یعنی (ج - ل) سے (ج + ل) تک تکمل کریں تو ہمیں کل خول کی حاصل کشش

معلوم ہو جائے گی۔

$$\therefore \text{حاصل کشش} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \pi \text{ جک مر } \frac{1}{\text{ج}} \times \left(\frac{\text{س} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\text{س}} \right) \text{ فرسا}$$

$$= \pi \text{ جک مر } \frac{1}{\text{ج}} \left[\frac{\text{س} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\text{س}} - \frac{\text{س} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\text{س}} \right]$$

$$= \pi \text{ جک مر } \frac{1}{\text{ج}} \left[\left(\frac{\text{س} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\text{س}} \right) - \left(\frac{\text{س} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\text{س}} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi \text{ جک مر } \frac{1}{\text{ج}}}{\frac{1}{\text{ج}}} = \pi \text{ جک مر } \frac{1}{\text{ج}}$$

پس کشش اتنی ہی ہے جتنی کہ خول کی کل کمیت کو پکٹف کر دینے کی صورت میں ہوگی۔
 مثلاً مثلاً فرض کرو کہ نقطہ ن خول کے اندر مقام ن پر ہے اور اس لئے $\text{ج} > \frac{1}{2}$ ۔
 اب ٹھوس کرہ کی حدود ن سے ن تک یعنی $\frac{1}{2} - \text{ج}$ سے $\frac{1}{2} + \text{ج}$ تک ہیں

$$\text{پس حاصل کشش} = \int_{\frac{1}{2}-\text{ج}}^{\frac{1}{2}+\text{ج}} \pi \text{ جک مر } \frac{1}{\text{ج}} \times \left(\frac{\text{س} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\text{س}} \right) \text{ فرسا}$$

$$= \pi \text{ جک مر } \frac{1}{\text{ج}} \left[\frac{\text{س} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\text{س}} + \frac{\text{س} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\text{س}} \right]$$

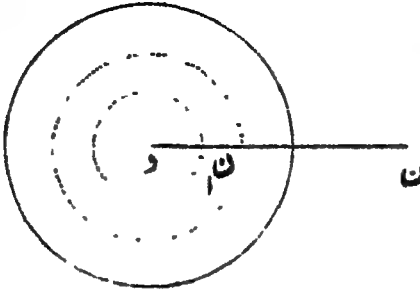
$$= \pi \text{ جک مر } \frac{1}{\text{ج}} \left[\left(\frac{\text{س} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\text{س}} \right) - \left(\frac{\text{س} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\text{س}} \right) \right]$$

پس یکساں پتلا کرہ کی خول، بیرونی نقطہ کو اس طرح کھینچتا ہے گویا کہ اس خول
 کی کل کمیت مرکز پر کٹف ہے لیکن اندرونی نقطہ پر اس کی کشش صفر ہوتی ہے۔

۲۸۷۔ ایک یکساں ٹھوس کرہ کی کشش کسی بیرونی یا اندرونی نقطہ پر معلوم کرو۔

یہ تصور کرو کہ کرہ ہم مرکز خولوں کی مانند ہی تعداد سے بنا ہوا ہے جن میں سے

ہر ایک کی موٹائی لا انتہا کم ہے۔



اگر نقطہ ن کر کے
باہر ہو تو یہ ان خولوں
میں سے ہر ایک کے
باہر ہو گا اور حسب
سابق ہر ایک خول کی
کشش ن پر اتنی
ہی ہو گی جتنی کہ خول

کی کل کمیت کو دہر کثف کر دینے سے ہوتی یعنی = $\frac{\text{خول کی کمیت}}{و^2}$
اس لئے ن پر کل کشش = $\frac{\text{کل خولوں کی کمیتوں کا مجموعہ}}{و^2}$ = $\frac{\text{کل کر کے کی کمیت}}{و^2}$
پس بیرونی نقطہ پٹھوس کر کے کشش اتنی رہے جتنی کہ کر کے کی کل کمیت کو دہر کثف
کر دینے سے ہوتی۔

اگر نقطہ کر کے اندر واقع ہو جیسا کہ ن پر تو ہم دیکھ چکے ہیں کہ ان سب
خولوں کی کشش ن پر جن کا نصف قطر د ن سے بڑا ہے صفر ہے۔ اس لئے
ہمیں صرف انہی خولوں کی کشش کو محسوب کرنا چاہیئے جن کا نصف قطر ا و ن
یعنی ج سے کم ہے۔
موجزا ذکر خولوں کے لئے ن، ایک بیرونی نقطہ ہے اور ان میں سے

کسی ایک خول (نصف قطرا) کی کشش ن پر

$$= \frac{\text{خول کی کمیت}}{و^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^2 \rho}{و^2}$$

ہمیں اس مقدار کی قیمت صفر سے لیکر ج تک کے لئے تکمل کرنا چاہیئے
اس لئے حاصل کشش ن پر = $\frac{4}{3}\pi \rho \int_0^R \frac{r^2}{و^2} dr$ = $\frac{4}{3}\pi \rho \frac{R^3}{3}$ = $\frac{4}{9}\pi \rho R^3$

اب س ق میں پر سال اور سال عمود نکالو
تب رقبہ سراس = عمودی تراش سال کا رقبہ × قط (زاویہ ل سراس)
= عمودی تراش سال کا رقبہ × قط (وسراق)

کیونکہ وسرا اور سراق بالترتیب سراس اور سال پر عمود ہیں
اسی طرح سے رقبہ سراس = عمودی تراش سال × قط (وسراق)

$$\therefore \frac{\text{رقبہ سراس}}{\text{رقبہ سراس}} = \frac{\text{عمودی رقبہ سال}}{\text{عمودی رقبہ سال}} = \frac{\text{ق سراس}}{\text{ق سراس}}$$

اس لئے سراس کی کشش ن پر = $\frac{\text{ق سراس} \times \text{سراس}}{\text{ق سراس} \times \text{سراس}}$ = مساوات (۱) کی مدد سے
سراس کی کشش ن پر = $\frac{\text{ق سراس} \times \text{سراس}}{\text{ق سراس} \times \text{سراس}}$

پس ان جزدی رقبوں کی کششیں ن پر مساوی ہیں اور مساوات (۲) سے ظاہر
ہے کہ ان کے عمل کی سمتیں ون کے ساتھ مساوی زاویہ بناتی ہیں اس لئے
ان کا حاصل ون کی سمت میں عمل کرتا ہے۔

نیز اگر اس چھوٹے سے مخروط کا حجم زاویہ جوق پر بتا ہے مت س ہو اور
فی اکائی رقبہ خول کی کثیت ہو تو

$$\text{ن و کی سمت میں سراس کی کشش کا جزو ترکیبی} \\ = \frac{\text{جم رقبہ سراس}}{\text{ن سراس}} \times \text{جم ون سراس} = \frac{\text{جم رقبہ سراس} \times \text{جم ون سراس}}{\text{ن سراس}}$$

$$= \frac{\text{جم رقبہ سراس} \times \text{جم ل سراس}}{\text{ن سراس}} = \frac{\text{جم رقبہ سال}}{\text{ن سراس}} = \frac{\text{جم ق ل سراس}}{\text{ن سراس}}$$

$$= \frac{\text{جم رقبہ سراس}}{\text{ون سراس}}$$

$$\text{اس لئے خول کی مجموعی کشش} = \frac{\text{جم رقبہ سراس}}{\text{ون سراس}} = \frac{\text{جم رقبہ ل سراس}}{\text{ون سراس}} = \frac{\text{جم رقبہ ل سراس}}{\text{ون سراس}}$$

$$\frac{\text{خول کی کثرت}}{\text{ون}} = \pi \times \frac{\text{م}}{\text{ون}}$$

چونکہ سراس اور سراس کی کششیں مساوی ہیں اس لئے ظاہر ہے کہ مقلوب فقط ق کے دائیں طرف کا خول کا حصہ اور بائیں طرف کا خول کا حصہ ن کو مساوی قوت سے کھینچتے ہیں۔ نیز ق میں سے گزرنے والی وہ مستوی سطح جو ون پر علی القوام ہے ان تمام نقطوں کا طریق ہے جہاں ن سے خول کے ماس، خول کو مس کرتے ہیں بالفاظ دیگر یہ مستوی سطح بلحاظ خول کے ن کا قطبی مستوی ہے۔ پس ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ ن کی قطبی سطح مستوی خول کو جن دو حصوں میں تقسیم کرتی ہے ان کی کششیں ن پر مساوی ہوتی ہیں۔

ثانیاً۔ ق پر کی کشش پر غور کرو۔

سراس کی کشش ق پر = رقبہ سراس ÷ رقبہ سراس کی ق سراس ق سراس = ۱

سراس کی کشش ق پر ق سراس ق سراس ق سراس ق سراس

اس لئے سراس اور سراس کی حامل کشش ق پر صفر ہے۔ اسی طرح باقی ہر ایک جزوی مخروط کے لئے پس ن خول کی کشش ق پر صفر ہے۔

نیز ق میں سے گزرنے والی اور و ا پر علی القوام سطح مستوی کے دائیں اور بائیں طرف خول کے جو حصے ہیں ان کی کششیں ق پر مساوی ہیں۔

۲۸۹۔ ایک بلندی سطح کی چوٹی پر جس کی بلندی سطح سمندر سے لاہے جاؤں ارض کی قیمت معلوم کرو۔

اگر زمین کا نصف قطر ہ ہو اور اس کی سطح پر جاؤں ارض کی وجہ سے کشش ج ہو تو سطح سمندر سے بلندی لاپہ کشش (۱+۱/۲) ہوگی جہاں ج = ۱/۲

اور اس لئے کشش

$$ج = \frac{1}{2(1+1)} = ج [1 - \frac{1}{2}] \text{ کیونکہ } \frac{1}{2} \text{ چھوٹا ہے}$$

اگر سطح مرتفع کے اود کی کثافت ہر جہاں کہ سطح مرتفع کو تنجاس فرض کر لیا جائے تو اس کی کشش اس کی سطح کے قریب کے نقطہ پر دفعہ ۳۸۱ کی مد سے π^2 ج لاہر ہوگی۔

اب اگر زمین کی اوسط کثافت ک ہو

$$تو ج = ج \times \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2 ج ک}{3}$$

اس لئے سطح مرتفع کی کشش = $\frac{3}{2} \frac{لام}{ج}$

اس لئے سطح مرتفع کی چوٹی پر کل کشش ج

$$ج = ج [1 - \frac{1}{2}] + \frac{3}{2} \frac{لام}{ج} = ج [1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{لام}{ج}]$$

اگر ہم تقریبی طور پر یہ مان لیں کہ سطح زمین کے نزدیک کی چٹانوں کی کثافت ہر کل زمین کی اوسط کثافت ک کا تقریباً نصف ہے تو اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ج = ج [1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}]$$

۲۹۰۔ تجاذب کے مستقل کی قیمت۔

دفعہ ۲۸۷ کے مسئلہ کی مد سے اور سطح زمین پر جاذبہ ارض کی وجہ سے ہر ارض کی معلوم قیمت کی مد سے ہم تجاذب کے مستقل کی تقریبی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر اکائیوں کے کسی نظام کے بوجب زمین کا نصف قطر مساوی اس کی
کیٹ م ہو تو زمین کی سطح پر کی اکائی کیٹ پر اس کی کشش

$$= \frac{1 \times M}{r^2}$$

$$\therefore \text{ج} = \frac{M}{r^2} \dots \dots \dots (1)$$

سنٹی میٹر گرام سکند اکائیاں :-

$$\text{اس نظام میں } M = \frac{1}{1000} \times \pi \times r^2 \times \text{اوسط کثافت}$$

اور $r = 6371 \times 10^3$ سنٹی میٹر
اب زمین کی اوسط کثافت اضافی مٹر بواے کی حال ہی کی تحقیقات کے
بوجب 5.524 ہے۔

اس لئے (۱) سے

$$981 = \frac{M}{r^2} = \frac{1}{1000} \times \pi \times r^2 \times 5.524$$

$$= \frac{1}{1000} \times \pi \times 6371^2 \times 5.524$$

$$\text{پس ج} = 981 \times 1000$$

یعنی اگر ایک ایک گرام کی کیتوں کو دو نقطوں پر جن کا درمیانی فاصلہ
ایک سنٹی میٹر ہو کثافت کر دیا جائے تو ان کے درمیان کشش 981×1000 ڈائن
کے مساوی ہوگی۔

یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ 3844 گرام کی دو مساوی کیتوں کو
دو نقطوں پر جن کا درمیانی فاصلہ ایک سنٹی میٹر ہو کثافت کرنے سے ان کی
بہمی کشش ایک ڈائن کے مساوی ہوگی۔

فٹ پونڈ سکند اکائیاں :-

اگر زمین کو تقریباً 4000 میل کے نصف قطر کا ایک کرہ فرض کیا جائے تو (۱) کے

موجب $\frac{1}{4} \times 552 \times 280 \times 2 \dots \times \frac{100}{4} = 352$

اس لئے $h = 10 \times 10^{-9}$ تقریباً

دو بکسوں کے درمیان ایک پونڈ ہے اور ان کے مرکزوں کے درمیان ایک فٹ کا فاصلہ ہے۔ ان کے درمیان کشش 1.5×10^{-9} پونڈل ہوگی۔

جہ کے ابعاد - اگر جہ کے ابعاد کو [جا] سے تعبیر کیا جائے اور حسب معمول
کیسٹ طول اور رت کی اکائیوں کو [م] [ل] [ت] سے تعبیر کیا جائے تو مساوات
(۱۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{[a]}{[c]} = \frac{[a]}{[b]} \times \frac{[b]}{[c]}$$

۲۰ [ج] - [م] ' [ل] ' [ش] -

مثالیں

۱۔ چاندی کے ایک کلو کا لطف قطر ۵۵ سنتی میٹر ہے اور سونے کے ایک کلو کا نصف قطر ۳۰ سنتی میٹر ہے۔ ان کے مرکبوں کے درمیان فاصلہ ۱۷ سنتی میٹر ہے چاندی کی کثافت اضافی $10\frac{1}{4}$ اور سونے کی $19\frac{1}{4}$ ہے۔

ثابت کرو کہ ان کے درمیان ایک نقطہ ہے جس کا فاصلہ چاندنی کے کرہ کے مرکز سے ۱۱ سنی میٹر ہے دونوں کرہوں کی مجموعی کشش صفر ہے۔

۲۔ قریم کے ذریعے ایک ذرہ کا وزن ظاہر کرو جبکہ اسے زمین کے مرکز سے باہر لایا جائے اور اسے بند رنج لگاتاری پرے جائیں۔

۴۴۔ ثابت کرو کہ جاذبہ ارض نے زیر عمل کسی کیفیت کو زمین کے مرکز سے اس کی سطح پر لانے میں جو کام سر انجام دینا پڑا ہے وہ اتنا ہی ہوتا ہے جتنا کہ اسے سطح سے لٹا دینا ہی تک لے جانے میں سر انجام دینا پڑتا ہے۔ زمین کو متجانس کر مان لیا جائے۔

۴۔ اگر زمین کو ردی فرض کیا جائے اور اس کی سطح پر یکساں گہرائی ہو گا ایک سمندر فرض کیا جائے تو ثابت کرو کہ جاذبہ ارض کی قیمت سمندر کی تہ پر چوٹی کی نسبت بقدر تقریباً $\frac{1}{2}$ (۱/۲) کم (۱/۲) کے زیادہ ہوگی جہاں ہر سمندر کی کثافت ہے اور کہ زمین کی اوسط کثافت ہے۔

۵۔ اگر زمین کی نصف یکیت کو ایک نہایت ہی پتلے یکساں بیرونی خول میں کثیف کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ خول میں دائروی خلا کے مرکز پر جاذبہ ارض کی شدت اس کی معمولی قیمت کا ایک چوتھائی کم ہوگی۔

۶۔ ایک کرہ کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی سطح سے۔ ثابت کرو کہ ماس کشش کرہ کے نصف قطر کی ایک تہائی گہرائی پر بڑی سے بڑی ہوگی اور اس کی قیمت وہاں سطح پر کی قیمت کا $\frac{1}{2}$ (۱/۲) ہوگی۔

۷۔ اگر ایک کرہ یکساں کثافت کی ہم مرکز ہتوں پر مشتمل ہو تو ثابت کرو کہ اس کی کشش اس کے حجم کے ہر نقطہ پر سادی ہوگی بشرطیکہ ہر نقطہ پر کثافت مرکز سے فاصلہ کے بالعکس بدلتی ہو۔

۸۔ ایک ٹھوس کرہ کا نصف قطر ہے اس کے کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے r ہے اس کی کثافت k ($\frac{1}{r}$) ہے کہ کے کسی بیرونی یا اندرونی نقطہ پر کشش معلوم کرو۔

۹۔ اگر ایک ٹھوس کرہ کی کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کا تناسب ہو تو ثابت کرو کہ جیسے جیسے کرہ میں داخل ہوں کہ کی کشش بڑھتی جاتی ہے بشرطیکہ سطح پر کی کثافت کرہ کی اوسط کثافت کے دو تہائی سے کم ہو۔

۱۰۔ ایک پتلے یکساں نصف کرہ کی خول کا نصف قطر a اور کثیف m ہے اس کے اس قطر پر جو خول کے کنارے کے مستوی پر عمود وار ہے ایک نقطہ لیا گیا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے r ہے ثابت کرو کہ اس نقطہ پر خول کی کشش ہے

$$\frac{2\pi m}{a} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}}} \right]$$

۱۱۔ ایک ٹھوس متجانس نصف کرہ کے مستوی قاعدہ کے کنارے پر کوئی نقطہ لیا گیا ہے۔

لصف کرہ کی کشش اس نقطہ پر معلوم کر۔
 محدودوں کا مسبدا لو۔ قاعدہ کے مرکز ج میں سے ایک خط و لا لو اور وی اس
 قاعدہ پر عمود وار کھینچو۔ تب قطعی محدود را ط، ذ استعمال کرنے سے وی کی سمت میں
 کشش

$$= \frac{\text{فر} \times \text{رفرط} \times \text{رجب ط فرط}}{\text{جم ط}}$$

ر کی حدود صفر سے ۲۱ جم ذ جب ط ہیں کیونکہ کرہ کی سطح کی مسادات ہے

$$(۱-۱) + ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ = ۱۴ = ۱۴۱۲ = ۱۲ \text{ رجم ذ جب ط}$$

ط کی حدود صفر سے $\frac{۳۱}{۴}$ ہیں اور ذ کی - $\frac{۳۱}{۴}$ سے $\frac{۳۱}{۴}$ ہیں۔

اس لئے ہے = جم مر ۱۲ رجم ذ جب ط جم ط فرط فرط = $\frac{۱۲}{۳}$
 مرکز کی سمت میں کشش کا جزو ترکیبی لا

$$= \frac{\text{فر} \times \text{رفرط} \times \text{رجب ط فرط}}{\text{جم ط}} = \frac{۳۱ \text{ جم مر}}{۳}$$

یہ نتیجہ از خود ظاہر ہے کیونکہ صحتاً لصف کرہ کی کشش وج کی سمت میں مکمل کرہ کی کشش
 کا نصف ہوگی۔

تشاکل سے ظاہر ہے کہ کشش ویا کی سمت میں صفر ہے۔

پس حاصل کشش $\frac{۱}{۳} \times \text{سام} + \frac{۲}{۳}$ ہے جو وج کے ساتھ زاویہ مس $\frac{۱}{۳}$
 بنائی ہے۔

۱۲۔ ایک نصف کرہ کی پہاڑی کا لصف قطر اور کثافت مر ہے ثابت کر کہ اس کے
 قاعدہ کے جنوب تر نقطہ پر ظاہری عرض بلد میں بقدر $\frac{۱}{۳}$ کرہ کی کئی ہو جاتی ہے جہاں
 ک اوسط کثافت اور نصف قطر ہے زمین کا۔

۱۳۔ اگر زمین کے شمالی اور جنوبی نصف کرے بالترتیب یکساں کثافت مر اور ک
 کے ہوتے لیکن اوسط کثافت اتنی ہی رہتی جتنی کہ اب ہے تو ثابت کر کہ خط استوا پر

جاذبہ ارض کی قیمت موجودہ جاذبہ ارض کی قیمت کا

$$\sqrt{1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{m-k}{m+k} \right)^2} \text{ گنا ہوتی}$$

اور خط استوا پر شاقول کی سمت کا انحراف نقطہ راس سے

$$\text{مست } \left\{ \frac{2}{\pi} \frac{m-k}{m+k} \right\} \text{ ہوتا۔}$$

۱۴۔ اگر زمین کو کہ فرض کیا جائے اور اس کے گرد لغانی مخروط کی شکل کا ایک پہاڑ ہو جس کا نصف راسی زاویہ ہو اور پہاڑ کی کثافت زمین کی یکساں کثافت کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑ کی چوٹی پر جاذبہ ارض کی قیمت

$$\left\{ \frac{1 + \text{جب } 2 - \text{جم } 3}{2 \text{ جب } 2} \right\}$$

ہوگی جہاں ج جاذبہ ارض کی قیمت زمین کی سطح پر ہے۔

۱۵۔ معلوم کرو کہ کیا کشش کا کوئی اور کلیہ علاوہ فاصلہ کے مقلوب مربع کے ہو سکتا ہے جس سے کسی پتلے یکساں نصف کرہی خول کے کسی اندرونی نقطہ پر کشش صفر ہو۔

فرض کرو کہ کشش کا قانون $\frac{1}{r^2}$ ہے پس دفعہ ۲۸۶ کی رو سے

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \text{ (سما) فرض } = 0 \text{ لہذا ان تمام قیمتوں کے لئے جو اسے کم ہیں}$$

اس مساوات کو ج کے لحاظ سے تفریق کرنے سے

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \text{ (سما) فرض}$$

پھر (۱) کو د کے لحاظ سے تفریق کرتے سے

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \text{ (سما) فرض}$$

ان دو مساواتوں میں یکساں کو سا قط کر دینے سے

$$f(1+j) = f(1-j) \quad (1)$$

یہ نتیجہ دو کی تمام قیمتوں کے لئے اور ج کی ان تمام قیمتوں کے لئے جو اسے کم ہوں
دوسرا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $f(1) =$ مستقل ک فرض کرو

$$پس قوت کا صرف ایک ہی قانون ممکن ہے اور وہ $= \frac{f(1)}{r} = \frac{k}{r}$$$

۱۶۔ معلوم کرو کہ کیا کشش کا کوئی اور کلیہ ہو سکتا ہے سو اسے فاصلہ کے معکوب مربع
کے جس سے ایک کردی غول کی کشش کسی بیرونی نقطہ پر اتنی ہی ہو جتنی کہ غول کی کل کمیت
اس کے مرکز پر گنت کر دینے سے ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ کشش کا کلیہ $\frac{f(1)}{r}$ ہے۔ پس دندہ ۲۸۶ کے بموجب

$$11 \text{ جک } \frac{1}{r} \int_0^r \frac{f(1-j) - f(1+j)}{r} f(1+j) \text{ فرسا}$$

$$= 12 \text{ جک } \frac{1}{r} \int_0^r \frac{f(1-j)}{r} f(1+j) \text{ فرسا}$$

$$\text{اور اس لئے } \frac{1}{r} \int_0^r \frac{f(1-j) - f(1+j)}{r} f(1+j) \text{ فرسا} = 12 \text{ جک } f(1+j) \dots (1)$$

۱۷۔ کی سب قیمتوں کے لئے اور ج کی ان سب قیمتوں کے لئے جو اسے بڑی ہوں یہ نتیجہ
دوسرا ہے۔

لحاظ کے قریب کرنے سے

$$- \frac{1}{r} \int_0^r \frac{f(1-j) - f(1+j)}{r} f(1+j) \text{ فرسا}$$

$$+ \left[\frac{f(1-j)}{1-j} + \frac{f(1+j)}{1+j} \right] \frac{1}{r} \int_0^r f(1+j) \text{ فرسا}$$

$$= \int_{1-j}^{1+j} \frac{f(s)}{s^2} ds = \left[\frac{f(1-j)}{1-j} + \frac{f(1+j)}{1+j} \right] \quad \text{اور } j^2 = -1$$

ج اور ۱ کے لحاظ سے بالترتیب تفریق کرنے سے

$$= \left[\frac{f(1-j)}{1-j} + \frac{f(1+j)}{1+j} \right] j^2 + \left[\frac{f(1-j)}{1-j} + \frac{f(1+j)}{1+j} \right] j$$

$$= \int_{1-j}^{1+j} \frac{f(s)}{s^2} ds$$

$$= \left[\frac{f(1-j)}{1-j} - \frac{f(1+j)}{1-j} \right] j^2 + \left[\frac{f(1-j)}{1-j} + \frac{f(1+j)}{1+j} \right] j$$

$$= \int_{1-j}^{1+j} \frac{f(s)}{s^2} ds$$

$$\frac{f(1-j)}{1-j} = \frac{f(1+j)}{1+j}$$

جو ۱ کی سب قیمتوں کے لئے اور ج کی ۱ سے بڑی سب قیمتوں کے لئے درست ہے۔

اس لئے $\frac{f(s)}{s^2}$ لازمی طور پر مستقل ہونا چاہیئے۔

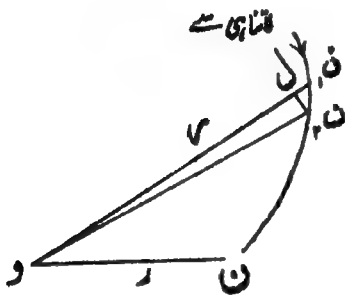
۱: $f(s) = a + b$ جہاں a اور b اختیاری مستقل ہیں

پس مطلوبہ کلیہ $a + \frac{b}{s^2}$ ہے۔

پس ممکن کیے صرف تین میں راست فاصلہ کا کلید یا فاصلہ کے مطلوب مربع کا کلید یا ان کا مجموعہ۔

قوہ

۲۹۱۔ کسی نقطہ ن پر ایک کمیت م کے قوہ سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو کمیت م



کی کشش اکائی کمیت کو لاتنا ہی سے
نقطہ ن تک کسی سیدھے یا منحنی راستہ
سے لانے میں سرانجام دیتی ہے۔

نقطہ و پر کشش کرنے والی
کمیت کے ایک چھوٹے سے جزو
م پر غور کرو اور فرض کرو کہ کمیت
کے ذرہ کے راستے کا ایک چھوٹا سا
جزو ن، ن ہے۔

یزون، = سر اور ون، = سر + م

ن، ل عمود کھینچو ون، پر، تب انتہا میں

ول = ون، = سر + م

ن، ل = ون، - ول = سر - (سر + م) = - م

اس لئے م کی کشش اکائی کمیت کو ن، سے ن، تک لانے میں جو کام سرانجام
دیتی ہے وہ

$$= \text{جرم} \times \text{ن، ل} = \text{جرم} \times (-\text{م})$$

اس لئے اس کشش کا کل کام جبکہ اکائی کمیت کا ذرہ لاتنا ہی سے نقطہ ن تک آئے
جہاں ون کا طول رہے

$$= \left(\frac{\text{جرم}}{\text{سر}} \right) \text{فرسا} = \left[\frac{\text{جرم}}{\text{سر}} \right] = \text{جرم} \left[\frac{1}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر}} \right] = \frac{\text{جرم}}{\text{سر}}$$

اسی قسم کا نتیجہ کشش کرنے والی بکیت کے دیگر جزوی حصوں m_1, m_2, \dots کے لئے جو m, n پر واقع ہیں درست ہے۔
اس لئے کل کشش کرنے والی
بکیت کا مجموعی کام



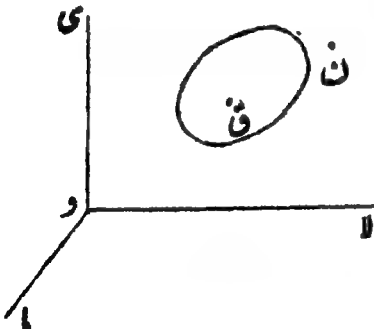
$$= \frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots$$

$$= \frac{m}{n}$$

پس بکیت ہر کا قوت کسی نقطہ پر حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہوتا ہے فرض کرو
بکیت ہر کا ایک چھوٹا سا جزو m ہے جس کا فاصلہ n سے رہے تب کل بکیت
کا قوت n پر = m ہے جہاں تک کہ کو تمام کشش کرنے والے مادہ میں لینا چاہیے۔

اس مقدار کو بالعموم Q سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۲۹۲۔ اگر ایک کشش کرنے والے جسم کا قوت کسی نقطہ n پر قوت ہو اور n کے
محدود m_1, m_2, \dots ہوں تو ہم ثابت کر سکتے



ہیں کہ فرقہ n پر کی کشش کا محور لا
کی مثبت سمت کے متوازی جزو ترکیبی

ہے اور اسی طرح سے فرقہ m_1 اور فرقہ m_2
کے لئے۔

فرض کرو کہ کشش کرنے والی بکیت کا کوئی جزو m ہے قطعیہ جس کے محدود m_1, m_2, \dots ہیں۔
تب دقت ماقبل کی تعریف کے بموجب

$$Q = \frac{m}{n} = \frac{m}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}}$$

$$\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرم (لا - لا)}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرم}}{\text{فرق}}$$

$$= \frac{\text{فرم}}{\text{فرق}} \times \frac{\text{فرم}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرم}^2}{\text{فرق}^2}$$

جہاں ق ن کا میلان محور لا کے ساتھ ط ہے۔

اب جزو فرم کی کشش ن پر جہ فرم ہے جو ن ق کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ اور اس لئے اس کشش کا تحلیل حصہ محور لا کی منفی سمت میں

$$= \text{جہ} \times \frac{\text{فرم}}{\text{ن ق}}$$

اس لئے کل کمیت کی کشش کا جزو تحلیل محور لا کی مثبت سمت میں ہے۔ جہ فرم

لہذا (۱) سے ظاہر ہے کہ

$$\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \times \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}^2}{\text{فرق}^2}$$

بالترتیب اور سی کے محوروں کی سمتوں میں حاصل کششیں ہیں۔

۲۹۳۔ دفعات ماقبل سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی نقطہ پر قوت یکساں جہ کے فرم کی قیمت کو محسوب کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے جبکہ تکمل کے عمل کو پوری کمیت پر عاید کیا جائے یا اگر یوں کرنا زیادہ سہل ہو تو ہم اسے اس خصوصیت کی بناء پر بھی معلوم کر سکتے ہیں کہ اس کے تفرقی سر بمعاظ لا، ما، سی کے بالترتیب ان محوروں کی سمتوں میں حاصل قوت کے جزو ترکیبی ہیں۔

نیز اگر قہ آسانی پہلے معلوم ہو جائے تو ہم تحلیل قوتوں کو محض تفرق کرنے سے معلوم کر سکتے ہیں۔

۲۹۴۔ اگر مٹس نقطہ ن میں سے کسی سمت میں کھینچے ہوئے خط مستقیم کا چھوٹا

ساجزو ہو اور لا، لا، سی محوروں پر اس کے نقل معن لا، معن ما، معن می ہوں اور بناؤ علیہ اس کے سستی، جیو سب التمام

فرلا، فرما، فری
فرس فرس فرس

ہوں نومنتس کی سمت میں حاصل کشت

$$\frac{\text{جنت قہ}}{\text{جنت لا}} = \frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{جنت قہ}}{\text{جنت لا}} + \frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{جنت قہ}}{\text{جنت لا}} + \frac{\text{فرا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{جنت قہ}}{\text{جنت لا}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}$$

اگر یہ جزم و مفہم، ن نہ ہو تو یہ مساوات اس واقعہ کو تعبیر کرنی ہے کہ ن نہ کی سمت میں قوت

نہا = $\frac{\text{ن پر توہ} - \text{ن پر توہ}}{\text{ن ن}}$

۲۹۵۔ دفعہ اقبل سے ظاہر ہے کہ اگر ان کا مقام معمولی قطبی محدودوں، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵،

فرقہ، رکی سمت میں،

۱۔ فرقہ، پر عمود وارطہ کی سطح مستوی میں،

$$\frac{1}{\text{رجب ط}} \times \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} ، طہ کی سطح مستوی پر عود اور سمت میں۔$$

۲۹۶۔ جب مخدوب نقطہ ہکٹش کرنے والی کیفیت کے اندر ہو جس صورت میں رکی کچھ قیمتیں صفر ہونگی تو بظاہر یہ معلوم ہوتا ہے کہ قودا (جہ نمبر) کی قیمت لاتنا ہی ہوگی۔

لیکن یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دراصل ایسا نہیں ہے۔ کیونکہ اگر نقطہ ن کو قطبی محاذوں (ر، ط، ذ) کا مبداء مانا جائے اور ہر وقت ہو تو

مغ م = مغ ر + ر مغ ط + ر جب ط مغ م = م

باہر سے اندر جاتے ہیں۔
 اوپر کے نتائج صریحاً قدرت کے کلیہ کشش کے علاوہ دوسرے کلیوں
 کے لئے درست نہیں رہتے۔ مثلاً اگر کشش کا کلیہ فاصلہ کے مقلوب بمعبر کا
 کلیہ ہو تو $\frac{فرق}{وزن}$ کے لئے متذکرہ بالا تکرار میں راسب نما میں آئے گا اور اس لئے
 اس کے بعض اجزاء لامتناہی ہو جائیں گے جبکہ مجذب نقطہ کشش کرنے
 والی کثیت کے اندر واقع ہو۔
 ۲۹۷۔ فاصلہ کے مقلوب مربع کے سوائے کشش کے دوسرے کلیوں کے
 لئے توہ:-

اگر کشش کا کلیہ ج $\frac{کام}{(فاصلہ)^n}$ ہو تو کثیت م کا توہ فاصلہ پر حسب دفعہ ۲۹۱

$$= \left(\frac{ج}{م} \right) \frac{فرق}{وزن} = \left[\frac{1}{1-n} \right] \frac{ج}{م} \times \frac{1}{1-n} =$$

اس لئے کل کثیت م کا توہ = $\frac{ج}{م} \left[\frac{فرق}{1-n} \right]$

یہ نتیجہ درست رہتا ہے بشرطیکہ n مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو
 اگر کلیہ مقلوب فاصلہ کا کلیہ ہو یعنی اگر n = ۱ تو

$$توہ = \left(\frac{ج}{م} \right) \frac{فرق}{وزن} = ج - ج [لوک س] = ج - ج م لوک ر$$

جہاں ج لامتناہی مستقل ہے۔
 نیز کل کشش کرنے والی کثیت کا توہ

$$= ج - ج م لوک ر فرم جہاں ج بھی لامتناہی مستقل ہے۔$$

۲۹۸۔ ایک پتلی یکساں سلاخ کے بیرونی نقطہ پر توہ:-

دفعہ ۲۷۷ کی شکل اور ترقیم کے مطابق سلاخ اب کان پر قوہ

$$= \text{جک مر فلان} = \frac{\text{جک مرع قطا ط فرط}}{\text{ع قطا ط}}$$

$$= \text{جک مر ل قطا ط فرط} = \text{جک مر} [\text{لوک سس} (\frac{\text{ط}}{\text{ق}} + \frac{\text{ق}}{\text{ط}})]$$

$$= \text{جک مر لوک سس} \frac{(\frac{\text{ق}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ق}})}{(\frac{\text{ق}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ق}})}$$

$$\text{اب} > \text{ن اب} = \frac{\text{ط}}{\text{ق}} + \text{واس لے سس} (\frac{\text{ق}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ق}}) = \text{سس ن اب}$$

$$\text{یز} > \text{ن ب} = \frac{\text{ط}}{\text{ق}} - \frac{\text{ق}}{\text{ط}}$$

$$\text{لہذا سس} (\frac{\text{ق}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ق}}) = \text{مم} (\frac{\text{ق}}{\text{ط}} - \frac{\text{ط}}{\text{ق}}) = \text{مم ن ب}$$

اس لئے ن پر قوہ

$$= \text{جک مر لک} [\text{مم ن اب} \times \text{مم ن ب}]$$

اگر اب = ل، ان = ب، اور ب = ن = ہ

تو علم مثلث کے معمولی ضابطوں کی رو سے

$$\text{مم ن اب} \times \text{مم ن ب} = \frac{\text{سس} (\text{س} - \text{ہ})}{\text{سس} (\text{س} - \text{ہ})} \times \frac{\text{سس} (\text{س} - \text{ہ})}{\text{سس} (\text{س} - \text{ہ})}$$

$$= \frac{\text{سس} + \text{ہ} + \text{ل}}{\text{سس} - \text{ہ}} = \frac{\text{ل} + \text{ہ} + \text{ل}}{\text{ل} - \text{ہ}}$$

$$\text{اس لئے ن پر قوہ} = \text{جک مر لک} \frac{\text{ل} + \text{ہ} + \text{ل}}{\text{ل} - \text{ہ}}$$

نتیجہ صریح (۱) اس سے پتہ چلتا ہے کہ قوہ ان سب نقطوں کے لئے مستقل

رہتا ہے جن کے لئے ب + ب مستقل ہے۔ یعنی قوت ان سب نقطوں کے لئے جو ایسے ناقص پر واقع ہیں جس کے ماسکے (ا) اور ب میں مستقل ہے۔
اس لئے ایک پتلی سلاخ (ب) کی صورت میں مساوی القوتہ مغنی ناقص ہوتے ہیں جن کے ماسکے (ا) اور ب ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح (۲) اگر سلاخ دونوں سمتوں میں لامتناہی ہو تو اس کا قوت

$$ق = ۲ \times \frac{جک \text{ ہر فلا}}{ن ق} = ۲ جک \text{ ہر فلا} \times \frac{۱}{ن ق} = \frac{۲ جک \text{ ہر فلا}}{ن ق}$$

$$= ۲ جک \text{ ہر } [لوک \{ ۱ + \frac{۱}{۲} (۲ ع + ۱) \}]$$

$$= ج - ۲ جک \text{ ہر لوک ع}$$

جہاں ج لامتناہی مستقل ہے۔

یہ نتیجہ دفعہ ۲۷ کے نتیجہ صریح سے بھی حاصل ہو سکتا ہے کیونکہ

$$\frac{قوت}{فزع} = - کشش کی قوت = - \frac{۲ جک \text{ ہر}}{ع}$$

$$ق = ج - ۲ جک \text{ ہر لوک ع}$$

نتیجہ صریح (۳) اگر سلاخ سمت (ب) محدود میں لامتناہی ہو لیکن اس کا ایک سرا (ا) ہو تو قوت

$$= جک \text{ ہر } [لوک مس (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲})] \times \frac{۱}{۲} = جک \text{ ہر } [ج - لوک مس (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲})] \times \frac{۱}{۲}$$

جہاں ج لامتناہی مستقل ہے

$$= جک \text{ ہر } [ج - لوک \frac{۱ + ج ب م}{ب م م}]$$

۲۹۹۔ ایک یکساں مستدیر یعنی کا اس کے محور پر کے کسی نقطہ پر قوت :-

دفعہ ۲۸۱ کی شکل اور ترقیم کے مطابق ن پر کا قوت

$$= \frac{2\pi r^2 \times \text{فرق} \times \text{مرکز}}{ن} = \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن} = \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن}$$

$$= \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن} = \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن}$$

$$= \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن} = \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن}$$

یا قوت دفعہ ۲۸۱ کے نتیجہ کی مدد سے بھی معلوم ہو سکتا ہے، کیونکہ

$$\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{کشش دن کی سمت میں}}$$

$$= \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن} = \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن}$$

$$= \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن} = \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن}$$

مستقل صفر ہے کیونکہ جب ع صفر ہو تو

$$= \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن} = \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن}$$

$$= \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن} = \frac{2\pi r^2 \times \text{مرکز}}{ن}$$

مثالیں

۱۔ ایک یکساں تہیل سلاخ کا طول لا انتہا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی کشش کے خلاف اکائی کثیت کے ذرہ کو اس سے عمودی فاصلہ م سے عمودی فاصلہ م تک لیجائے

میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ ۲ جگہ ہر کوک $\frac{2\pi}{\lambda}$ ہے۔

جز مائل کرو کہ کعب کے ایک کوہ پر وہ مرکز پر کعبہ کی قیمت کا نصف ہے۔

[دفعہ ۲۸۰ کے نتیجہ سے شروع کرو]

۶۔ ایک چلے متجانس حلقہ کی کثیت m اور نصف قطر a ہے تاوان کشش کو فاصلہ کے معکوس کے تناسب فرض کر کے ثابت کرو کہ حلقہ کے مستوی میں مرکز سے فاصلہ c پر وہ

$$= ج - ج م لوک ج یا ج - ج م لوک ا$$

بوجب اس کے کہ $ج > ا$

۷۔ ایک لامتناہی یکساں چلا اسطوانی خول ہے ثابت کرو کہ کسی نقطہ n پر اس کا قوت
ج - $ج م لوک ا$ یا ج - $ج م لوک ج$ ہوگا بوجب اس کے کہ n
اسطوانہ کے اندر یا باہر ہو جہاں m اسطوانہ کے خول کی کثیت فی اکائی رقبہ ہے،
اور اسطوانہ کا نصف قطر ہے اور n نقطہ کا محور سے فاصلہ ہے۔

۸۔ ایک یکساں چلے مستطیر حلقے کا نصف قطر a سنتی میٹر اور کثیت m گرام ہے حلقہ کے

مستوی میں ایک نقطہ n یا گیا ہے جس کا فاصلہ حلقہ کے مرکز سے $ج$ ($ج < ا$) ہے۔

ثابت کرو کہ تجاذب کی وجہ سے n پر قوت ہے

$$ج \left\{ \frac{1}{ج+ا} + \frac{1}{ج-ا} + \frac{1}{ج+ا} + \frac{1}{ج-ا} + \dots \right\}$$

$$جہاں ک = \frac{2 \sqrt{ا^2 - ج^2}}{ج+ا}$$

۹۔ ایک یکساں مستطیر ذرات کی کثیت m اور نصف قطر a ہے ثابت کرو کہ اس کا قوت
اس نقطہ پر جو اس کی سطح مستوی میں مرکز سے فاصلہ $ج$ پر واقع ہے

$$\frac{2 \sqrt{ا^2 - ج^2}}{ج+ا} - \frac{2 \sqrt{ا^2 - ج^2}}{ج-ا} + \frac{2 \sqrt{ا^2 - ج^2}}{ج+ا} - \frac{2 \sqrt{ا^2 - ج^2}}{ج-ا} + \dots$$

ہوگا بوجب اس کے کہ $ج > ا$

۱۰۔ ایک یکساں پترا دوم مرکز دائروں سے جن کے نصف قطر بالترتیب m اور n ہیں

گھرا ہوا ہے۔ اس کی کشش مشترک مرکز سے فاصلہ r پر معلوم کرو جبکہ کشش کا کلیہ $\frac{1}{r^2}$ ہے۔

۱۱۔ قطع ناقص کی شکل کے ایک پترے کی کثافت کسی نقطہ پر ایسے ہلاتی ہے جیسے اس نقطہ کا محور اعظم سے فاصلہ اکائی فاصلہ پر اکائی رقبہ کی کثیت ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے پترے کا قوہ $\frac{2}{3}$ جہ $\frac{1}{r^2}$ ہوگا۔

۱۲۔ ایک متجانس نصف کرہ کا مرکز O ہے، W سے نصف قطر OW استوی قاعدہ چھو دو اور کھینچا گیا ہے۔ اگر نصف قطر استوی پترہ W کی کثافت ρ ہو اور ہر گرام ہوا $\frac{1}{g}$ جہ تجاذب کا مستقل ہو تو ثابت کرو کہ مجسم کی کشش کے خلاف ایک گرام کو W سے ایک یجانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$\frac{2}{3} \pi g r^3 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] \text{ ارگ ہے۔}$$

۱۳۔ ثابت کرو کہ ٹھوس متجانس مخروط کے قاعدہ کے وسطی نقطہ سے اس کی کشش کے خلاف کثیت کی ایک کثافت اکائی کو اس تک یجانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$\frac{2}{3} \pi g r^3 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] \text{ جہ } \frac{1}{r^2} \text{ ہے}$$

ہے جہاں مخروط کی بلندی h ، کثافت ρ اور راسی زاویہ 2α ہے

۱۴۔ ایک چٹے یکساں کروی خول کا قوہ بیرونی یا اندرونی نقطہ پر۔
دفعہ ۲۸۶ کی شکل اور ترقیم کے مطابق کسی بیرونی نقطہ P پر قوہ

$$= \frac{2}{3} \pi g r^3 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] \text{ جہاں } h \text{ کثافت ہے}$$

نیز $\frac{1}{r^2}$ متساوی $\frac{1}{r^2}$ جہ $\frac{1}{r^2}$ متساوی $\frac{1}{r^2}$ حسب دفعہ مذکور

$$\text{پس قوہ} = \frac{2}{3} \pi g r^3 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] \text{ جہ } \frac{1}{r^2} \text{ ہے}$$

$$= \frac{\pi r^2 \text{ جک مراد}}{\text{خول کی کثیت}} = \frac{\text{ون}}{\text{ج}}$$

پس کسی بیرونی نقطے کے لئے کردی خول کا قوت اتنا ہی ہوگا جتنا کہ خول کی کل کثیت کو اس کے مرکز پر کثف کر دینے سے حاصل ہوتا۔

کسی اندرونی نقطے n کے لئے مکمل کی انتہائیں $r = n$ سے n ب

تک ہونی چاہیں یعنی r سے n + r تک۔ اس لئے قوت n پر

$$= \frac{\pi r^2 \text{ جک مراد}}{\text{خول کی کثیت}} = \frac{\pi r^2 \text{ جک مراد}}{\text{اس کا نصف قطر}}$$

لہذا کسی اندرونی نقطہ پر قوت مستقل ہوتا ہے اور اس کی قیمت کسی نقطہ پر اتنی ہی ہوتی ہے جتنی کہ اس کے مرکز پر۔

۱۔ ۳۔ ایک یکساں ٹھوس کرہ کا قوت کسی بیرونی یا اندرونی نقطہ پر۔

یہاں دفعہ ۲۸۷ کی شکل اور ترقیم اختیار کی گئی ہے فرض کرو کہ ٹھوس کرہ،

تعداد میں لائنیاں گہریت ہی چلے ہم مرکز کردی خولوں سے بنا ہوا ہے۔

اگر n ٹھوس کرہ کے باہر ہو تو اس کے یہ معنی ہونگے کہ یہ ان سب کردی

خولوں کے باہر ہے اور ان میں سے ہر ایک خول کا قوت کثیت n پر

$$= \frac{\text{خول کی کثیت}}{\text{ون}} \text{ دفعہ ماقبل کے مطابق۔}$$

اس لئے کل قوت کسی بیرونی نقطہ n پر

$$= \frac{\text{خولوں کی کثیتوں کا مجموعہ}}{\text{ون}}$$

$$= \frac{\text{کرہ کی کثیت}}{\text{ون}}$$

اور اس لئے قوت اتنا ہی ہے جتنا کہ کل کرہ کی کثیت کو مرکز پر کثف کر دینے سے حاصل ہوتا۔

اگر نقطہ کرہ کے اندر ہو تو اُن سب خولوں کے لئے جن کا نصف قطر ما'ون سے
 لم ہے ن' اندرونی نقطہ ہے اور اس لئے دفعہ ۳۰۰ کے مطابق اس قسم کے خول کا قہ
 = ج' ۳۴ ہر ما'مت ما'ون اور اس کو حدود صغرا و ج' کے اندر تکمیل کرنا چاہیئے نیز
 اُن سب خولوں کے لئے جن کا نصف قطر ما'ون سے بڑا ہے ن' کوئی
 اندرونی نقطہ ہے دفعہ ۳۰۰ کی رو سے اس قسم کے کسی خول کا قہ = ج' ۳۴ ہر ما'مت ما'ون

اور اس جملہ کو تکمیل کرنا چاہیئے حدود ج' سے ا' کے اندر۔
 اس لئے کسی اندرونی نقطہ ن' پر مجموعی قہ

$$= \left(\frac{\text{ج' ۳۴ ہر ما'مت ما'ون}}{\text{ج' ۳۴ ہر ما'مت ما'ون}} + \frac{\text{ج' ۳۴ ہر ما'مت ما'ون}}{\text{ج' ۳۴ ہر ما'مت ما'ون}} \right)$$

$$= \frac{\text{ج' ۳۴ ہر ج' ۳۴} \times \text{ج' ۳۴}}{\text{ج' ۳۴}} + \frac{\text{ج' ۳۴ ہر ج' ۳۴}}{\text{ج' ۳۴}} = \text{ج' ۳۴ ہر ج' ۳۴} \left(\frac{\text{ج' ۳۴}}{\text{ج' ۳۴}} - \frac{\text{ج' ۳۴}}{\text{ج' ۳۴}} \right)$$

۲۔ ایک محدود موٹائی والے کردی خول کا قہ اور کشش معلوم کردی خول کی
 اور باہر کی کردی سطحوں کے نصف قطر بالترتیب ا' اور ب' ہیں۔

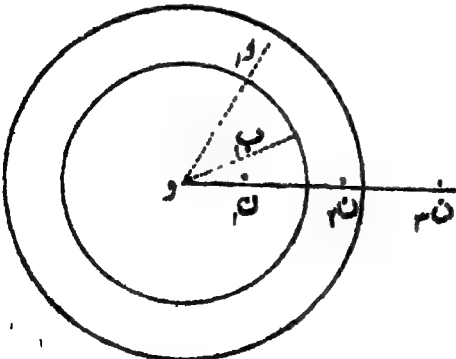
فرض کرد کہ مرکز ہے اور
 ہر کردی خول کی کثافت ہے۔

اس محدود موٹائی کے خول
 کو لا انتہا ہم مرکز پتلے کردی خولوں میں
 تحلیل کرد۔

اب دفعہ ۳۰۰ کے نتیجہ استعمال کرو

اولاً۔ کسی نقطہ ن' (ون = لا)

کے لئے جو خول کی اندرونی سطح کے اندر واقع ہو اوپر کی صورت دوم لگ سکتی ہے اور



اس لئے نقطہ ن پر قہ

$$= \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\pi^2}{\lambda} \text{ مر } \alpha \text{ فرما} = \pi^2 \text{ مر } (\alpha - \beta)$$

مثلاً کسی نقطہ ن (و ن = لا) پر جو دو حالت سطحوں کے اندر واقع ہو قہ معلوم کرنا ہے۔ جن خولوں کا نصف قطر لا سے کم ہے ن ان کے لئے بیرونی نقطہ ہے اور دفعہ ۳۰۰ کی پہلی صورت قائم رہتی ہے نیز اس سے بڑے نصف قطر کے خولوں کے لئے ن اندرونی نقطہ متصور ہو سکتا ہے اور دوسری صورت لگے گی۔ پس اس صورت میں ن پر قہ

$$= \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\pi^2}{\lambda} \text{ مر } \alpha \text{ فرما} + \int_{\lambda}^{\alpha} \frac{\pi^2}{\lambda} \text{ مر } \alpha \text{ فرما}$$

$$= \pi^2 \text{ مر } \left(\frac{\alpha - \beta}{\lambda} \right) + \pi^2 \text{ مر } (\alpha - \lambda)$$

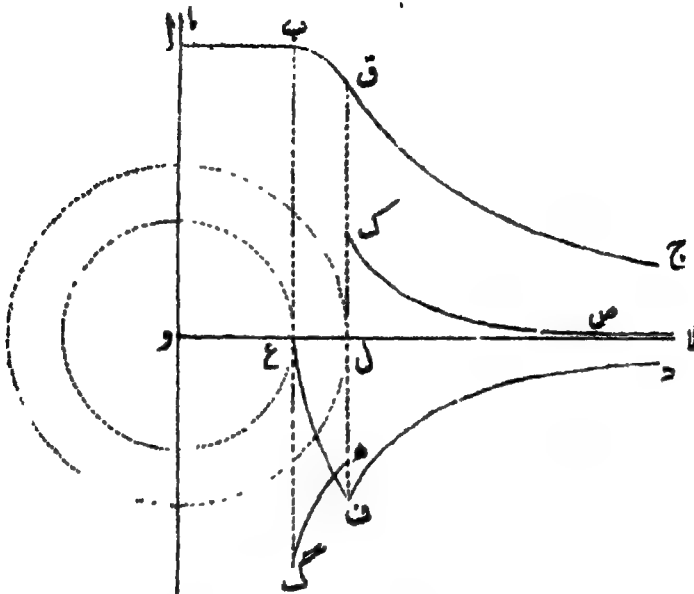
$$= \pi^2 \text{ مر } \left[\frac{\alpha - \beta}{\lambda} - \frac{\alpha - \lambda}{\lambda} \right]$$

مثلاً نقطہ ن (و ن = لا) کے لئے جو کل معلوم خول سے باہر واقع ہو۔ یعنی تمام جزوی خولوں کے باہر ہو قہ

$$= \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\pi^2}{\lambda} \text{ مر } \alpha \text{ فرما} = \pi^2 \text{ مر } \left(\frac{\alpha - \beta}{\lambda} \right)$$

پس ہمیں قہ اور اس کے تفرقی سروں کے لئے ذیل کے نتائج

حاصل ہوتے ہیں۔



ق کی قیمتیں مسلسل منحنی اب ق ج سے معلوم ہوتی ہیں جس میں کہیں بھی سمت کی تبدیلی دفعۃً واقع نہیں ہوتی۔ فرقہ کو منحنی د ع ف د سے تعبیر کرتا ہے جس کی سمت دفعۃً ع اور ف پر بدل جاتی ہے، فرقہ کو غیر مسلسل منحنی سے جو تین علیحدہ علیحدہ شاخوں د ع، گ ہ اور ک ص پر مشتمل ہے تعبیر کیا گیا ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کر دو کہ ایک پٹیلے سبائلس کو ی غول کے منطفہ کا قوہ منطفہ کے محور پر کے کسی نقطہ پر $\frac{2}{r_1 + r_2}$ ہوتا ہے جہاں م کیت ہے منطفہ کی اور r_1 اور r_2 نقطہ ن کے فاصلے ہیں منطفہ کے احاطہ کرنے والے کناروں سے۔

۲۔ ایک بیگیاں کردی خول کے! ہر ایک نقطہ وہ ہے۔ ثابت کر دے نقطہ و ہر اس خول کے توہ کا نصف خول کے اُس حصہ کی وجہ سے ہے جو پائنت مرکز کے و سے زیادہ قریب ہے۔

۳۔ ایک کرہ کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ اور کثافت ρ ہے اور کسی اندرونی نقطہ کا فاصلہ مرکز سے $\frac{1}{3}$ ہے۔ ρ میں سے گزرنے والی ایک سطح مستوی کرہ کو دو حصوں میں منقسم کرتی ہے ثابت کرو کہ ان حصوں کا جو قوت ρ پر ہوتا ہے ان کا فرق ہے

$$\frac{\pi \rho}{3} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

۴۔ ایک ٹھوس متجانس کشش کرنے والے کرہ کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ کثافت $\frac{3}{2}$ ہے اور

اس کی سطح پر ایک اندفاعی مادہ کی یکساں تقسیم ہے جس کی سطحی کثافت $\frac{1}{2}$ ہے۔ اس کرہ

کے کسی اندرونی یا بیرونی نقطہ پر قوت معلوم کرو۔

جواب (اندرونی $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$) اور باہر صفر ہے)

۵۔ ایک ٹھوس نصف کرہ کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ اور کثافت ρ ہے۔ ثابت کرو کہ ایک بیرونی نقطہ ρ پر جس کا فاصلہ مرکز سے $\frac{1}{3}$ ہے اس کا قوت

$$\frac{\pi \rho}{3} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right]$$

ہے جہاں جمع کی علامت لی جائے گی اگر نقطہ ρ جسم کی محدب سطح کی جانب واقع ہو اور منفی اگر وہ مستوی سطح کی جانب واقع ہو۔

۶۔ ایک کرہ کی کثافت مرکز سے فاصلہ $\frac{1}{2}$ پر $\frac{1}{2}$ جب $\frac{1}{2}$ ہے جہاں ρ اور ρ معلوم مستقل ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ پر جو مرکز سے فاصلہ $\frac{1}{2}$ پر ہے کشش

$$\pi \rho \left(\frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \right) \text{ ہوگی۔ نیز قوت معلوم کرو۔}$$

۷۔ ایک کرہ کی خول کی موٹائی $\frac{1}{2}$ (جہاں ρ چھوٹا ہے) کثافت ρ اور نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز سے فاصلہ $\frac{1}{2}$ پر جس کے بیرونی نقطہ پر قوت ہے

$$\frac{\pi \rho}{2} \frac{1}{(1+n)(3+n)} \left[(1+n)^2 - (1+n)^2 - (1+n)^2 \right]$$

جہاں قوت کا کلیہ فاصلہ کی ن دیں قوت ہے۔

۸۔ کشش کرنے والے مادہ کے باہر اگر ایک کر دی سطح لی جائے تو ثوابت کر دے سطح کے تمام نقطوں پر قوت کی قیمتوں کی اوسط قیمت کر دے مرکز پر قوت کی قیمت کے مساوی ہے۔
نیز اگر کشش کرنے والا مادہ کر دی سطح کے اندر واقع ہو تو ثوابت کر دے کر دے کی محول بالا اوسط

قیمت = $\frac{\text{مادہ کی قیمت}}{\text{کر دے کا نصف قطر}}$

۹۔ کشش کر نیوالے مادہ کے باہر اگر ایک لامتناہی طول کا مستریہ اسطوانہ لیا جائے تو ثوابت کر دے کر دے اسطوانہ کی سطح پر ہر کر دے کی مختلف قیمتوں کی اوسط قیمت اسطوانہ کے محور پر کسی نقطہ پر قوت کے مساوی ہوگی۔

کششوں اور قوت پر متفرق مثالیں

۱۔ ش ج ایک متناطیس ہے اور ن کوئی متناطیسی ذرہ ہے جو بناؤ علیہ ش کی جانب اور ج کے مخالف سمت میں کھینچ رہا ہے اور عالمہ قوتیں معکوس مربع کے متناسب ہیں، ش ج کا وسطی نقطہ ہے اور $\text{ش و ن} = ط$

اب اگر و ن بقاء متناطیس کے ابعاد کے بہت بڑا ہو تو ثوابت کر دے ن پر عمل کرنے والی قوتوں کا حاصل ن د کے ساتھ زادیست (پلسس) بنا ہے۔

فرض کر دے $\text{و ن} = ر$ ، $\text{و ش} = و ج = \frac{1}{r}$ اور $\text{ش و ن} = ط$ ۔ ن پر متناطیس کی کشش اس کشش کے معادل ہے جو قطبوں ش اور ج پر متناطیسیت کی مساوی مشبہ اور منفی مقداروں سے پیدا ہوتی ہے۔

$$\text{اس لئے ن پر قوت ق} = \left[\frac{1}{\text{ش و ن}} - \frac{1}{\text{ج و ن}} \right]$$

اب $\text{ش و ن} = ۲ = ۲ + ۱ - \frac{1}{۲}$ اور $\text{ج و ن} = ۱ - \frac{1}{۲}$ ر جم ط
اس لئے $\frac{1}{۲}$ کے مربوں کو نظر انداز کرنے سے

$$\text{ش و ن} = \frac{1}{۲} - \frac{1}{۲} \left[۱ - \frac{1}{۲} \right] = \frac{1}{۲} \left[۱ + \frac{1}{۲} \right] \text{ ر جم ط}$$

$$\text{پس } \frac{1}{\text{ج ن}} = \frac{1}{\text{ر}} - \left[1 - \frac{1}{\text{ر}} \right] \text{ جم ط}$$

$$\text{ن} = \frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ر}} \text{ جم ط}$$

اس لئے اگر ن کے متوازی اور اس پر عمود وار ط کے کم ہونے کی سمت میں تو ہیں بالترتیب لا اور ما ہوں تو

$$\text{لا} = \frac{\text{فرق}}{\text{ذر}} = \frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ر}} \text{ جم ط}$$

$$\text{اور } 1 = \frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ر}} \text{ فرق}$$

$$\text{پس مطلوبہ زاویہ} = \text{مس} \frac{1}{\text{لا}} = \text{مس} \left[\frac{1}{\text{مس ط}} \right]$$

۲۔ ایک کا غز پر کچے لوہا چون کبیرا گیا ہے اور اس پر ایک مقناطیس رکھی گئی ہے جس کے قطب مش اور ج ہیں۔ ثابت کر دو کہ وہ متعین جن میں لوہا چون کے ذرات اپنے کو ترتیب دے لیتے ہیں مساوات جم ط۔ جم کہ متعلق سے حاصل ہوتے ہیں جہاں ط اور ط زاوئے ن ج لا اور ن مش لا ہیں اور لا کوئی نقطہ ہے ج مش عمود پر نیز ثابت کر دو کہ وہ سب ذرات جن کے رخ مش ج پر کے ایک معلوم نقطہ و کی طرف ہیں ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں (لوہا چون کا ہر ذرہ ایک چھوٹا سا مقناطیس ہے اس لئے اس کو ہر دو قطب میں سے کسی ایک پر حاصل قوت کی سمت میں قائم کر لینا چاہیئے ورنہ اس پر جنت عمل کرے گا)۔

۳۔ ایک بہت چٹاکیاں مستہ پر حلقہ کشش کرنے والے مادہ کا بنا ہوا ہے۔ ثابت کر دو کہ ایک ذرہ جس کی حرکت حلقہ کے متوازی میں متعین ہے حلقہ کے مرکز پر غیر قائم تعادل میں ہوگا۔

فرض کر دو کہ حلقہ کا مرکز و ہے اور ن مجذوب نقطہ ہے جس کا فاصلہ اس کے مرکز سے ج ہے۔ تب اگر و ن کو خط تبدیلی مانا جائے تو حلقہ کشش و ن کی سمت میں

$$= \frac{\text{جک مر و فرط}}{\text{جک مر و فرط}} \times \frac{\text{جک مر و فرط}}{\text{جک مر و فرط}} = \frac{\text{جک مر و فرط}}{\text{جک مر و فرط}} \times \frac{\text{جک مر و فرط}}{\text{جک مر و فرط}}$$

$$= \frac{2}{3} \text{ جک مر } \left[1 + \frac{3}{4} \text{ جمرط} \right] \left[\frac{1}{2} \text{ جمرط} - \frac{1}{4} \text{ ج} \right] \text{ فرط}$$

$$= \frac{2}{3} \text{ جک مر } \left(\frac{1}{2} \text{ جمرط} - \frac{1}{4} \text{ ج} + \frac{3}{4} \text{ ج} \text{ جمرط} \right) \text{ فرط}$$

جبکہ ج کے مربوں کو نظر انداز کیا جائے

$$= \frac{2}{3} \text{ جک مر } \left[\frac{1}{2} \text{ جمرط} + \frac{3}{4} \text{ ج} \text{ جمرط} \right] = \frac{2}{3} \text{ جک مر ج}$$

ہذا کشش راج میں اضافہ پیدا کرنے کا میلان رکھتی ہے یعنی ذرہ کا مرکز سے فاصلہ بڑھانے کی کوشش کرتی ہے پس تعادل غیر قائم ہے۔

۴۔ مساوی قوتوں کے مرکروں کو ایک دائرہ کے محیط پر متساویاً قریب دیا گیا ہے۔ ہر ایک قوت اندفاعی ہے اور اس کا قانون فاصلہ کی مقلوب ۴م دیں قوت ہے۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ جسے دائرہ کے مرکز پر رکھا جائے تعادل قائم میں ہوگا سوائے اُس صورت کے جبکہ ۴م کے مساوی ہو۔

۵۔ اٹھ مرکزی قوتوں کے مرکز ایک کعب کے راسوں پر ہیں اور کعب کے مرکز کے قریب ایک ذرہ کو ایک ہی کلیہ کے مطابق کھینچتے ہیں اور اُن کی مطلق مدتیں بھی ایک ہی ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن کا حاصل عمل کعب کے مرکز میں سے گزرتا ہے بشرطیکہ قوت کا کلیہ مقلوب مربع کا کلیہ نہ ہو۔

۶۔ ایک خط پر ایک دوسرے سے $\frac{2}{3} \text{ م}$ فاصلہ پر مساوی کیتوں کی لامتناہی تعداد رکھی ہوئی ہے اور یہ سب کیتیں ایک ذرہ کو جس کا فاصلہ خط مذکور سے ۱ ماہے فاصلہ کے مقلوب کعب کے تناسب کھینچتی ہیں ثابت کرو کہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جو حاصل قوت کی سمت خط مذکور کے ساتھ بنا سکتی ہے $\frac{1}{2} \text{ م}$ [جنرل ماہ] ہے۔

[اگر کسی نقطہ (لا، ما) پر فوہ قرار ہو اور کسی ایک جاذب کیت کو مرکز مانا جائے

توہیں حاصل ہوتا ہے $Q = \frac{M}{12} \times \frac{\text{جینرم}^3}{\text{جینرم}^3 - \text{جم م}^3}$ [

۷۔ اگر مادہ کا ہر ایک ذرہ دوسرے ذرہ کو فاصلہ کی n دیں قوت کے متناسب قوت کے ساتھ کھینچتا ہو تو ثابت کرو کہ مادہ کے اندر ہر نقطہ پر کشش لا متناہی ہوگی

اگر $n > 2$ ۔

۸۔ لا انتہائی پتلی سلاخوں کی لا متناہی تعداد ایک دوسرے کے متوازی اور ایک دوسرے سے فاصلہ j پر ایک سطح مستوی میں ترتیب دی ہوئی ہے سلاخوں کی یکساں خطی کثافت m ہے۔ ثابت کرو کہ سطح مستوی کے کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ قریب ترین سلاخ سے a ہے حاصل کشش $\frac{2}{j} \log \frac{a}{j} - \frac{1}{j}$ ہے۔

[جب a کا اجزائے ضربی والا جملہ استعمال کرو اور نوکارتی تفرق کے عمل سے m ط کا پھیلاؤ حاصل کرو]

۹۔ لا محدود طول کی ایک یکساں سلاخ فاصلہ کی معکوس n دیں قوت کے مطابق کشش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ حاصل کشش $\frac{1}{j} \log \frac{a}{j} - \frac{1}{j}$ ہے

جہاں m نوکارتی n کی طول نکتہ ہے اور j مجذب نقطہ سے سلاخ کا کم سے کم فاصلہ ہے۔
۱۰۔ ایک یکساں کعب کی کثافت m ہے ثابت کرو کہ اس کی کشش کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے a ہے $\frac{1}{j} \log \frac{a}{j} - \frac{1}{j}$ ہے

۱۱۔ ایک یکساں کعب قانون قدرت کے مطابق کشش کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی راس پر اس کی حاصل کشش کے تین مسادہ اجزاء ترکیبی ہیں جو اس راس پر ملنے والے کناروں کے ساتھ عمل کرتے ہیں اور مقدار میں ذیل کے مسادہ ہیں۔

$$j \log \frac{a}{j} - \frac{1}{j} + (2 - \sqrt{2}) \left(\frac{1}{j} \log \frac{a}{j} - \frac{1}{j} \right)$$

جہاں m کعب کی کثافت ہے اور a اس کے ایک کنارہ کا طول ہے۔

۱۲۔ ایک متجانس مخروط لا انتہا لمبا ہے اور اس کی کثافت ہر ہے۔ اس کی عمودی تراش مستطیل ہے جس کے اضلاع ۱ اور ۱ ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے کنارہ کے کسی ایک نقطہ پر کشش کے اجزائے ترکیبی اس میں سے گزرنے والی تراش کے اضلاع ۱ اور ۱ کے متوازی

$$\text{جرم} \left[\frac{1}{2} \pi r^2 \cdot \frac{1}{2} \right] + \text{لوک} \left[\frac{1}{2} \pi r^2 \cdot \frac{1}{2} \right] \text{ اور جرم} \left[\frac{1}{2} \pi r^2 \cdot \frac{1}{2} \right] + \text{لوک} \left[\frac{1}{2} \pi r^2 \cdot \frac{1}{2} \right]$$

ہیں۔
۱۳۔ ایک مفتوح ناقص کی دوسے ثابت کرو کہ اگر زمین کے اندر ایک لمبا گہرائی تک شکاف شرقاً غرباً واقع ہو تو اس کے ایک کنارہ پر کے ظاہری عرض بلد میں شکاف کی موجودگی کی وجہ سے بقدر زاویہ $\frac{3}{4}$ کے تفاوت واقع ہوگا جہاں ہر اور ہر بالترتیب زمین کی اوسط کثافت اور سطحی کثافت ہیں اور اس کا نصف قطر ہے اور شکاف کا عرض ۱ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر شکاف کی گہرائی ہر اس کی چوڑائی ۱ کے مقابلہ میں بہت

$$\text{چھوٹی ہو تو تبدیلی تقریباً } \frac{3}{4} \times \frac{\text{جرم}}{\pi r^2} \left[1 + \frac{1}{2} \right] \text{ ہوگی۔}$$

۱۴۔ ایک نہر کی تراش مستطیل ہے اور اس کا طول اس کی گہرائی گ کے مقابلہ میں بہت زیادہ ہے، اگر نہر کی چوڑائی ۱ ہو اور زمین کا نصف قطر ہو تو ثابت کرو کہ نہر کی سطح کے وسطی نقطہ پر باذراع کی قیمت میں $\frac{3}{4} \times \frac{2 + \pi}{\pi} \times \frac{(1 - n)}{r}$ کی کمی ہو جاتی ہے جہاں n نسبت ہے پانی کی کثافت کی زمین کی اوسط کثافت کے ساتھ۔

۱۵۔ ایک پتھر ہے جو اندرونی اور بیرونی طور پر ہم مرکز دائروں سے گھرا ہوا ہے جن کے نصف قطر بالترتیب b اور a ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر پتھرے کی کشش کا کلیہ (فاصلہ)

$$\text{ہو تو کشش اس نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے } \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 + b^2}{2} \right] \text{ ہے صفر ہوتی ہے۔}$$

۱۶۔ ایک متجانس کرہ کا نصف قطر ۱ ہے اگر کشش کا کلیہ (فاصلہ) ہو تو ثابت کرو کہ

جو جگہ گھر جاتی ہے اس کو مکانی کے محور کے گرد گھمانے سے ایک مجسم تیار کیا گیا ہے جس کی کثافت مر ہے۔ ثابت کرو کہ اس مجسم کی کشش برہمنچ کے قرن نقطہ پر

$$\pi \text{ جہرہ } 1 \text{ [م جہرہ } 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + 58 + 59 + 60 + 61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69 + 70 + 71 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 + 77 + 78 + 79 + 80 + 81 + 82 + 83 + 84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 + 101 + 102 + 103 + 104 + 105 + 106 + 107 + 108 + 109 + 110 + 111 + 112 + 113 + 114 + 115 + 116 + 117 + 118 + 119 + 120 + 121 + 122 + 123 + 124 + 125 + 126 + 127 + 128 + 129 + 130 + 131 + 132 + 133 + 134 + 135 + 136 + 137 + 138 + 139 + 140 + 141 + 142 + 143 + 144 + 145 + 146 + 147 + 148 + 149 + 150 + 151 + 152 + 153 + 154 + 155 + 156 + 157 + 158 + 159 + 160 + 161 + 162 + 163 + 164 + 165 + 166 + 167 + 168 + 169 + 170 + 171 + 172 + 173 + 174 + 175 + 176 + 177 + 178 + 179 + 180 + 181 + 182 + 183 + 184 + 185 + 186 + 187 + 188 + 189 + 190 + 191 + 192 + 193 + 194 + 195 + 196 + 197 + 198 + 199 + 200 + 201 + 202 + 203 + 204 + 205 + 206 + 207 + 208 + 209 + 210 + 211 + 212 + 213 + 214 + 215 + 216 + 217 + 218 + 219 + 220 + 221 + 222 + 223 + 224 + 225 + 226 + 227 + 228 + 229 + 230 + 231 + 232 + 233 + 234 + 235 + 236 + 237 + 238 + 239 + 240 + 241 + 242 + 243 + 244 + 245 + 246 + 247 + 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253 + 254 + 255 + 256 + 257 + 258 + 259 + 260 + 261 + 262 + 263 + 264 + 265 + 266 + 267 + 268 + 269 + 270 + 271 + 272 + 273 + 274 + 275 + 276 + 277 + 278 + 279 + 280 + 281 + 282 + 283 + 284 + 285 + 286 + 287 + 288 + 289 + 290 + 291 + 292 + 293 + 294 + 295 + 296 + 297 + 298 + 299 + 300 + 301 + 302 + 303 + 304 + 305 + 306 + 307 + 308 + 309 + 310 + 311 + 312 + 313 + 314 + 315 + 316 + 317 + 318 + 319 + 320 + 321 + 322 + 323 + 324 + 325 + 326 + 327 + 328 + 329 + 330 + 331 + 332 + 333 + 334 + 335 + 336 + 337 + 338 + 339 + 340 + 341 + 342 + 343 + 344 + 345 + 346 + 347 + 348 + 349 + 350 + 351 + 352 + 353 + 354 + 355 + 356 + 357 + 358 + 359 + 360 + 361 + 362 + 363 + 364 + 365 + 366 + 367 + 368 + 369 + 370 + 371 + 372 + 373 + 374 + 375 + 376 + 377 + 378 + 379 + 380 + 381 + 382 + 383 + 384 + 385 + 386 + 387 + 388 + 389 + 390 + 391 + 392 + 393 + 394 + 395 + 396 + 397 + 398 + 399 + 400 + 401 + 402 + 403 + 404 + 405 + 406 + 407 + 408 + 409 + 410 + 411 + 412 + 413 + 414 + 415 + 416 + 417 + 418 + 419 + 420 + 421 + 422 + 423 + 424 + 425 + 426 + 427 + 428 + 429 + 430 + 431 + 432 + 433 + 434 + 435 + 436 + 437 + 438 + 439 + 440 + 441 + 442 + 443 + 444 + 445 + 446 + 447 + 448 + 449 + 450 + 451 + 452 + 453 + 454 + 455 + 456 + 457 + 458 + 459 + 460 + 461 + 462 + 463 + 464 + 465 + 466 + 467 + 468 + 469 + 470 + 471 + 472 + 473 + 474 + 475 + 476 + 477 + 478 + 479 + 480 + 481 + 482 + 483 + 484 + 485 + 486 + 487 + 488 + 489 + 490 + 491 + 492 + 493 + 494 + 495 + 496 + 497 + 498 + 499 + 500 + 501 + 502 + 503 + 504 + 505 + 506 + 507 + 508 + 509 + 510 + 511 + 512 + 513 + 514 + 515 + 516 + 517 + 518 + 519 + 520 + 521 + 522 + 523 + 524 + 525 + 526 + 527 + 528 + 529 + 530 + 531 + 532 + 533 + 534 + 535 + 536 + 537 + 538 + 539 + 540 + 541 + 542 + 543 + 544 + 545 + 546 + 547 + 548 + 549 + 550 + 551 + 552 + 553 + 554 + 555 + 556 + 557 + 558 + 559 + 560 + 561 + 562 + 563 + 564 + 565 + 566 + 567 + 568 + 569 + 570 + 571 + 572 + 573 + 574 + 575 + 576 + 577 + 578 + 579 + 580 + 581 + 582 + 583 + 584 + 585 + 586 + 587 + 588 + 589 + 590 + 591 + 592 + 593 + 594 + 595 + 596 + 597 + 598 + 599 + 600 + 601 + 602 + 603 + 604 + 605 + 606 + 607 + 608 + 609 + 610 + 611 + 612 + 613 + 614 + 615 + 616 + 617 + 618 + 619 + 620 + 621 + 622 + 623 + 624 + 625 + 626 + 627 + 628 + 629 + 630 + 631 + 632 + 633 + 634 + 635 + 636 + 637 + 638 + 639 + 640 + 641 + 642 + 643 + 644 + 645 + 646 + 647 + 648 + 649 + 650 + 651 + 652 + 653 + 654 + 655 + 656 + 657 + 658 + 659 + 660 + 661 + 662 + 663 + 664 + 665 + 666 + 667 + 668 + 669 + 670 + 671 + 672 + 673 + 674 + 675 + 676 + 677 + 678 + 679 + 680 + 681 + 682 + 683 + 684 + 685 + 686 + 687 + 688 + 689 + 690 + 691 + 692 + 693 + 694 + 695 + 696 + 697 + 698 + 699 + 700 + 701 + 702 + 703 + 704 + 705 + 706 + 707 + 708 + 709 + 710 + 711 + 712 + 713 + 714 + 715 + 716 + 717 + 718 + 719 + 720 + 721 + 722 + 723 + 724 + 725 + 726 + 727 + 728 + 729 + 730 + 731 + 732 + 733 + 734 + 735 + 736 + 737 + 738 + 739 + 740 + 741 + 742 + 743 + 744 + 745 + 746 + 747 + 748 + 749 + 750 + 751 + 752 + 753 + 754 + 755 + 756 + 757 + 758 + 759 + 760 + 761 + 762 + 763 + 764 + 765 + 766 + 767 + 768 + 769 + 770 + 771 + 772 + 773 + 774 + 775 + 776 + 777 + 778 + 779 + 780 + 781 + 782 + 783 + 784 + 785 + 786 + 787 + 788 + 789 + 790 + 791 + 792 + 793 + 794 + 795 + 796 + 797 + 798 + 799 + 800 + 801 + 802 + 803 + 804 + 805 + 806 + 807 + 808 + 809 + 810 + 811 + 812 + 813 + 814 + 815 + 816 + 817 + 818 + 819 + 820 + 821 + 822 + 823 + 824 + 825 + 826 + 827 + 828 + 829 + 830 + 831 + 832 + 833 + 834 + 835 + 836 + 837 + 838 + 839 + 840 + 841 + 842 + 843 + 844 + 845 + 846 + 847 + 848 + 849 + 850 + 851 + 852 + 853 + 854 + 855 + 856 + 857 + 858 + 859 + 860 + 861 + 862 + 863 + 864 + 865 + 866 + 867 + 868 + 869 + 870 + 871 + 872 + 873 + 874 + 875 + 876 + 877 + 878 + 879 + 880 + 881 + 882 + 883 + 884 + 885 + 886 + 887 + 888 + 889 + 890 + 891 + 892 + 893 + 894 + 895 + 896 + 897 + 898 + 899 + 900 + 901 + 902 + 903 + 904 + 905 + 906 + 907 + 908 + 909 + 910 + 911 + 912 + 913 + 914 + 915 + 916 + 917 + 918 + 919 + 920 + 921 + 922 + 923 + 924 + 925 + 926 + 927 + 928 + 929 + 930 + 931 + 932 + 933 + 934 + 935 + 936 + 937 + 938 + 939 + 940 + 941 + 942 + 943 + 944 + 945 + 946 + 947 + 948 + 949 + 950 + 951 + 952 + 953 + 954 + 955 + 956 + 957 + 958 + 959 + 960 + 961 + 962 + 963 + 964 + 965 + 966 + 967 + 968 + 969 + 970 + 971 + 972 + 973 + 974 + 975 + 976 + 977 + 978 + 979 + 980 + 981 + 982 + 983 + 984 + 985 + 986 + 987 + 988 + 989 + 990 + 991 + 992 + 993 + 994 + 995 + 996 + 997 + 998 + 999 + 1000]$$

۲۲۔ ایک گردشی مکانی نما کو اس کے راس سے فاصلہ ب پر ایک سطح مستوی سے کاٹا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مجسم کی کشش اس کے اس کے

$$\pi \text{ جہرہ } 1 \text{ لوک } \frac{1}{2} \text{ جہاں } 1 \text{ مکانی کا دتر خاص ہے۔}$$

۲۳۔ ایک ٹھوس متجانس چمچے کرد نما کو محور اصغر پر علی الاطلاق سطح مستوی سے دو مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک نصف کی کشش اس کی مستوی سطح کے کنارہ

$$\text{پر کے کسی نقطہ پر فاصلہ کی سطح مستوی کے ساتھ زاویہ مس} \frac{\pi}{2} \text{ (مستوی ز) } \text{ بناتی}$$

ہے جہاں ۱ اور ج نیم محور ہیں اور ز محور اصغر میں سے گزرنے والی کسی مستوی تراش کا خروج المکرز ہے۔

$$\pi \text{ جہرہ } 1 \text{ اگر ایک پتہ امبدایں سے گزرنے اور زائد } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 \text{ سے محیط ہو تو ثابت}$$

$$\text{کرو کہ اس کی جو کشش ناقص } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ پر کے کسی نقطہ پر}$$

$$\text{ہوگی اس کا ہی جزو ترکیبی } \frac{\pi}{2} \text{ جہرہ } 1 \text{ ہوگا جہاں ہ نقطہ مذکور کا ہی محدود ہے اور}$$

م کمیت ہے پترے کے اکائی رقبہ کی۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ ایک ٹھوس لمبہ جہرے کرد نما کے قطب پر استوائی سطح مستوی کے دوسرے جانب کے مادہ سے جو کشش پیدا ہوتی ہے وہ

$$\pi \text{ جہرہ } 1 \text{ [} \frac{1}{2} - (2 - \sqrt{2}) + \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \text{ لوک } \frac{1}{2} \text{ (} \frac{1}{2} \text{)} \text{]}$$

ہے جہاں نصف النہاری ناقص کا نیم محور ۱ اور ز خروج المکرز ہے اور ج مجسم کی

کثافت ہے۔

۲۶۔ ایک منحنی کی قوس ایک ذرہ کو جو اس کے قطب پر پڑا ہے قوت $\frac{m}{r^2}$ سے کشش کرتی ہے۔ اگر حاصل کشش دونوں سروں کے نیم قطروں کے درمیانی زاویہ کی تصنیف کرے تو ثابت کر دے کہ منحنی کی مسادات ہوگی

۱۔ جب $\{ (n-1) \} = \{ \text{مستقل} \}$

۲۷۔ اگر ایک متخاص گردشیں جسم جس کی کمیت m اور کثافت ρ ہے ایسا ہو کہ اس کی کشش گردشیں محور پر کے کسی نقطہ و بڑی سے بڑی ہو تو ثابت کر دے کہ جسم جس منحنی کی گردش سے پیدا ہوتا ہے اس کی مسادات ہے

۲ = ۱ جسم ط

[فرض کر دے کہ گردش کا محور دلا ہے۔ ظاہر ہے کہ وہ جسم پر واقع ہو گا۔ وہ سطح جوالیسی ہو کہ اس پر کے کسی ذرہ کی کشش کا دلا کے متوازی جزو تحلیل ہی رہے

مرکباً جسم ط = مستقل یعنی ۲ = ۱ جسم ط (۱)

ہوئی چاہیئے۔ لہذا ایسا منتخب کر دے کہ معلومہ مادہ کی کل کمیت m عین اس سطح کے اندر آجائے

یعنی $m = (۱) =$ سے جو گردشیں سطح حاصل ہوتی ہے اس کی کمیت $= \frac{4\pi r^2 \rho}{3} = ۱$ ۔ یہ نتیجہ تکمیل

کرنے سے آسانی حاصل ہو سکتا ہے۔ اب اس طرح حاصل شدہ سطح مطلوبہ سطح ہے۔ کیونکہ فرض کر دے کہ ہم مادہ کے ایک چھوٹے جزو سطح کے اندر کے نقطہ n سے ہٹا کر باہر کے نقطہ n پر لے جاتے ہیں۔ نیز فرض کر دے کہ n اور n سطح سے q اور q پر ملتے ہیں۔ تب مرکباً q پر کے ایک ذرہ پر m کی کشش جبکہ یہ مقام n پر ہے اس کشش سے بڑی ہوگی جبکہ یہ مقام q پر ہے اور اس کی کشش جبکہ یہ n پر ہو چھوٹی ہوگی اس کشش سے جبکہ یہ q پر ہو ساتھ ہی اس کے جبکہ یہ q پر ہو یا q پر ہو تو اس کی کششوں کے جزو تحلیل دلا کی سمت میں وہی ہیں۔ اس لئے

م کو سطح کے اندر سے سطح کے باہر لانے میں دلا کے متوازی کشش میں کمی واقع ہوتی ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہوا]

۲۸۔ ایک یکساں ٹھوس کرہ کی کثیت م ہے۔ اُس کو اس کے مرکز میں سے گزرنے والی سطح ستوی سے دو مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان نصفوں کے

درمیان جو تعامل باہمی کشش کی وجہ سے ہے وہ $\frac{3}{16}$ جو $\frac{2}{9}$ کے مساوی ہوگا جہاں کرہ کا نصف قطر ہے۔

میرٹھا ایک نصف کرہ کی کشش خود پر صفر ہے کیونکہ یہ مساوی اور مختلف قوتوں کے زوجوں پر مشتمل ہے اس لئے ایک نصف کی کشش دوسرے نصف پر مساوی ہے ایک نصف پہل کرہ کی کشش کے۔ فرض کرو کہ اس نصف کا کوئی نقطہ N ہے، و N = r، > N دی = ط جہاں و مرکز ہے اور وی عمود ہے کاٹنے والی سطح ستوی پر۔

کل کرہ کی کشش N پر = $\frac{4}{3} \times \pi \times \text{جر}$ [دفعہ ۲۸۷] اور حجم کے جس جزو کی وجہ سے

یہ کشش عمل کر رہی ہے وہ = نصف ط × نصف ر × $\pi \times$ ر جب ط

اس لئے کل کرہ کی کشش ایک نصف پر ستوی سطح کے علی القوائم سمت میں

$$= \frac{4}{3} \times \pi \times \text{جر} \times \text{فر} \times \pi \times \text{رجب ط} \left[\text{جر} \times \frac{4}{3} \times \pi \times \text{جر} \right] \text{جم ط}$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times \text{جر}^2 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{9} \times \pi \times \frac{2}{3}$$

ان دو نصف کرہوں کے درمیان حاصل تعامل ان کے باہمی حاصل کشش کے مساوی ہے۔

متبادل ثبوت۔ سیال کے ایک ایسے کرہ پر غور کرو جو صرف اپنی کشش کے زیر عمل

ساکن ہو۔ ایک نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے رہے کشش = $\frac{4}{3} \times \pi \times \text{جر}$

اس لئے سکون سیالات کی اساسی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{مف د}}{\text{جر}} = \frac{\pi \times \text{جر}^2}{3} \times \text{فر}$$

۳۳۔ ایک یکساں متجانس کرہ ایک مستوی مستدیر تختی پر اس طرح دکھا ہوا ہے کہ کرہ تختی کے مرکز پر مس کرتا ہے۔ کرہ اور تختی کے قطر اور کثیتیں مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ باہمی تجاذب کی وجہ سے ان کا باہمی تعامل ۴ لمحہ جب $\frac{\pi}{2}$ (ان میں سے ایک کا وزن) ہوگا جان لا مشبت ہے کسی ایک کے نصف قطر کو زمین کے نصف قطر کے ساتھ اور یہ نسبت ہے کہ کی کثافت کو زمین کی اوسط کثافت کے ساتھ۔

۳۴۔ ایک متجانس کرہ کا نصف قطر ۱ اور کثیت ۴ ہے۔ یہ کرہ ایک دوسرے نصف کرہ کے مستوی قاعدہ کو مرکز پر مس کرتا ہے۔ نصف کرہ کا نصف قطر ۱ اور کثیت ۴ ہے۔ ثابت کرو کہ باہمی کشش کی وجہ سے ان کے درمیان دباؤ $\frac{1}{4}$ (۱-۲) ہے۔

۳۵۔ ایک یکساں مستدیر تختی کی کثیت ۴ ہے اور یہ اسی نصف قطر کے ایک کشش کرنے والے ثابت کھردرے کرہ پر بجالت سکون پڑی ہے۔ اگر تختی کے کنارہ کے ساتھ ایک چھوٹا وزن ۴ لگا دیا جائے تو ثابت کرو کہ تختی ایک ایسے زاویہ میں سے گھوم جائیگی جس کا قوسی پیمانہ $\frac{\pi}{4}$ ہوگا جہاں $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ کے مربعوں کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ ایک یکساں پتلے مساوی الامتلاخ مثلث ΔABC کا قعر ایک ایسے نقطہ پر جو اس کے مرکز و میں سے گزرنے والے اور اس کی سطح پر علی التواضع خط رد واقع ہے یہ ہوگا

$$\frac{2}{3} \text{ جب } m \text{ و } \left[\text{مس } \frac{2}{3} \text{ جب } m - \frac{2}{3} \text{ جب } m + \frac{2}{3} \text{ مس } (2 \text{ جب } m) \right]$$

جہاں m اس مثلث کی کثیت ہے، Δ اس کے ایک ضلع کا طول ہے اور Δ = ع۔ [مثلث کو قاعدہ کے متوازی خطوں سے بنا ہوا فرض کرو]۔

۳۷۔ ایک یکساں منتظم چار سطحی مجسم کشش کرنے والے مادہ سے بنا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز پر قعر ہے

$$\frac{1}{4} \left\{ \frac{\pi}{4} - (2 + 2) \right\}$$

ہے جہاں م فکر کی کمیت اور اس کے ایک کنارہ کا طول ہے۔

(سوال اقل کے نتیجہ کو مستقال کرو)

۳۸۔ ایک منظم چار سطحی کا ایک رخ کشش کرنے والے مادہ سے بنا ہوا ہے اس رخ کے مقابل کے راس سے ایک ذرہ اس رخ کی کشش کے زیر عمل کرتا ہے چار سطحی کی سطحی کثافت ص ہے اور اگر کشش کا کلیہ مقلوب مربع کا کلیہ ہو تو ثابت کرو کہ جب ذرہ جاذب رخ پر آکر گلیگا تو اس کی رفتار کا مربع

$$۲ \text{ صہ } ۱۷۳۲ \text{ (لوک } (+۱ \frac{۲}{۳۲}) + ۱۷۲۲ \text{ مہ } ۱۷۳۲ - \frac{۲۱۷۳}{۳} \text{)}$$

ہوگا جہاں اس کے ایک ضلع کا طول ہے اور باقی رخ کسی قسم کی کشش نہیں کرتے۔
۳۹۔ اگر م اور م کوئی دو کمیتیں ہوں اور کمیت م کے کسی جزو ص م پر م کا قہ قہ ہو اور کمیت م کے کسی جزو ص م پر م کا قہ قہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$ق ق فرم = ق ق فرم$$

۴۰۔ اگر ایک مادہ فاصلہ کی ن دیں قوت کے مطابق کشش کرے تو اس کی کچھ مقدار کا قہ کسی نقطہ پر قہ ہوتا ہے اور اگر کشش کا ضابطہ فاصلہ کی (ن-۲) دیں قوت ہو تو قہ قہ۔ چوتھا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{لف } قن = (ن-۱)(ن+۲) قن-۲$$

۴۱۔ ایک تہجائس پتلے کروی فول کے کسی اندرونی نقطہ ن (لا ا ی) کے لئے قہ قہ قہ قہ ذ (لا ا ی) ہو تو بیرونی نقطہ ن (لا ا ی) پر قہ قہ

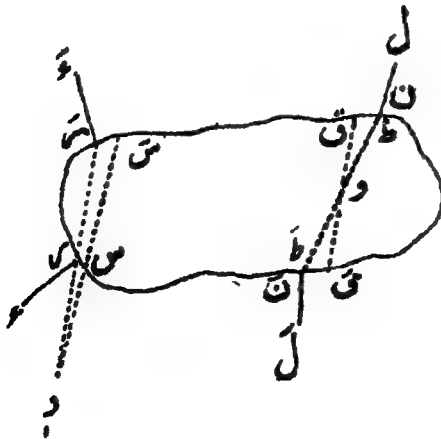
۱/۲ ذ (لا ا ی) ۱/۲۲ ۱/۲۲ (لا ا ی) ہوگا جہاں فول کا نصف قطر ہے اور آ نقطہ ن کا مرکز سے فاصلہ ہے۔

پندرھواں باب

کشش اور قوت

عام مسائل

۳۰۳۔ کسی بند سطح پر عادی کششوں کا تکملہ (گٹاؤس کا مسئلہ)۔
 اگر ایک بند سطح کے کسی جزو معن سے کسی نقطہ پر ایک کشش کرنے والی
 کیت کی وجہ سے جو کشش ہو اس کا جزو ترکیبی معن سے پرکے عماد کی سمت میں
 باہر کی طرف E ہو تو Q کے فرس $= - ۴$ جو ۱۱ ہر
 جہاں ہر سطح کے اندر کشش کرنے والی کل کیت کی مقدار ہے اور دوسرے مکمل
 کو دوسری سطح پر لیا گیا ہے۔



توضیح کرو کہ سطح کے
 اندر کشش کرنے والی
 کیت کے کسی جزو کا
 مقام دے۔ دس سے
 ایک مخروط کھینچو جس کا
 راسی زاویہ بہت چھوٹا
 ہو اور فرض کرو کہ دوسری
 کو N اور Q کی پر

کاتا ہے جن کے رقبے مع س اور مع س ہیں۔

کمیت کی کشش ان اجزاء پر بالترتیب

- جرم $\frac{مع س}{ون^۱}$ جب $ون ق^۱$ ظن ل کی سمت میں

اور - جرم $\frac{مع س}{ون^۲}$ جب $ون ق^۲$ ظن ل کی سمت میں

ہیں جہاں ن ل اور ن ل، ن اور ن پر باہر کی طرف کھینچے ہوئے عمادوں کی سمتیں ہیں۔

ق اور ق میں - سے ان چھوٹے مخروطوں کی عمادی حراشیں ق ط اور ق ط کھینچو اور فرض کرو کہ مخروط کا مجسم زاویہ مع س ہے، تب

$$مع س = \frac{ون^۱}{ون^۱} = \frac{مع س \times جرم ط ق ن}{ون^۱} = \frac{مع س \times جرم ون ق}{ون^۲}$$

$$= \frac{مع س \times جرم ون ق}{ون^۲} = \frac{مع س \times جرم ون ق}{ون^۲}$$

$$اور اسی طرح مع س = \frac{مع س \times جرم ون ق}{ون^۲}$$

اس لئے نقطے ن اور ن پر اجزاء مع س اور مع س میں سے ہر ایک کے لئے عمادی کشش = - جرم مع س

اس لئے کل سطح کے لئے مجموعی عمادی کشش = - جرم ح مع س = - جرم $\times \pi^۴$ یعنی اوپر کے ایک واحد ذرہ م کے لئے

$$کراہ فرس = - جرم $\times \pi^۴$ م$$

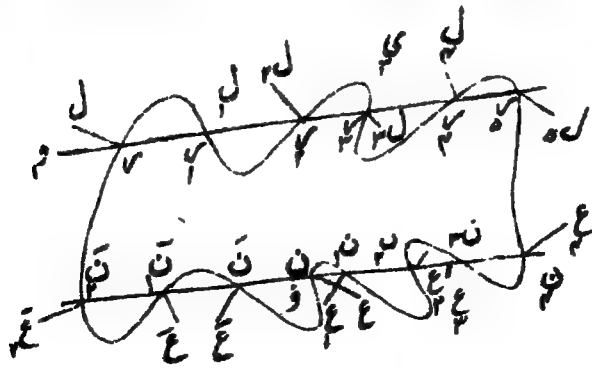
یہی کیفیت سطح مذکور کے دیگر کشش کرنے والے ذروں کی ہے۔ پس بالآخر کل کمیت کے لئے

[[ع فرس = - ۲ ج ۲ م

اب فرض کرو کہ بند سطح کے باہر و مقام پر ایک کشش کرنے والا ذرہ ہے۔
 حسب سابق ایک چھوٹا مخروط و مکینچو جو سطح کو سراس اور سراس پر قطع کرے تب
 پہلے کی طرح سراس اور سراس پر کی عادی کششیں مساوی ہونگی لیکن
 ان کی علامتیں مختلف ہونگی کیونکہ سرعماد کی سمت میں باہر کی جانب کشش ثابت ہوگی۔
 اور سراس پر عماد کی سمت میں باہر کی جانب کشش منفی ہوگی۔ اس لئے جزوی سطحوں
 سراس اور سراس کے لئے عمادی کششوں کے اجزا جہ م م م م اور
 - جہ م م م م ہونگے۔ اس لئے ان کا مجموعہ صفر ہے۔

یہی بات دہیں سے گزرنے والے سب کے سب چھوٹے مخروطوں پر صادق
 آتی ہے۔ اس لئے سطح کے باہر کی کسی جزوی کیت م کے لئے عمادی کشش کا
 سطحی تکملہ صفر ہوتا ہے، اس لئے کل کیت م کے لئے بھی جو سطح کے باہر واقع ہو
 تکملہ مذکور صفر ہوگا۔

[اوپر کی شکل میں دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ جب کشش کرنے والی کیت سطح
 کے اندر ہو جیسے و پرتو دونوں زاوئے دن ل اور دن ل منفرد زاوئے
 ہوتے ہیں، جب کیت باہر ہو جیسے و پرتو ایک زاویہ و سراس منفرد ہوتا ہے
 اور دسراس و سراس عادی ہوتا ہے۔]
 ۳۰۴۔ اگر جزوی مخروط بند سطح کو دو سے زیادہ تراشوں پر قطع کرے تو بھی آسانی



دیکھا جاسکتا ہے کہ متذکرہ بالا نتیجہ درست رہے گا۔
 کیونکہ زاوئے و ن ع ، و ن م ع ، و ن ہ ع ، و ن ع اور و ن م ع
 سب کے سب منفرد ہیں اور ہر ایک کے مکملہ کا متناظر جزو - جرم معف سے ہے
 نیز زاوئے و ن ع اور و ن م ع اور و ن ہ ع حادے ہیں اور متناظر
 مکملے + جرم معف سے ہیں۔

اس لئے ان تمام نقطوں کے لئے مکملوں کا مجموعہ

$$= ۵ \text{ جرم معف سے} + ۳ \text{ جرم معف سے}$$

$$= ۲ \text{ جرم معف سے} \quad \text{جیسا کہ پہلی شکل میں درست تھا۔}$$

اس لئے پہلی شکل کی طرح کل سطح کے لئے

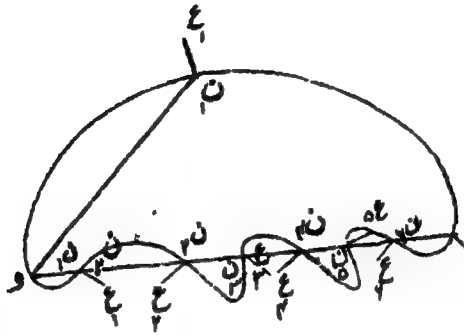
$$\text{ع فرس} = - \text{جرم} \times ۳۴$$

اسی طرح کسی بیرونی نقطہ سے شروع کر کے زاوئے و سہل، و سہل، و سہل
 اور و سہل، منفرد ہیں اور اس لئے ہر ایک متناظر جزوی مکملہ - جرم معف سے
 کے مساوی ہے۔ نیز زاوئے و سہل، و سہل، و سہل حادہ ہیں
 اور ہر متناظر مکملہ + جرم معف سے کے مساوی ہے۔
 پس اس چھوٹے سے مخروط کے لئے عمادی کشش کا کل سطحی مکملہ صفر ہے
 اس لئے پہلی شکل کی مانند $\text{ع فرس} = -$

۵. ۳۔ جب نقطہ وسط پر ہو یعنی جب کشش کرنے والی مقدار سطح پر ہو تو وہیں
 سے گزرنے والا چھوٹا مخروط سطح سے ایک نقطہ پر یا طاق نقطوں پر لئے گا ہر صورت
 میں سطحی مکملہ کا جو جزو سے پیدا ہوتا ہے وہ جرم معف سے ہوگا۔ اس لئے م کی
 وجہ سے کل سطحی مکملہ ہوگا۔ جرم فرس جہاں فرس، و پر کی ماسی سطح مستوی

کے صرف ایک طرف کا مجسم زاویہ ہے لہذا اس صورت میں

$$[-] \text{ جرم فرسہ } = - \text{ جرم } \times \pi^2$$

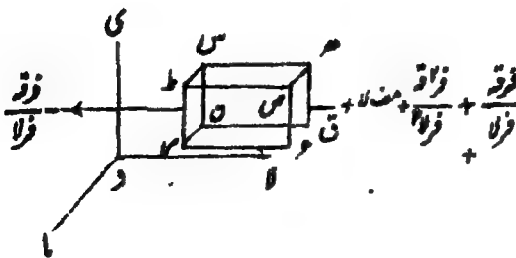


اسی طرح سے سطح پر کی کثیت کے کسی اور جزو کے لئے
اس لئے اگر کشش کرنے والی کثیت کی مقدار بند سطح پر م ہو تو اس کی وجہ
سے عادی مدت کا سطحی بمکملہ π^2 جہ م ہوگا۔

۳.۶۔ لاپلاس اور پوئیسون کی مساواتیں۔

اگر ایک بند سطح کے کسی نقطہ پر باہر کی طرف عادی کشش ع ہو تو دفعہ
۳.۳ کی رو سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$[[\text{ع فرسہ } = - \pi^2 \text{ جہ م } \dots \dots \dots (1)$$



جہاں م سطح کے اندر
کشش کرنے والے
مادہ کی مقدار ہے۔
اب بند سطح کی بجائے
ایک مستطیلی متوازن سطح
کو جس کا ایک راسی نقطہ

ن (لا، ما، ی) ہو اور جس کے کنارے محوروں کے متوازی ہوں اور طول میں
مف لا، مف ما، مف می ہوں۔
چونکہ رخ ن سراسر بہت چھوٹا ہے اس لئے انتہا میں اس کے ہر ایک
نقطہ پر مساوی قوت عمل کرتی ہے اور $\frac{\text{جفت ف}}{\text{جفت لا}}$ کے مساوی ہے اور ولا کی
منفی سمت میں عمل کرتی ہے

اس لئے $\int C \times \text{فرس کا حصہ جو اس رخ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے وہ ہے}$
 $\frac{\text{جفت ف}}{\text{جفت لا}} \times \text{مف ما} \times \text{مف می}$

نیز اگر $\frac{\text{جفت ف}}{\text{جفت لا}} = \text{ن (لا)}$ تو محور لاکئی ثبوت میں ترکیبی قوت جو رخ قی و ص ہ
کے ہر ایک نقطہ پر عمل کرتی ہے وہ

$$= \text{ن (لا + مف لا)} = \text{ن (لا)} + \text{مف لا} \times \text{ن (لا)} + \dots + \dots + \dots$$

$$= \frac{\text{جفت ف}}{\text{جفت لا}} + \frac{\text{جفت ف}}{\text{جفت لا}} \times \text{مف لا} + \dots + \dots + \dots$$

اس لئے $\int C \times \text{فرس کا جو جزو اس رخ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے وہ}$
 $= \left(\frac{\text{جفت ف}}{\text{جفت لا}} + \frac{\text{جفت ف}}{\text{جفت لا}} \times \text{مف لا} + \dots \right) \times \text{مف ما} \times \text{مف می}$

اس لئے ان دو رخوں سے $\int C \times \text{فرس کا جو حصہ پیدا ہوتا ہے وہ}$
 $= \left(\frac{\text{جفت ف}}{\text{جفت لا}} + \dots \right) \times \text{مف لا} \times \text{مف ما} \times \text{مف می}$
اسی طرح سے محور ما اور می پر عمود وار رخوں کے لئے $\int C \times \text{فرس کے}$
حصے بالترتیب

$$\left(\text{جف}^۲ \text{ق} + \dots \right) \text{مف لا} \times \text{مف ما} \times \text{مف ی اور} \left(\text{جف}^۲ \text{ق} + \dots \right) \text{مف لا}$$

\times مف ما \times مف ی ہیں۔

نیز اگر یہ جزوی متوازی السطوح کشش کرنے والے مادہ کے اندر لیا جائے تو
 ہر = متوازی السطوح کی کیت = م مف لا \times مف ما \times مف ی جہاں م کثافت ہے۔
 اس لئے گاؤس کے مسئلہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{لا}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{ما}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{ی}} + \dots \right) \text{مف لا} \times \text{مف ما} \times \text{مف ی} = - \text{م} \text{ ج م} \times$$

مف لا مف ما مف ی یعنی مف لا \times مف ما \times مف ی پر تقسیم کر دینے سے اور انتہا لینے سے

$$\text{لف}^۲ \text{ق} = \left(\frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{لا}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{ما}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{ی}} \right) = - \text{م} \text{ ج م}$$

$$\text{جہاں عامل} \left(\frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{لا}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{ما}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{ی}} \right) \text{کو اختصار کے لئے علامت لفا}^۲$$

سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ یہ یونیون کی مساوات ہے۔

اگر نقطہ ن اور چھوٹا سا متوازی السطوح، کشش کرنے والے مادہ کے
 باہر ہو یعنی متوازی السطوح مذکور کے اندر مادہ کی مقدار صفر ہو تو مساوات بالا ہوجی،

$$\text{لف}^۲ \text{ق} = \frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{لا}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{ما}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{ی}} = -$$

اس مساوات کو لابلاس کی مساوات کہتے ہیں۔

اس مساوات کو محض تفرق کرنے سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ دفعہ ۲۹۶ کی مانند دفعہ

۲۹۲ کے جملوں کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{لا}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{ما}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ق}}{\text{جف}^۲ \text{ی}}$$

$$= - \text{م} \text{ ج م} \left[\frac{\text{ن}^۲}{\text{ن}^۲} - \frac{\text{ن}^۲}{\text{ن}^۲} \right] = - \text{م} \text{ ج م} \left[\frac{\text{ن}^۲}{\text{ن}^۲} - \frac{\text{ن}^۲}{\text{ن}^۲} \right]$$

اگر ن کشش کرنے والی کیت کے باہر واقع ہو یعنی ن ق کبھی صفر نہ ہو تو اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جفت}^2 \text{ق}}{\text{جفت}^2 \text{ق}} + \frac{\text{جفت}^2 \text{ق}}{\text{جفت}^2 \text{ق}} + \frac{\text{جفت}^2 \text{ق}}{\text{جفت}^2 \text{ق}} = 0$$

۳۰۷۔ احصائے تفریق کے معمولی قاعدوں کے مطابق تفریق کرنے سے یا غیر تابع متغیروں لا، ما، ی کو ر، ط، ذ میں ان رشتوں

$$\text{لا} = \text{رجب ط} \times \text{جم ذ}، \text{ما} = \text{رجب ط جبب ذ اور ی} = \text{رجب ط}$$

کی مدد سے تبدیل کرنے سے یا ذہناً ماقبل کے طریقہ کے اصول کی بنا پر ایسوں کی مساوات کو قطعی محدودوں میں حسب ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{\text{جفت}}{\text{جفت ر}} \left[\text{رمف ط} \times \text{رجب ط} \times \text{مف ذ} \times \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ر}} \right] + \text{مف ر} \times \frac{\text{جفت}}{\text{رجب ط}} \times$$

$$\left[\text{رجب ط مف ذ} \times \text{مف ر} \times \frac{\text{جفت ق}}{\text{رجب ط}} \right] + \text{رمف ط}$$

$$+ \frac{\text{جفت}}{\text{رجب ط جبب ذ}} \left[\text{رمف ط} \times \text{مف ر} \times \frac{\text{جفت ر}}{\text{رجب ط جبب ذ}} \right] + \text{رجب ط مف ذ}$$

$$= 0 \text{ جم ذ} \times \text{مف ر} \times \text{رمف ط} \times \text{رجب ط مف ذ}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{\text{را}} \left[\frac{\text{جفت}}{\text{جفت ر}} \left(\frac{\text{را}}{\text{جفت ر}} \right) + \frac{1}{\text{جب ط}} \times \frac{\text{جفت}}{\text{جفت ط}} \right] + \left(\text{جب ط} \times \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ط}} \right)$$

$$+ \frac{1}{\text{جب ط}} \times \frac{\text{جفت}}{\text{جفت ذ}} \left(\frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ذ}} \right) = 0 \text{ جم ذ} \times \text{مف ر} \times \text{رمف ط} \times \text{رجب ط مف ذ} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{\text{جفت ر}} \times \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ر}} + \frac{1}{\text{را}} \times \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ط}} + \frac{1}{\text{را}} \times \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ط}} + \frac{1}{\text{جب ط}} \times \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ط}}$$

$$+ \frac{1}{\text{را جب ط}} \times \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ق}} = 0 \text{ جم ذ} \times \text{مف ر} \times \text{رمف ط} \times \text{رجب ط مف ذ} \quad (۲)$$

جہاں م کثافت ہے۔

$$= \text{اس کی قیمت مرکز پر} = \text{جہ} \frac{\text{کمیت}}{\text{نصف قطر}}$$

(۱۱) مارگن خول کے باہر ہو تو چونکہ قد کو لاتنا ہی پر صفر ہونا چاہیئے اس لئے حاصل ہوتا ہے ب۔۔۔ نیز چونکہ قد مسلسل رہے اس لئے اس صورت میں سطح پر اس کی قد قیمت ہونی چاہیئے جو اندرونی نقطہ کے لئے قد کی قیمت سطح پر ہوتی ہے اس لئے

$$\frac{1}{\rho} = \text{جہ} \times \frac{\text{کمیت}}{\text{نصف قطر}} \quad \text{یعنی } 1 = \text{جہ} \times \rho$$

اس لئے خول کے باہر قد = جہ $\frac{1}{\rho}$

ٹھوس کرہ۔ اندرونی نقطہ۔ چونکہ قد محدود ملے اور قد کے غیر تابع ہے اس لئے پوئیسوں کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\text{جہ} \text{ قد}}{r} \right] = - \frac{\pi \rho}{\text{جہ} \text{ م}} \quad \therefore \frac{1}{r} \frac{\text{جہ} \text{ قد}}{\text{جہ} \text{ م}} = - \frac{\pi \rho}{\text{جہ} \text{ م}} + \frac{1}{r} \text{گ}$$

اب $\left(\frac{\text{جہ} \text{ قد}}{r} \right) = \text{مرکز پر حاصل کشش} = - \text{اس لئے گ} = -$

$$\therefore \frac{\text{جہ} \text{ قد}}{\text{جہ} \text{ م}} = - \frac{\pi \rho}{\text{جہ} \text{ م}} \quad \text{یعنی} \quad \text{قد} = - \frac{\pi}{\rho} \text{جہ} \text{ م} + \text{ب}$$

$$\text{لیکن صریحاً قد کی قیمت مرکز پر} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\pi \rho}{\text{جہ} \text{ م}} \right] \text{فرما} = \frac{\pi}{\rho} \text{جہ} \text{ م} = \frac{1}{\rho} \text{ب}$$

$$\therefore \text{قد} = \frac{\pi}{\rho} \text{جہ} \text{ م} - \frac{1}{\rho} \text{ب}$$

۳۰۹۔ مشتق ا۔۔۔ دو لاتنا ہی اسطوانوں $r = \frac{1}{\rho}$ اور $\frac{1}{\rho}$ کے درمیان مادہ اسطح ملقسم ہے کہ کثافت متناسب ہے $\frac{1}{\rho}$ کے اور محور کے متوازی سمت میں کمیت فی اکائی

ہر ایک ہی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ ب بھی لامتناہی مستقل ہوگا [

$$[\frac{1}{9} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}] \frac{\pi^2}{9} - \frac{1}{2} = (اک) - \frac{1}{2}$$

$$= - (لوک ۲ + \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}) = (۲۹ - ۳۳ لوک ۲)$$

مشق ۲ :- اگر ق کی ایک قیمت جو لاپلاس کی مساوات

$$= \frac{جنت ۲}{جنت ۱} + \frac{جنت ۲}{جنت ۲} + \frac{جنت ۲}{جنت ۳}$$

کو قطبی محدودوں میں پورا کرے $\frac{1}{2} (ط، ذ) = \frac{1}{2} (ن+۱) (ط، ذ)$ بھی لاپلاس کی مساوات کو پورا کرے گی۔

۳۱۰۔ مساوی قوت سطی - کشش کرنے والی کیت م کا کسی نقطہ ن

(لا، ما، ی) پر قوت اس کے محدودوں لا، ما، ی کا کوئی تعادل ذ (لا، ما، ی) ہوگا
یعنی ق = ذ (لا، ما، ی) م ان تمام نقطوں کا طریق جہاں قوت کی قیمت مستقل
ہوگا کے مساوی ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوگا

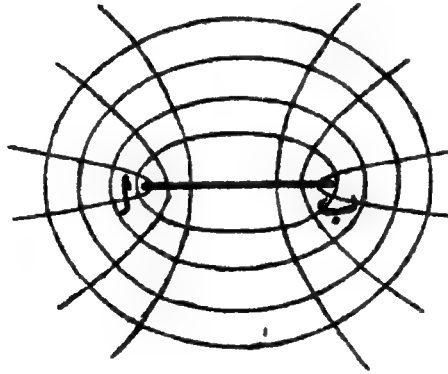
$$ذ (لا، ما، ی) = گ - - - - - (۱)$$

سطح (۱) ایسی سطح ہے کہ اسکے ہر نقطہ پر کشش کرنے والے مادہ کا قوت مستقل
ہے لہذا اس سطح کو مساوی قوت سطح کہتے ہیں۔ مستقل گ کو مختلف قیمتیں دینے سے
مساوی قوت سطیوں کا ایک جٹ حاصل ہوگا۔ ضرر یا یہی نتیجہ حاصل ہوگا خواہ ق کو کسی
محدودوں میں بیان کیا جائے۔

مثلاً ایک سلاخ ا ب (دفعہ ۲۵۸) کا قوت کسی نقطہ ن پر جس کے فاصلے سلاخ
کے سروں سے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ہیں یہ ہے

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

اور بناءً علیہ یہ مستقل رہیگا اگر $r + r$ مستقل ہو۔
 لیکن اگر $r + r$ یعنی $2r$ + $2r$ مستقل ہو تو کاغذ کے مستوی میں N
 کا طریق قطع ناقص ہوگا جس کے a کے a اور b ہیں۔
 پس فصائیں اس کا طریق وہ سطح ہوگی جو اس ناقص کو a کے گرد گھمائی
 سے حاصل ہو۔
 اس لئے مساوی قوتہ سطحیں ایسے گردش ناقص بنائیں جو a کے a اور b کے
 ہم آہنگی ناقصوں کو a کے گرد گھمانے سے حاصل ہوں۔ چند ایسے ناقص شکل میں
 دکھائے گئے ہیں۔



نیز وضاحت (۳۵) اور (۳۶) کے کروں اور کردی خولوں کی صورت میں کسی نقطہ پر قوتہ مرکز
 سے اُس نقطہ کے صرف فاصلہ پر منحصر ہوتا ہے لہذا ان سب نقطوں پر جو ایک ہم مرکز
 کروں کی سطح پر واقع ہوں اس کی قیمت وہی ہوگی۔ پس ان صورتوں میں مساوی قوتہ سطحیں
 ہم مرکز کروں کے نظام پر مستقل ہونگی۔

۳۱۱۔ کسی نقطہ پر قوت کشش 'ن' میں سے گزرنے والی مسادی قوتہ سطح پر عمود دار ہوتی ہے۔

کیونکہ اگر اس مسادی قوتہ سطح پر 'ن' کے قرب میں کوئی اور نقطہ 'ن' ہو تو وہ (۲۹۴) کے بموجب 'ن' کی سمت میں کشش

ن پر قوتہ - ن پر قوتہ = کیونکہ 'ن' مسادی قوتہ سطح پر واقع

ہیں۔ اس لئے ہر ایسی سمت 'ن' کیلئے جو نقطہ 'ن' پر ماسی مستوی میں واقع ہے قوت کشش صفر ہوگی۔

اس لئے نقطہ 'ن' پر حاصل قوت کشش، مسادی قوتہ سطح کے نقطہ 'ن' پر عماد کی سمت میں عمل کرے گی۔

اس نتیجہ کو تجلیلی طور پر یوں ثابت کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ف (لا، ما، ی) = ج (مستقل کوئی مسادی قوتہ سطح ہے تب چونکہ اس پر کے کسی خاص نقطہ 'ن' (لا، ما، ی) پر سطح مذکور کے عماد کی سمتی جیب

التمام بالترتیب جف لا، جف ف، جف ف کے متناسب ہیں اس لئے اگر سطح مستوی کے (نقطہ پر کے) ماسی مستوی پر کوئی خط لیا جائے اور اس کی سمتی جیب التمام ل، م، ن ہوں تو

ل جف لا + م جف ف + ن جف ف = کیونکہ اس خط اور عماد کے درمیان زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

لیکن چونکہ جف لا، جف ف، جف ف محوروں کی سمت میں قوت

کشش کے اجزاء ترکیبی ہیں اس لئے یہ مساوات اس امر کو بیان کرتی ہے کہ خط (ل، م، ن) کی سمت میں حاصل قوت کشش کا جزو ترکیبی صفر ہے۔ یہ بات ماسی مستوی میں تمام خطوط کے لئے صحیح ہے اس لئے حاصل قوت کشش مسادی

قوہ سطح کے عماد کی سمت میں عمل کرتی ہے اور اس لئے مادہ کی کشش ذرہ پر کوئی کام نہیں کرتی جبکہ ذرہ کو سادی قوہ سطح کے ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر منتقل کیا جائے۔

۳۱۲۔ اگر کسی سادی قوہ سطح پر کسی نقطہ سے سطح مذکور کا عماد کھینچا جائے اور اس عماد کا جو جز اس سطح اور متصل سادی قوہ سطح کے درمیان ہے وہ معن ع ہو تو ن پر کی کشش کی قوت معن ع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ کیونکہ اگر ن پر قوہ قہ ہو اور ن پر سادی قوہ سطح کا عماد متصل سادی قوہ سطح سے ن پر ملے اور ن پر قوہ قہ + معن قہ ہو تو ظاہر ہے کہ

$$\frac{ن \text{ پر قوہ} - ن \text{ پر قوہ}}{ن} = \frac{(قہ + معن قہ) - قہ}{معن ع} = \frac{معن قہ}{معن ع}$$

اس لئے ان سب نقطوں پر جو قوہ قہ والی سادی قوہ سطح پر واقع ہیں حاصل قوت کشش معن ع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

۳۱۳۔ سادی قوہ سطحوں کو زمین کے ساتھ ایک مشابہت ہونے کی وجہ سے ہوا سطحیں بھی کہتے ہیں کیونکہ اگر ہم کشش زمین کو مستقل فرض کریں تو کسی نقطہ میں سے گزرنے والی سادی قوہ سطح افقی سطح مستوی ہے یا زیادہ صحیح طور پر زمین سے ہم مرکز ایک بہت بڑے کرہ کا حصہ ہے جس طرح کسی وزن کو چکینے افقی مستوی پر حرکت دینے میں جاؤ ب کے خلاف کوئی کام نہیں ہوتا اسی طرح مادہ کی کشش کے خلاف کوئی کام نہیں ہوتا اگر ایک ذرہ کو اس کے سادی قوہ سطح پر حرکت دیا جائے۔

۳۱۴۔ قوت کے خطوط۔ اگر کسی نقطہ سے ایک چھوٹا سا خط ن، ن پر کی عمال کشش کی سمت میں کھینچا جائے اور پھر ن نقطہ ن پر کی عمال کشش کی سمت میں ایک چھوٹا سا خط کھینچا جائے اور علیٰ ذلک تاس ن، ن وغیرہ ... تو ہمیں ایک شکستہ خط حاصل ہوگا جو ن، ن، ... کو ایک دوسرے کے

نہایت قریب لینے سے ایک مسلسل منحنی بن جائیگا اس منحنی کو قوت کا خط کہتے ہیں۔
بالفاظ دیگر قوت کا خط ایک ایسا منحنی ہوتا ہے جس کے کسی نقطہ پر کا
ماس اس نقطہ پر کشش کی سمت کو تعبیر کرتا ہے۔

چونکہ \dot{N} ، \ddot{N} ، \ddot{N} ، \ddot{N} ، \ddot{N} ، \ddot{N} میں سے ہر ایک خط

\dot{N} ، \ddot{N} ، \ddot{N} میں سے گزرنے والی مساوی قوتوں کے عماد ہیں اس لئے
قوت کا خط اپنے طول کے ہر ایک نقطہ پر متناظر مساوی قوت سطح پر علی التوائم ہے۔
اس لئے قوت کے خطوط ایسے خط ہوتے ہیں جو مساوی قوتوں کے نظام
کو علی التوائم کاٹتے ہیں۔

کرومی خولوں یا گردوں (دفعہ ۳۰۰ اور ۳۰۱) کی صورت میں قوت کے خط
خطوط مستقیم ہوتے ہیں جو مرکز O میں سے گزرتے ہیں۔ یہ سب کے سب مساوی
قوتوں یعنی اہم مرکزوں کو علی التوائم کاٹتے ہیں۔

ایک چلی سلاخ AB کی صورت میں مساوی قوت منحنی قطع ناقص ہوتے ہیں
اور ان سب کے واسطے A اور B پر ہوتے ہیں (شکل دفعہ ۳۱۰)۔

اب ہم جانتے ہیں کہ ہم واسکے ناقصوں کے ایک نظام کو اسی نظام کے ہم واسکے
ناذ علی التوائم کاٹتے ہیں پس پہلی سلاخ کے قوت کے خطوط ایسے لائن ہیں جن کے واسکے
سلاخ کے سرے ہیں ان میں سے بعض زائد دفعہ (۳۱۰) کی شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

۳۱۵۔ قوت کی ملیاں اگر ایک چھوٹے سے

بند منحنی کے خط جانیے ہر ایک نقطہ سے

قوت کے خط کھینچتے جائیں تو ہمیں ایک قسم

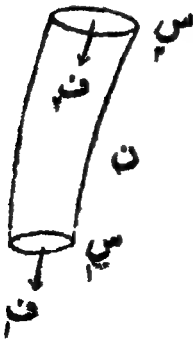
کی نلی سی حاصل ہوتی ہے جس کو قوت کی نلی

کہتے ہیں۔

قوت کے خط کی تعریف کی بنا پر ظاہر ہے

کہ قوت کی نلی کی منحنی سطح کے کسی نقطہ پر کشش

اس سطح کے (نقطہ مذکور پر کے) عماد کی سمت



میں صفر ہوگی۔

قوت کی نلی کے ایسے حصہ پر غور کرو جو دو چھوٹی عمادی تراشوں میں اور
میں سے گھرا ہوا ہے۔ اور فرض کرو کہ سروں میں اور میں پہ عماد کی سمت
میں کششیں بالترتیب F_1 اور F_2 ہیں۔

نیز فرض کرو کہ قوت کی نلی کے اس حصے کے اندر کوئی مادہ نہیں ہے۔
اب نلی کے اس حصہ پر وہ (۳.۳) کا مسئلہ لگاؤ۔ نلی کی سطح پر کے تمام
نقطوں کے لئے سطحی تکملہ صفر ہے کیونکہ اس نقطہ پر عمادی قوت صفر ہے۔
پس سطحی تکملہ کی کل مقدار صرف مستوی سروں کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔ پس
مسئلہ مذکور سے حاصل ہوتا ہے

$$F_1 S_1 + (-F_2) S_2 = 0$$

اس لئے $F_1 S_1 = F_2 S_2$ ۔

خواہ نلی کا طول کچھ ہی ہو ہر حالت میں یہ مسئلہ درست رہتا ہے اس لئے $F_1 S_1 = F_2 S_2$ کی قیمت وہی رہتی ہے تا وقتیکہ ہم ایک ہی نلی پر قائم رہیں یعنی ایک ہی نلی کے
کسی نقطہ پر کشش کی قوت نلی کی عمادی تراش کے رقبہ کے بالعکس متناسب
ہوتی ہے۔

۹۔ اس مسئلہ کی ایک خاص صورت کے طور پر کسی بیرونی نقطہ پر ایک ٹھوس
کرہ کی کشش پر غور کرو۔ قوت کی نلیاں پتلے مخروط ہیں جن سب کے راس کرہ
کے مرکز پر ہیں۔ پس S_1 اس شہم کی مخروط کی عمودی تراش ہے اور S_2 اس لئے
اس کا رقبہ مرکز سے فاصلہ کے مربع کے متناسب ہے۔ اس لئے اس سے نتیجہ
نکلتا ہے جیسا کہ فہ (۲۸۴) میں ثابت کیا گیا تھا کہ ایک ٹھوس کرہ کی کشش کسی
بیرونی نقطہ پر مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔
اسی طرح ایک لاتناہی مجسم مستدیر اسطوانہ پر غور کرو۔ تشاکل سے ظاہر ہے
کہ اس کے محور پر کسی نقطہ سے جو قوتی خطوط نکلتے ہیں وہ سیدھے خط ہیں
اور محور پر عمود وار ہیں پس اس صورت میں قوت کی نلیاں خانہ کی مانند ہیں اور

تراش میں کار قبہ محور واسے اس کے فاصلہ کے متناسب ہے۔ اس لئے ایک لائن ہی اسطوانہ کی کشش کسی بیرونی نقطہ پر محور سے نقطہ مذکور کے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتی ہے (مقابلہ کردہ دفعہ ۲۸۵ مشق ۲)۔

مثالیں

۱۔ ش اور ج ایک مقناطیس کے قطب ہیں۔ اگر ط اور ذ وہ زاوے ہیں جو ش ن اور ج ن ش ج محور کے ساتھ بنائے ہیں اور ش ن = ر اور ج ن = س ترا تو اس مقناطیس کے قوت کے خطوط کی مساوات ہے

جم ط - جم ذ = مستقل

اور مساوی قوت سطحیں ش ج کے گرد منحنیات $\frac{1}{r} - \frac{1}{s}$ مستقل کو گردش دینے سے حاصل ہوتی۔

۲۔ دو لائنیں مستقیم سلاخیں جو ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں ایک دوسرے کو علی التوا قائم قطع کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کی سطح مستوی میں مساوی قوت مغنی قائم زائد ہونگے۔
۳۔ ایک پتلی یکساں سیدھی سلاخ کی کشش کا قانون معلوم کعب کا قانون ہے ثابت کرو کہ مساوی قوت سطحیں خط ابتلائی کے گرد ذیل کے منحنیوں کی گردش سے حاصل ہوتی ہیں

$$(r + a) - 2r = 2r + 2a \quad \text{اور جب } r = 0 \text{ (ج رجب ط)}$$

جہاں ۲ سلاخ کا طول ہے اور ج ایک میل ہے۔

۴۔ ایک ہی کثافت کی دو لائنیں سلاخوں کی مساواتیں ہیں

$$a = \text{لاس } r, \quad y = \text{ج } a, \quad a = \text{لاس } r, \quad y = \text{ج } a$$

ان کی مساوی قوت سطحوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر ایک ذرہ کو لا کر محور پر رکھا جائے تو وہ فضا جس میں ذرہ مذکور کے ہٹاؤ تعادل قائم پیدا کرتے ہیں اور وہ فضا جس میں تعادل غیر قائم ہوتا ہے ایک دوسرے سے سطحوں

اس لئے کل کام جو ذروں کو لاتنا ہی پر کی حالت سکون سے نکال کر ان کی موجودہ تشکیل میں لانے سے سرانجام پاتا ہے وہ

$$= \text{ج} \frac{م}{۱} + \text{ج} \frac{م}{۲} + \text{ج} \frac{م}{۳} + \text{ج} \frac{م}{۴} + \text{ج} \frac{م}{۵} + \text{ج} \frac{م}{۶} + \text{ج} \frac{م}{۷} + \text{ج} \frac{م}{۸} + \text{ج} \frac{م}{۹} + \text{ج} \frac{م}{۱۰} + \dots$$

$$= \text{ج} \frac{م}{۱} + \text{ج} \frac{م}{۲} + \text{ج} \frac{م}{۳} + \text{ج} \frac{م}{۴} + \text{ج} \frac{م}{۵} + \text{ج} \frac{م}{۶} + \text{ج} \frac{م}{۷} + \text{ج} \frac{م}{۸} + \text{ج} \frac{م}{۹} + \text{ج} \frac{م}{۱۰} + \dots$$

جب سب ذرے اپنی موجودہ تشکیل میں آجائیں تو فرض کرو کہ نظام کا وہ نقطہ (۱) پر بالترتیب قم، قہ، .. ہے۔

$$\text{ج} \frac{م}{۱} = \text{ج} \frac{م}{۱} + \text{ج} \frac{م}{۲} + \text{ج} \frac{م}{۳} + \text{ج} \frac{م}{۴} + \text{ج} \frac{م}{۵} + \text{ج} \frac{م}{۶} + \text{ج} \frac{م}{۷} + \text{ج} \frac{م}{۸} + \text{ج} \frac{م}{۹} + \text{ج} \frac{م}{۱۰} + \dots$$

$$\text{ج} \frac{م}{۲} = \text{ج} \frac{م}{۲} + \text{ج} \frac{م}{۳} + \text{ج} \frac{م}{۴} + \text{ج} \frac{م}{۵} + \text{ج} \frac{م}{۶} + \text{ج} \frac{م}{۷} + \text{ج} \frac{م}{۸} + \text{ج} \frac{م}{۹} + \text{ج} \frac{م}{۱۰} + \dots$$

اس لئے صرفاً جلد (۱)

$$= \text{ج} \frac{م}{۱} + \text{ج} \frac{م}{۲} + \text{ج} \frac{م}{۳} + \text{ج} \frac{م}{۴} + \text{ج} \frac{م}{۵} + \text{ج} \frac{م}{۶} + \text{ج} \frac{م}{۷} + \text{ج} \frac{م}{۸} + \text{ج} \frac{م}{۹} + \text{ج} \frac{م}{۱۰} + \dots$$

[یہ کہ جلد (۱) میں اس قسم کی رقم جیسی لکھی گئی ہے فی الحقیقت

دوبار آتی ہے: ایک دفعہ جنہ قس = م میں اور ایک دفعہ قہ = م میں]۔
اس لئے لاتنا ہی سے مادہ کے ذروں کو تشکیل میں لانے میں جو کام ہوا

$$\text{ج} \frac{م}{۱} + \text{ج} \frac{م}{۲} + \text{ج} \frac{م}{۳} + \text{ج} \frac{م}{۴} + \text{ج} \frac{م}{۵} + \text{ج} \frac{م}{۶} + \text{ج} \frac{م}{۷} + \text{ج} \frac{م}{۸} + \text{ج} \frac{م}{۹} + \text{ج} \frac{م}{۱۰} + \dots$$

جہاں قہ جسم کا اس کے کسی جزو فرم ہوا ہے اور یکس کے عمل کو کل جسم کی تشکیل پر چھوڑ دیا ہے۔ یکس اس کے اس جسم کے ذروں کو ان کی موجودہ تشکیل

سے علیحدہ کر کے لاتنا ہی پر لے جانے میں این ذروں کی باہمی کششیں جو کام کرتی

ہیں وہ $-- = \frac{1}{p} \text{ آؤ فرم}$

پس ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ جب کوئی جسم ایک تشکیل (۱) سے ہٹ کر دوسری تشکیل (ب) میں آجائے تو اس کے ذروں کی باہمی کششیں کیا کام کرتی ہیں کیونکہ

یہ کام = ان ذروں کی کششوں کا کام جو ان کششوں نے جسم کے ذروں کو تشکیل (۱) سے نکال کر لاتنا ہی تک لیجائے میں کیا + وہ کام جو انہی ذروں کی کششوں نے لاتنا ہی سے تشکیل (ب) میں لانے میں کیا اور یہ

$-- = \frac{1}{p} \text{ آؤ فرم} + \frac{1}{p} \text{ آؤ فرم}$

ہاں پہلا تکملہ تشکیل (۱) میں تمام نظام برپا گیا ہے اور دوسرا تکملہ تشکیل (ب) میں تمام نظام برپا ہے۔

۳۱۸۔ ایک جاذب بالذات کرہ کی کثافت یکساں اور غ کے مساوی ہے اور اس کا نصف قطر ρ ہے، یہ کرہ بل کر ایک اور یکساں کثافت والا کرہ بن جاتا ہے جس کا نصف قطر b ہے ثابت کرو کہ اس کی باہمی کشش کی قوتوں نے جو کام

کیا وہ $\frac{3}{5} \text{ جہ مرکز ب} - \frac{1}{5} \text{ جہ مرکز ا}$ ہے جہاں مرکزہ کی کمیت ہے۔

پہلی شکل میں مرکز سے فاصلہ لا پر قوتہ (بموجب دفعہ ۳۰۱)

$$\pi \text{ جہ } (2 - \frac{2}{3}) = \pi \text{ جہ } (\frac{4}{3})$$

$$\frac{1}{p} \text{ آؤ فرم} = \frac{1}{p} \int \pi \text{ جہ } (2 - \frac{2}{3}) = \pi \times \pi \text{ لائن فرلا}$$

$$\pi \text{ جہ } \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{15} \right\} = \pi \text{ جہ } \frac{4}{15} = \frac{3}{5} \text{ جہ } \frac{2}{5}$$

اسی طرح $\frac{1}{2}$ [ک] دَ فَرَمَ تشکیل ب کے لئے $\frac{3}{5}$ ج $\frac{3}{5}$ ب ہے۔
پس مطلوبہ کام = $\frac{3}{5}$ ج مر ($\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{5}$)

مثالیں

۱۔ ثابت کر کہ اگر زمین کی کثافت کو یکساں فرض کیا جائے تو زمین کو کثیف کر کے ایک پتلے کر دی خول میں منتقل کر دینے میں جبکہ خول کا نصف قطر وہی ہو جو کام کرنا پڑتا ہے وہ $\frac{1}{2}$ فٹ پونڈ ہے جہاں م زمین کی کثیت ہے پونڈوں میں اور زمین کا نصف قطر ہے فٹوں میں۔

۲۔ ایک کرہ کا نصف قطر اسے اور کثیت م ہے، اگر اس کے کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے نقطہ مذکور کے فاصلہ کے بالعکس تناسب ہو تو ثابت کر کہ کرہ کے ذروں کو اتنا ہی سے ہو جو وہ تشکیل میں ملے جو کام باہمی کششیں انجام دیتی ہیں وہ $\frac{1}{2}$ ج $\frac{1}{2}$ ہے۔

۳۔ ایک مستدیر قرص کے ذروں کو اکٹھا کرنے میں (جبکہ قوت کا قانون نیوٹن کے کلیہ کے مطابق ہو) $\frac{1}{2}$ ج $\frac{1}{2}$ کام کرنا پڑتا ہے جہاں م قرص کی کثیت ہے اور اس کا نصف قطر ہے

[تساوی ثابت ہو سکتا ہے کہ مرکز سے فاصلہ پونڈ = $\frac{1}{2}$ ج مر $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ جب ط فرط

اس لئے مطلوبہ کام = $\frac{1}{2}$ [ک] دَ $\frac{1}{2}$ مر لا فرط = $\frac{1}{2}$ ج مر لا فرط [ک] دَ لا فرط $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ جب ط فرط]

= $\frac{1}{2}$ ج مر لا فرط $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ جب ط فرط = $\frac{1}{2}$ ج مر لا فرط $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ جب ط فرط]

= $\frac{1}{2}$ ج مر لا فرط $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ جب ط فرط = $\frac{1}{2}$ ج مر لا فرط $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ جب ط فرط]

کا عماد محور لاکھ کی مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے۔

$$\left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \times \text{فرس جملہ}$$

جہاں موخر الذکر تکملہ کو لا متناہی کر کے کل سطح پر پھیلانا چاہیے۔

اب $\frac{\text{جنت}^1}{\text{جنت}^2}$ اس فاصلہ کے معکوس کعبہ درجہ کی مقدار ہے جو معنی میں اکثشت کرنے والے مادہ کے کسی نقطہ کے درمیان ہے اور معنی میں اسی فاصلہ کے مربع کے درجہ کی مقدار ہے۔ اس لئے

$$\left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \text{فرس جملہ} =$$

$$= (1) \text{ سے حاصل ہوتا ہے } \left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری} = \left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \left(\frac{\text{جنت}^1}{\text{جنت}^2} \right) \text{فرلا فرما فری}$$

$$\text{ہذا } \left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری} = \left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \left(\frac{\text{جنت}^1}{\text{جنت}^2} \right) + \left(\frac{\text{جنت}^1}{\text{جنت}^2} \right) + \left(\frac{\text{جنت}^1}{\text{جنت}^2} \right) \text{فرلا فرما فری}$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری}$$

اب کشش کرنے والے مادہ کے اندر لٹ $q = \frac{1}{4\pi} \text{ جہرہ جہاں مرکثات ہے۔}$
 اور باہر لٹ $q =$

$$\text{اس لئے } \left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری} = \frac{1}{4\pi} \left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{4} \left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \text{فرم} = \frac{1}{4\pi} \left[\begin{matrix} \text{جنت}^1 \\ \text{جنت}^2 \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری}$$

ایک ٹھوس مادہ کی صورت میں مائیں طرف کا رکن $= \frac{1}{4} \text{ جہرہ جہاں}$ جیسا کہ دفعہ ۳۱۸ میں دکھایا

گیا ہے۔ کہ کے اندر $\frac{1}{4} \text{ جہرہ جہاں}$ اس کے باہر $\frac{1}{4} \text{ جہرہ جہاں}$ (دفعہ ۳۸۷)۔

کرنے والی قوتوں کے زیر عمل تعادل میں ہو تو تعادل بہ تقسیم کے ہٹاؤں کے لئے قائم نہیں ہو سکتا۔

کیونکہ اگر یہ ذرہ کسی نقطہ پر متعادل ہو اور اسے ذرا سا ہٹا کر فقط ق پر

لے جائیں اور یہ پھر ن پر آنا چاہیے تو ضروری ہے کہ $\frac{جفت ق}{جفت ع}$ کی قیمت ق پر منفی ہو، اگر تعادل سب سمتوں میں قائم ہو تو سب ہٹاؤں کی یہی کیفیت ہونی چاہیے یعنی ق کی قیمت ن پر بڑی سے بڑی ہونی چاہیے جو خود ماقبل کی رو سے ناممکن ہے۔

نیز تعادل غیر قائم بھی نہیں ہو سکتا۔ کیونکہ اس سے $\frac{جفت ق}{جفت ع}$ کا تمام سمتوں کے لئے مثبت ہونا اور بناءً علیہ ق کا ن پر اقل ہونا لازم آتا ہے۔

فرع ۲۔ اگر ق کی قیمت ایک بند سطح میں رہے کہ سب نقطوں پر ایک ہی مستقل کے مساوی ہو اور اس بند سطح کے اندر کوئی کشش کرنے والا مادہ نہ ہو تو اس کی قیمت سطح نہ کر کے اندر سب نقطوں پر یکساں رہی ہوگی۔

کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو اس کے اندر کوئی نہ کوئی نقطہ ایسا ضرور ہوگا جس پر ق وہاں کے اندر کے کسی دوسرے نقطہ پر کے ق کی نسبت یا بڑا ہوگا یا چھوٹا ہوگا یعنی کوئی نہ کوئی نقطہ ضرور ایسا ہوگا جس پر ق وہ بڑے سے بڑا یا چھوٹے سے چھوٹا ہوگا لیکن یہ مسئلہ ماقبل کی رو سے ناممکن ہے۔

۳۰۔ اگر کسی تقسیم مادہ کے ق کی قیمت فضا کے تمام نقاط کے لئے معلوم ہو تو ہم اسکے جواب میں مادہ کی تقسیم دریافت کر سکتے ہیں۔ کیونکہ ق کے معلوم ہونے سے ہم فضا کے ہر نقطہ پر ق کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ جہاں کہیں یہ صفر ہو وہاں پائیسوں کی مسادات سے ظاہر ہے کہ کثافت صفر ہوگی یعنی ان نقطوں پر مادہ موجود نہ ہوگا۔ جہاں کہیں صفر نہ ہو وہاں کثافت مادہ $\frac{ق}{جفت ع}$ ہوگی۔

اگر ق تعامل کی شکل ایک سطح میں کے اندر کے نقطوں کے لئے دور با دور کے نقطوں کے لئے مختلف ہو اور اگر $\frac{جفت ق}{جفت ع}$ کی قیمت میں جبکہ ہم اس سطح

کی ایک طرف سے دوسری طرف جائیں ورنہ تغیر واقع ہو تو اس پر مادہ کی سطحی تقسیم دند ۲۸۲ کی رو سے حاصل ہوگی کیونکہ اگر اس کے عین اندر توہ قم اور اس کے عین باہر توہ قب ہو تو دند ۲۸۲ کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ

$$\left(\frac{\text{جنت قب}}{\text{جنت ح}} \right) - \left(\frac{\text{جنت قم}}{\text{جنت ح}} \right) = ۲۸۲ \text{ ج د}$$

$$\text{یعنی د} = \frac{۱}{۲۸۲ \text{ ج د}} \left[\frac{\text{جنت قب}}{\text{جنت ح}} - \frac{\text{جنت قم}}{\text{جنت ح}} \right] \dots (۱)$$

جہاں د، اس پر مادہ کی سطحی کثافت ہے۔
منسوق۔ مادہ کی تقسیم دریافت کردہ جو یہ توہ پیدا کرے

$$\frac{\text{ج د}}{۱} - \left(۱ - \frac{۱}{۲۸۲} \right) \text{ یا } \frac{\text{ج د}}{۲۸۲} - \left(۱ - \frac{۱}{۲۸۲} \right)$$

بیکر (۱۰۰ + ۱۰۰) بالترتیب د سے کم ہوا یا زیادہ ہو۔

فرض کرد کہ نصف نظر د کے کر کے اندر توہ قم ہے اور باہر قم

$$\text{پس قم} = \frac{\text{ج د}}{۲۸۲} - \left(۱ - \frac{۱}{۲۸۲} \right) \text{ اور قم} = \text{ج د} \left(۱ - \frac{۱}{۲۸۲} \right)$$

تفرق کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

لغاً قم۔۔ اور لغاً قم۔۔ اس لئے کہ وہی خول د = د کے اندر مادہ باہر کوئی مادہ نہیں ہے۔

کردی سطح پر کی تقسیم کے لئے

$$\frac{\text{جنت قب}}{\text{جنت ح}} - \frac{\text{جنت قم}}{\text{جنت ح}} = \frac{\text{ج د}}{۲۸۲} \text{ اور } \frac{\text{جنت قب}}{\text{جنت ح}} - \frac{\text{جنت قم}}{\text{جنت ح}} = \frac{\text{ج د}}{۲۸۲}$$

$$\text{اس لئے کہ وہی سطح پر } \frac{\text{جنت قب}}{\text{جنت ح}} - \frac{\text{جنت قم}}{\text{جنت ح}} = \frac{\text{ج د}}{۲۸۲} = \frac{\text{ج د}}{۲۸۲}$$

$$\text{نیز جفت قسم} = \text{جم} \left[-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right]$$

$$\text{اور جفت قسم} = \text{جم} \left[-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \text{ اور جفت قسم} = \text{جم} \left[-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right]$$

اس لئے جہد = ۰

$$\text{جفت قسم} = \text{جم} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

$$\text{جفت قسم} = \text{جم} \frac{r_1 - r_2}{r_1} \text{ اور جفت قسم} = \text{جم} \frac{r_1 - r_2}{r_2}$$

$$\text{پس اگر کسی سطح پر جفت قسم} = \text{جم} \frac{r_1 - r_2}{r_1} + \text{جم} \frac{r_1 - r_2}{r_2} + \text{جم} \frac{r_1 - r_2}{r_3}$$

$$\text{جم} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \times \text{جم} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

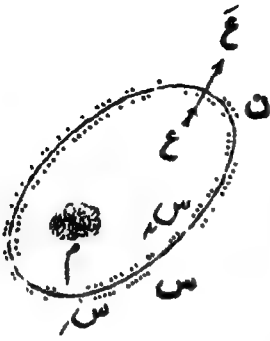
اس لئے (۱) سے $\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$ (۲) جس سے کوئی سطح پر کسی نقطہ پر نفاذ معلوم

ہوتی ہے۔

۳۲۱۔ اگر س، قوہ قہ کی ایک بند مساوی قوہ سطح ہو جس کے جاذب مادہ کی گیت
م ہے اور اگر جاذب مادہ کی ایک پتلی س پر چڑھائی جائے اور کسی نقطہ

$$\text{ن پر اس کی کثافت} = \frac{1}{r_1} \text{ جفت قسم}$$

جہاں جفت قسم نقطہ پر باہر کی طرف کہنے ہوئے مادہ کا ایک چھوٹا جزو
ہے تو س کے باہر کے سب نقطوں پر پتلی س کا قوہ، م کے قوہ کے مساوی
ہوگا نیز پتلی س اور م کا مجموعی قوہ س کے تمام اندرونی نقطوں پر مستقل اور
قہ کے مساوی ہوگا جہاں م جاذب مادہ کا وہ حصہ ہے جس کے
باہر ہے۔



یہ ہم تک کثافت کسی نقطہ نہ ہو اسی
معلوم کرتے ہیں کہ اس کے ہر نقطہ پر اس کا

اور م کا قوت ملے۔ قہ = قہ
اب م اور م کا (جو کشش کرنے
والے مادہ کی کل کثیت ہے) اس کے

ہر نقطہ پر قہ = قہ
اس لئے کل قہ = قہ = س کے

ہر نقطہ پر م کا قوت
اس لئے اگر کثافت کی علامت بدل دیں یعنی نظام کو تجاویز نظام سے بدل کر
اندفاعی نظام بنا دیں تو م اور نقطہ ن پر۔ ہر کثافت والی قہ کا قوت اس سطح سے
کے سب نقطوں پر (جو اس کے عین باہر واقع ہے) صفر ہوگا۔

لیکن م اور تہ (ہر) کا قوت لا انتہا نصف قطر والے کرہ پر بھی صفر ہے۔
اس لئے دفعہ ۳۱۹ کی فرع ۲ کی رو سے (چونکہ س اور لا متناہی کرہ کے اندر کی
فضا میں کثیت م اور تہ کا کوئی جز نہیں ہے) م اور تہ (ہر) کا قوت س،
اور لا متناہی کرہ کے اندر کی سب فضا میں ہر جگہ صفر ہے یعنی س کے باہر کی
کل فضا میں صفر ہے۔

یعنی م کا قوت = انتہا میں س کے باہر کی تمام فضا میں کثافت م والی قہ کا
قوت (۱)

نیز دفعہ ۳۸ کی اسی فرع کے بموجب چونکہ تہ اور م کا قوت سطح سے کے تمام
نقطوں پر جو س کے عین اندر کی سطح ہے قہ کے مساوی ہے اس لئے یہ
نتیجہ نکلتا ہے کہ س کے اندر ہر جگہ ان کے قوتوں کا مجموعہ مستقل ہے اور قہ کے
مساوی ہے (کیونکہ س کے اندر کوئی کشش کرنے والا مادہ جو تہ اور م پر متعلق
ہے موجود نہیں ہے) اور اس لئے انتہا میں سطح سے کے اندر قوت مستقل
اور قہ کے مساوی ہے۔ (۲)

فرض کر کہ سطح کے نقطہ ن پر تہ کے عین اندر اور عین باہر کے نقطوں پر

قوت کشش کے عادی جزو تحلیل جیکہ دونوں باہر کی طرف تاپے گئے ہوں بالترتیب
ع اور ع میں تب دفعہ ۲۸۲ کی رو سے

$$۴۴ جہر = ع - ع \dots \dots (۳)$$

اب (۲) سے ظاہر ہے کہ ع + م کی نقطہ ن پر عادی کشش =

اور (۱) سے پتہ چلتا ہے کہ

$$ع = ن پر م کی عادی کشش$$

اس لئے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$- ۴۴ جہر = ن پر م کی عادی کشش + ن پر م کی عادی کشش$$

(چونکہ عادی کششوں کو باہر کی طرف ناپا گیا ہے)

$$= کل کشش کرنے والی کیت کی ن پر عادی کشش باہر کی طرف$$

$$= \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ع}}$$

$$\text{اس لئے کی کثافت مر نقطہ ن پر} = - \frac{۱}{۴۴ جہر} \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ع}}$$

فرع ۱۔ چونکہ کیت م اور ع کے قوتس کے باہر کے سب نقطوں پر مساوی
ہیں اس لئے یہ لاتنا ہی پر بھی مساوی ہیں۔

اس سے ظاہر ہے کہ ع کی کیت = م

متبادل ثبوت

$$\text{ع کی کیت} = [\text{م فرس}] = - \frac{۱}{۴۴ جہر} [\frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ع}}] \times \text{فرس}$$

$$= - \frac{۱}{۴۴ جہر} \times \text{عادی کشش کا سطحی تکلی سطح سے پر}$$

= کیت م کے اندر بموجب دفعہ ۳۰۳ = م

فرع ۲۔ فرض کرو کہ م کے باہر کوئی کشش کرنے والی کیت نہیں ہے یعنی

فرض کرو کہ m صفر ہے، تب m کے باہر کی فصلا کے ہر نقطہ پر m کا قوتہ = m کا قوتہ

نیز m کے اندر m کا قوتہ = m = سطح m پر m کا قوتہ

۴۴۔ دفعہ اقبل کی ایک آسان مثال ذیل میں درج کی جاتی ہے۔ فرض کرو کہ نقطہ و پکیت m کا ایک ذرہ ہے اور m صفر ہے۔ تب m میں ایک کرہ ہوگا جس کا مرکز O اور نصف قطر کسی مقدار r کے مساوی ہے۔

$$\text{اس لئے } m = \frac{1}{\pi r^2} \times \text{جفت } m = \frac{1}{\pi r^2} \times \text{جفت } m = \frac{m}{\pi r^2}$$

$$\text{اس لئے } m \text{ کے باہر اس } m \text{ کا قوتہ} = \text{ذرہ } m \text{ کا قوتہ} = \frac{\text{جفت } m}{\text{نقطہ سے فاصلہ}} = \frac{\text{جفت } m}{\text{و سے فاصلہ}}$$

اور m کے اندر اس m کا قوتہ مستقل ہے اور m کا قوتہ کرہ کی سطح پر

$$= \frac{\text{جفت } m}{\pi r^2} = \frac{\text{جفت } m}{\pi r^2}$$

یہ دفعہ ۳۰۰ کے نتائج ہیں۔

۴۴۔ ۴۴۔ مشق۔ ایک متجانس پتلی سیدھی سلاخ کا طول ۲ ج اور کیت m ہے۔ اس کے مساوی قوتہ منحنیوں میں سے ایک منحنی کے محور اعظم کا طول ۲ ہے۔ ثابت کرو

اگر اس منحنی پر مادہ کی تقسیم اس طرح ہو کہ کسی نقطہ N پر کثافت $\frac{1}{\pi r^2} \times \frac{m}{(1-j)^2}$ ہو (جہاں r سلاخ کے وسطی نقطہ سے N پر منحنی کے ماس پر عمود کا طول ہے) تو اس قوتہ سطح مذکور کے باہر کے کسی نقطہ پر سلاخ کے قوتہ کے مساوی ہوگا۔

فرض کرو کہ سلاخ AB ہے اور A = B اور B = N اور N سے

AB پر عمود ہے۔

$$\begin{aligned} \text{تب} - \text{جنت} &= \text{ن پر سلخ کی گشت} = \frac{۲ \text{ جک مر جب ان ب}}{۲} \quad (\text{دفعہ ۲۷۷}) \\ &= \frac{۲ \text{ جک مر} \times \frac{۲ \text{ ج جب ان ب}}{۲} - \frac{۲ \text{ جک مر جب}}{۲}}{\frac{۲ \text{ ج جب ان ب}}{۲} - \frac{۲ \text{ جک مر جب ان ب}}{۲}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اب جم ان ب} &= \text{جب (ب ن ت) جہاں ن ت نقطہ ن پر سادی قوہ} \\ &= \frac{۲}{۲ \text{ ج} - ۱} = \frac{۲}{۲} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اور ام تم} &= \text{ج ن کا مزدوج نیم قطر} = \frac{۱}{۲ \text{ ج} - ۱} = \frac{۱}{۲} \\ \text{جنت} &= \frac{۲ \text{ جک مر جب ع}}{۲ \text{ ج} - ۱} = \frac{۲ \text{ جک مر جب ع}}{(۲ \text{ ج} - ۱) \times ۱} \\ \text{اس لئے کی کثافت} &= \frac{۱}{۲ \text{ ج} - ۱} = \frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

سادی قوہ منحنی کے باہر تہ اور سلخ کے قوہ تمام نقطوں پر سادی ہیں۔
سادی قوہ منحنی کے اندر دفعہ ۳۲۱ کے فرع (۲) کی رو سے تہ کا قوہ سب نقطوں پر
وہی ہے اور = قوہ منحنی کے سب نقطوں پر سلخ کا قوہ

$$\begin{aligned} \text{یعنی} - \text{جک مر اک} &= \frac{۲ + ۲ + ۲ \text{ ج}}{۲ \text{ ج} - ۱ + ۱} \quad (\text{دفعہ ۲۹۸}) \\ &= \frac{۲}{۲ \text{ ج} - ۱} \text{ اک} \end{aligned}$$

مثالیں

۱۔ ایک ثابت نقطہ سے ایک نقطہ کا فاصلہ ہے اور اس پر قوہ

$$ق = \pi r \text{ جہر (ب}^2 - \text{ا}^2) \quad \text{اگر } \text{ب} > \text{ا}$$

$$ق = \pi r \text{ جہر (ا}^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{b^2}{2}) \quad \text{اگر } \text{ب} > \text{ر}$$

$$\text{اور } ق = \frac{\pi r \text{ جہر (ا}^2 - \text{ب}^2)}{2} \quad \text{اگر } \text{ب} > \text{ا}$$

ثابت کر دو کہ کشش کرنے والا مادہ ایک کر دی خول ہے جسکی کثافت ہر ہے اور جسکی حدود درمیان کے ہم مرکز کر دیے ہیں جن کے نصف قطرہ اور ب ہیں۔

۲۔ بتاؤ کہ مادہ کی کس تقسیم سے ذیل کے تود حاصل ہو سکتے ہیں

$$ق = \frac{\pi r \text{ جہر ا}^2}{2} \quad \text{جبکہ } \text{ر} < \text{ا}$$

$$ق = \frac{\pi r \text{ جہر (ا}^2 + \text{ا}^2 - \text{ا}^2 - \text{ا}^2)}{2} \quad \text{جبکہ } \text{ر} > \text{ا}$$

[کرہ ر = ا کے اندر کثافت ہے اور اس کے باہر صفر ہے]

اس کی سطح پر سطحی کثافت $\frac{\pi r \text{ جہر ا}^2}{2} (1 - \frac{r^2}{a^2})$ ہے

۳۔ مادہ کی ایک خاص تقسیم کا تود کسی نقطہ لاء، م، سی پر

$$\frac{\pi r \text{ جہر م}^2}{3} + \frac{\pi r \text{ جہر م}^2}{15} + \frac{\pi r \text{ جہر م}^2}{9} \quad \text{جبکہ } \text{ر} < \text{ا}$$

$$\text{اور } \frac{\pi r \text{ جہر م}^2}{3} + \frac{\pi r \text{ جہر م}^2}{15} + \frac{\pi r \text{ جہر م}^2}{9} \quad \text{جبکہ } \text{ر} > \text{ا}$$

تقسیم معلوم کر دو۔

(کرہ ر = ا کی سطح پر سطحی کثافت م لاء ہے، کرہ کے اندر باہر کوئی مادہ نہیں)

۴۔ ایک اسطوانی سطح کے کنارے عمودی کے متوازی ہیں۔ اس کے باہر تود صفر ہے اور

$$\text{اندر } ق = \frac{\pi r \text{ جہر م}^2}{3} - \frac{\pi r \text{ جہر م}^2}{15} + \frac{\pi r \text{ جہر م}^2}{9}$$

۵۔ مادہ کی کس تقسیم سے ذیل کے قوت پیدا ہوتے ہیں۔

$$ق = ۱ - ناقص نما = \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} = ۱ \text{ کے اندر (مر } > ۱)$$

$$ق = \frac{۱}{۱ - مر} [۱ - \frac{۲}{۲} - \frac{۲}{۲} - \frac{۲}{۲}] \text{ اوپر کے ناقص نما اور ناقص نما}$$

$$۱ = \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} \text{ کے اندر اور}$$

$$ق = ۰ - ناقص نما = \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} = ۱ \text{ کے باہر۔}$$

۶۔ کشش کرنے والے مادہ کی معلومہ مقدار کا قوت کسی نقطہ (۱، ۱، ۱) پر

$$ج = \frac{۲(۱ - ۱) + ۲(۱ - ۱) + ۲(۱ - ۱)}{۲(۱ + ۱ + ۱)}$$

$$\text{سطحی کثافت} = \frac{۱}{\pi r} \sqrt{\frac{۲ + ۲}{۲(۱ + ۱ + ۱)}} \text{ تمام بیرونی نقطوں پر وہی قوت پیدا کرے گی جو}$$

اصلی کثیت پیدا کرتی ہے۔

۷۔ ایک کرہ کا نصف قطر ہے۔ اس کی سطح پر وہ کثافت معلوم کر جس کی وجہ سے اس کے

مرکز سے فاصلہ پر کے نقطہ پر قوت ل (۲ - ۲) ہو جیکر > ۱ اور ل $\frac{۲}{۲}$ ہو جیکر < ۱

$$[مر = \frac{۳}{\pi} \text{ کرہ کے اندر، مر = ۰ اس کے باہر، اور مر = } -\frac{۲}{\pi} \text{ اس کی سطح پر}]$$



سوطھواں باب

کم لچک والے شہتیروں کا تعادل

۳۴۔ اگر ہم ایک ایسی پتلی سلاخ یا شہتیر کی شکل معلوم کرنا چاہیں جو کسی طرح بوجھ کو لدی ہوئی ہے تو ہمیں سلاخ کی شکل اور جھکاؤ کے معیار اثر میں کوئی رشتہ معلوم ہونا چاہیئے۔ ہم یہاں فرض کریں گے کہ جھکاؤ کا معیار اثر انحناء کے متناسب ہو تا ہے۔

یعنی جھکاؤ کا معیار اثر = $\frac{1}{r}$ جہاں شہتیر کا نصف قطر انحناء ہے اور k کو خماد کی استواریت کہتے ہیں۔

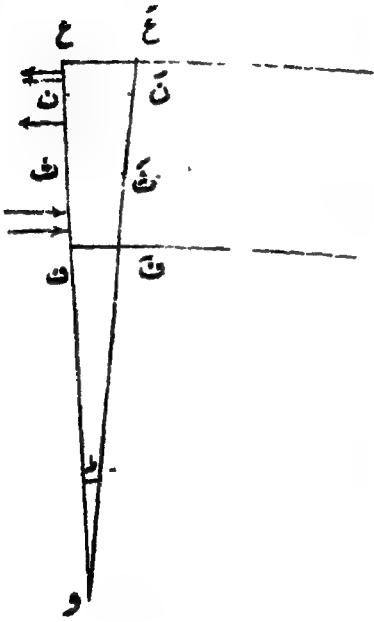
اگر وزن ڈالنے سے پہلے شہتیر کا انحناء اسی نقطہ پر ہے تھا تو جھکاؤ کا

معیار اثر $k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$ ہو گا۔

یہ مفروضہ پہلے پہل بر فونی اور لور نے استعمال کیا تھا۔ اس کی تصدیق معمولی شہتیروں کی صورت میں جن کے طول ان کی تراشوں کے ابعاد کے مقابل میں بہت زیادہ ہوں تجربہ کے ذریعہ ہو چکی ہے۔ دفعہ ذیل میں چند امور کو تسلیم کر کے جن کا تسلیم کرنا درحقیقت پورے طور پر صحیح نہیں ہے بر فونی کے مفروضہ کا ثبوت دیا گیا ہے۔

۳۵۔ ایک مستطیلی شہتیر کو بغیر تناؤ کے جھکایا گیا ہے۔ ثابت کر دیا کہ کسی نقطہ پر جھکاؤ کا معیار اثر اس نقطہ پر کے انحناء کے متناسب ہوتا ہے۔ جب ایک شہتیر کو جو قدرتی طور پر بالکل سیدھا تھا جھکا کر ذیل شکل میں لایا جاتا ہے تو ظاہر ہے کہ

اوپر کے حصے کے ریشے یعنی ع کے نزدیک کے ریشے تناؤ کی حالت میں ہونگے اور نیچے کے حصہ کے ریشے جوف کے نزدیک ہیں پچکاؤ کی حالت میں ہوں گے۔ خط ث ث کو جو تناؤ اور پچکاؤ کی حالت والے ریشوں کو علیحدہ کرتا ہے تعدیلی خط کہتے ہیں۔



اب ہم پرمان لیتے ہیں اور ایسا کرنا حقیقت سے کچھ زیادہ بعید نہیں ہے کہ شہتیر کی کوئی مستوی تراش جو محور کے علی القیاس سے جھکاؤ کے بعد بھی مستوی تراش کی شکل قائم رکھتی ہے۔

فرض کرو کہ تعدیلی خط ث ث پر کے دو قریب کے نقطوں پر کے عماد ایک

دوسرے سے ورہلتے ہیں اور و ث = ص

فرض کرو کہ کاغذ کی سطح مستوی میں ث ث کے ع کی جانب میں کوئی ریشہ ن ن ہے۔ اگر اس ریشہ کے لئے ہک کا مقیاس بچک لہ ہو تو اس کا تناؤ فی اکائی رقبہ = لہ × $\frac{ن - ث}{ث}$ = لہ × $\frac{(ص + لا) - ص}{ص}$ = لہ × $\frac{لا}{ص}$

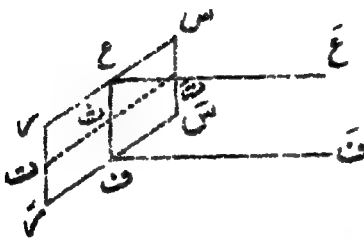
جہاں ث ن = لا۔

اس لئے اگر ن پر کے ریشے کی عمودی تراش کا رقبہ ص ف ہو تو اس کا تناؤ = لہ × $\frac{لا}{ص}$ × ص ف = لہ × ف

[اگر ن، ث کے دوسری جانب واقع ہو یعنی ف کی طرف ہو تو لا منفی ہوگا اور یہ تناؤ پچکاؤ میں بدل جاتا ہے]

چونکہ شہتیر میں تناؤ نہیں ہے اس لئے ω پر عمود وار ریشوں کے
تناؤں کا مجموعہ صفر ہے۔

اس لئے $\frac{L}{r} = \frac{L}{r} \times \frac{1}{\omega} = 0$ جبکہ جمع کا عمل Σ میں سے گزرنے
والی کا فذ کی سطح پر علی القوائم تراش کے کل رقبہ S میں S پر پھیلا یا گیا ہے۔
اس لئے $\frac{L}{r} = \frac{L}{r} \times \frac{1}{\omega} = 0$



کسی رقبہ کا مرکز ثقل معلوم
کرنے کے لئے جو تناسب میں
اُن سے ظاہر ہے کہ Σ اس خط
پر واقع ہے جو تراش S میں S ترا
کے مرکز ثقل میں سے کا فذ کی سطح
پر علی القوائم پھینچا جائے۔ لہذا اگر
کا فذ کی سطح مسکوئی شہتیر کی متشکل

تراش ہو تو Σ تراش S میں S کا مرکز ثقل ہونا چاہیے۔

خط Σ کے گرد جو کا فذ کی سطح مستوی پر عمود وار ہے معیار اثر لینے سے
ظاہر ہے کہ اس کے گرد محال جفت

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{r} \times \frac{1}{\omega} = \frac{L}{r} \times \frac{1}{\omega} = \frac{L}{r} \times \frac{1}{\omega}$$

(مرکبات کے اوپر کے ریشوں کے تناؤ نیچے کے ریشوں کے پکاوٹوں
کے ساتھ مل کر جفت بناتے ہیں)

لیکن تراش S میں S کا جمود کا معیار اثر خط Σ کے گرد
 Σ لاؤٹ ہے اس کو عموماً ω سے تعبیر کیا جائے گا۔

اس لئے حاصل جنت یعنی جبکاؤ کا معیار اثر $\frac{قربا}{قربا}$ کے مساوی ہے جہاں
 لہ ہیک کا مقیاس یکجہ ہے، اس تعادلی خط کا نصف قطر انحناء ہے اور مجہ شہتیر
 کی عمودی تراش کے جہود کا معیار اثر اس خط کے گرد ہے جو تراش کے مرکز ثقل
 میں سے شہتیر کی لمبائی پر علی القوا اعم ہے۔

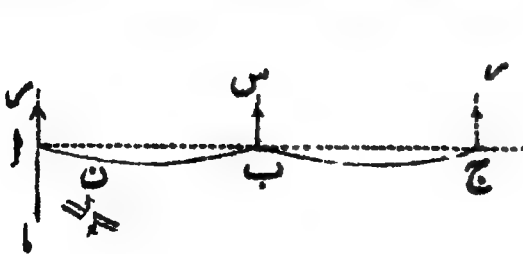
۳۶۔ جب شہتیر بہت ہی خفیف طور پر خاؤ پذیر ہو یعنی جب مقدار لہ مج بہت بڑی ہو
 تو مقدار لہ $\frac{قربا}{قربا}$ کو مختصر کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{کیونکہ} \quad \frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{قربا}{قربا}\right)^2\right\}} \approx \frac{قربا}{قربا}$$

اگر سلاخ تقریباً سیدھی ہو یعنی خط استقیم سے زیادہ متفاوت نہ ہو تو $\frac{قربا}{قربا}$
 بہت چھوٹا ہوگا جبکہ لاکو انفا اور ما کو انتصابا ناپا جائے۔

اس صورت میں $\frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{قربا}{قربا}\right)^2\right\}} \approx \frac{قربا}{قربا}$ ہوگی یعنی جبکاؤ کا معیار اثر
 $\pm \frac{قربا}{قربا}$ ہوگا۔ مشتبہ علامت کی تحقیق $\frac{قربا}{قربا}$ کی علامت پر منحصر ہے۔

۳۷۔ مشق۔ ایک یکساں تھوڑی سی ٹرکٹنے والی سلاخ ل ج کا طول ۲ م ہے اس کے



اس کے دو کناروں پر اور نیز
 اس کے وسطی نقطہ ب پر
 سہارا لگایا ہے۔ سہارے کے
 تینوں مقام ہیک ہی خط استقیم میں
 واقع ہیں، ان پر کے دباؤ معلوم
 کرو اور نیز سلاخ جس منحنی کی شکل
 میں ساکن ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ Δ ب کے اندر کوئی نقطہ n ہے۔
تب n پر کا جھکاؤ کا معیار Δ n کے بائیں طرف کے حصہ پر $\frac{\Delta}{n}$ ہے جو اس Δ سمت میں عمل کرتا ہے۔ نیز اگر Δ کا محور انتصاف نیچے کی طرف ہو تو n پر Δ کی قیمت گھٹتی ہے اور اس لئے $\frac{\Delta}{n}$ منفی ہے لہذا $\frac{\Delta}{n}$ تقریباً $-\frac{\Delta}{n}$ کے مساوی ہے۔

اگر Δ پر کا تعادل نہ ہو اور سلاخ کا وزن n فی اکائی طول Δ ہو تو حصہ n کے لئے n کے گرد معیار اثر لینے سے

$$\Delta = \frac{\Delta}{n} = \frac{\Delta}{n} = \Delta \times \frac{\Delta}{n} = \Delta \times \frac{\Delta}{n} \dots \dots (1)$$

$$\Delta = \frac{\Delta}{n} = \Delta \times \frac{\Delta}{n} = \Delta \times \frac{\Delta}{n} + \dots \dots (2)$$

لیکن تشاکل سے $\frac{\Delta}{n} = \Delta$ جبکہ $\Delta = \Delta$

$$\Delta = \frac{\Delta}{n} = \Delta \times \frac{\Delta}{n}$$

$$\Delta = \Delta \times \frac{\Delta}{n} = \Delta \times \frac{\Delta}{n} + \dots \dots (3)$$

مکمل کا مستقل صفر ہے کیونکہ Δ اور Δ ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں۔
نیز $\Delta = \Delta$ جب $\Delta = \Delta$

$$\Delta = \Delta \times \frac{\Delta}{n} = \Delta \times \frac{\Delta}{n} + \dots \dots$$

$$\Delta = \Delta \times \frac{\Delta}{n} = \Delta \times \frac{\Delta}{n} \times \text{کل وزن}$$

۱۔ میں = وسطی سہارے کا دباؤ = $\frac{5}{8} \times$ کل وزن
نما کی یہ قیمتیں (۱)، (۲)، (۳) میں درج کرنے سے

$$۱۔ \text{مجر فرقا} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} \right) - \frac{۱}{۴} \quad (۴) \quad - - - - -$$

$$۲۔ \text{مجر فرقا} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} \right) - \frac{۱}{۴} \quad (۵) \quad - - - - -$$

$$\text{اور } ۳۔ \text{مجر ما} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} \right) - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} \right) - \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} \right) - \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} \quad (۶)$$

(۴) سے ظاہر ہے کہ لا = $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ (ب) پر ایک مخالف نماؤ کا نقطہ ہے

نیز جھکاؤ کا معیار اثر بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ لا = $\frac{۱}{۲}$ اس وقت جھکاؤ

کا معیار اثر $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ سمت میں ہوگا سرے ب پر جھکاؤ کا معیار اثر $\frac{۱}{۲}$

مقابل سمت میں ہے، اس لئے شہتیر پہلے ب پر ٹوٹے گا۔

(۵) سے ظاہر ہے کہ سلاخ کا بڑے سے بڑا جھوک اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{۱}{۱۴} (۱ + ۳۳) = ۳۲ \times ۱$$

ایک شہتیر کے نقاط انعطاف کو بالعموم اس کے قبضے یا موبوم جوڑ سکتے ہیں
کیونکہ ان نقطوں پر جھکاؤ کے معیار اثر کی عدم موجودگی کی وجہ سے شہتیر کے تعادل
میں بغیر غل ڈالے ان نقطوں پر قبضے یا جوڑ کئے جاسکتے ہیں۔

۳۲۸ - دفعہ ۱۲۹ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ

بوجھ = -- $\frac{۱}{۲}$ [جرئی زور]

اور جرئی زور = $\frac{۱}{۲}$ [جھکاؤ کا معیار اثر]

اور دفعہ ۳۲۶ سے ہیں حاصل ہوتا ہے کہ خیف سے پیکدار شہتیروں کی صورت میں

جھکاؤ کا معیار اثر ∞ فی $\frac{1}{\text{وزن}}$ [دھال]

اور دھال = $\frac{\text{فی}}{\text{وزن}}$ [انصراف]

اس لئے بوجھ کے منحنی، جزی زور کے منحنی اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی میں باہم اسی طرح کا ربط ہے جیسا کہ جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی دھال کے منحنی اور انصراف کے منحنی میں ہے۔

اس لئے ہیں دفعہ ۳۳ کی طرح ایک مسئلہ حاصل ہوتا ہے یعنی انصراف کے منحنی کے کوئی دو ماس جس نقطہ پر قطع کرتے ہیں وہ جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کے تناظر حصہ کے مرکز ثقل کے انشعاباً نیچے ہوتا ہے۔

ہم آسانی سے اس امر کی تصدیق دفعہ ۱۱۱ کی مثال کی صورت میں کر سکتے ہیں۔
حصہ اب کے لئے جھکاؤ کے معیار اثر کا منحنی ہے

$$M = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$(2) \dots \dots \dots \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right] \dots \dots \dots$$

(۲ کے نقطہ (۱، ۱) پر کا ماس ہے

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right] \dots \dots \dots$$

= (۱، ۱) پر کے ماس کو قطع کرتا ہے جہاں

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right] \dots \dots \dots$$

نیز معنی (۱) کے متناظر حصہ کے مرکز نقل کا فصل

$$\frac{\text{کے } \frac{1}{2} \text{ فرلا } \times \frac{1}{2} \text{ فرلا}}{\text{کے } \frac{1}{2} \text{ فرلا}} = \frac{\text{کے } \frac{1}{2} \text{ فرلا } \times \frac{1}{2} \text{ فرلا}}{\text{کے } \frac{1}{2} \text{ فرلا}}$$

$$\frac{[\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})]}{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})} = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})}{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})}$$

پس مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک خنیف سے جھک جانے والے شہتیر کے سرے دو انقی سہاروں پر ساکن ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک سرے سے فاصلہ پر انصراف ہوگا

$$\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \} \text{ جہاں ک انصراف کی استواریت ہے،}$$

۲۔ شہتیر کا طول ہے، و اس کا کل وزن ہے۔

۳۔ ایک یکساں پل جس کا وزن و ہے ایک ہی تختہ سے بنا ہوا ہے۔ پل کناروں کے سہاروں پر ساکن ہے۔ ایک شخص اس پل پر ایسے مقام پر کھڑا ہے جس کے فاصلے کناروں سے و اور ب ہیں۔ ثابت کرو کہ اس مقام پر انصراف

$$\frac{و (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}$$

۴۔ جہاں و اس شخص کا وزن ہے۔

۵۔ ایک چکدار سلاخ کے ایک سرے کو تختہ کے ذریعہ اس طرح ثابت کر دیا گیا ہے کہ سلاخ کی سمت اس مقام پر انقی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے سرے کا انصراف اس انصراف

کا پے ہے جو اس کے سرے پر اس کے وزن کے مساوی وزن لٹکا دینے سے حاصل ہوتا۔
۴۔ ایک یکساں شہتیرا ب کا طول ل ہے اس کو اس کے سروں سے سہارا گیا
ہے اور اس کے ایک نقطہ قی پر وزن و باندھا گیا ہے ا ق = ۱ اگر شہتیر کے وزن کو
نظر انداز کیا جائے تو ثابت کرو کہ ا ق کی مساوات ہے

$$رج ۱ = \frac{و(ل - ۱)}{۱} [۱(۱ - ل) - لا - لا]$$

اور ق ب کی مساوات ہے

$$رج ۲ = \frac{و}{۱} [(ل - ۱)(۱ - ل) - لا - لا]$$

ثابت کرو کہ کسی نقطہ ن پر کا انصراف جبکہ بوجھ ق پر ہو مساوی ہوتا ہے ق پر کے
انصراف کے جبکہ وہی بوجھ ن پر ہو۔

۵۔ ایک وزنی یکساں سلاح دو سہاروں پر انفا ساکن ہے جن میں سے ایک سہارا ایک
سرے پر ہے اگر سلاح کے وسطی نقطہ پر جھکاؤ کا سہارا اثر مصلر ہو تو ثابت کرو کہ دوسرے سہارا
اول الذکر سرے سے سلاح کے طول کے دو تہائی فاصلہ پر ہونا چاہیئے۔

۶۔ ایک کم لچکدار شہتیرا ب کا وزن و اور طول ۲ ہے اس کو سروں پر اور وسطی
نقطہ ج پر سہارا گیا ہے۔ اگر سہاروں پر کے دباؤ مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ج کی گہرائی

ا ب کے نیچے $\frac{۱}{۱۱}$ ہے اور یہ گہرائی اس گہرائی کا $\frac{۱}{۱۵}$ ہے جو شہتیر کو صرف
پر سہارے کی صورت میں ہوتی۔

۷۔ ایک یکساں شہتیر کو اس کے تثلیث کے نقطوں ا اور ب پر سہارا گیا ہے۔
ا ب متوازی الاق ہے۔ ثابت کرو کہ شہتیر کے وسطی نقطہ کی ا ب کے اوپر بلندی کو
شہتیر کے دونوں سروں کی ا ب کے نیچے گہرائی کے ساتھ نسبت ۱۹ : ۱۲۸ ہے۔

۸۔ ایک پتلی یکساں خفیف طور پر لچکدار سلاح کا طول ۴ ہے اس کے وسطی نقطہ
کے ساتھ وزن و بندھا ہے۔ سلاح کو دو ایسے نقطوں پر سہارا گیا ہے جن کے وسطی نقطہ

سے فاصلے ہیں اگر سپاہ کے مقاموں پر کے ماس افق کے متوازی ہوں تو ثابت کر دو کہ و سلاخ کے وزن کے چھ حصہ کے مساوی ہے۔

۹۔ ایک منزلتجوچھ شہتیر کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرد کہ خداؤ کے منعینوں کے ڈھالوں کی نسبت ۲ سے شروع کر کے ۵ تک بدلتی ہے اور موخر الذکر قیمت اُس وقت اختیار کرتی ہے جبکہ بوجھ ایک سرے سے شہتیر کے ایک تہائی طول کے فاصلہ پر ہو۔

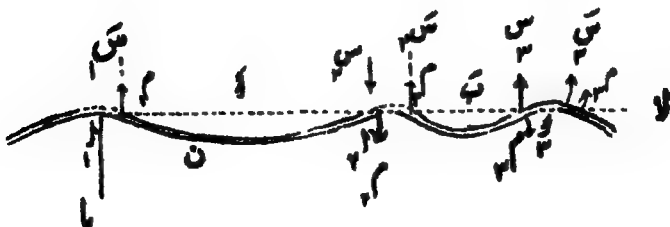
۱۰۔ ایک ریل گاڑی دو شہتیروں سے بنا ہوا ہے اور اس پر ریل کی ایک پٹری چڑی ہے سہاروں کے درمیان ہر ایک شہتیر کا طول ۴۰ فٹ ہے۔ ایک انجن کا کل وزن ۶۸ ٹن ہے اور یہ ۴ دھروں پر منقسم ہے جس میں سے اگلے دھرے پر ۸ ٹن وزن ہے اور باقی تینوں دھروں میں سے ہر ایک پر ۱۲ ٹن وزن ہے۔ اگلے اور باقی تینوں دھروں کے فاصلے ریل کے ایک سرے سے بالترتیب ۶ فٹ، ۱۲ فٹ، ۲۱ فٹ اور ۲۹ فٹ ہیں شہتیر کا بڑے سے بڑا انصراف معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ کس مقام پر ہے۔

۲۹۔ تین معیار اثروں کے متعلق کلاسیکی بیرون کی مساوات۔

۳۲۹۔ تین معیار اثروں کے متعلق کلاسی روٹ کی مساوات۔
 اگر ایک یکساں طور پر لدے ہوئے شہتیر کے جھکاؤ کے معیار اثروں کے
 کے تین مقاموں Δ ، Δ ، Δ کے گرد بالترتیب m ، m ، m ہوں چاہاں سہارے
 کے مقام ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{n}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \frac{1}{n}\bar{x}_1 + \frac{1}{n}\bar{x}_2$$

جہاں دشتہیر کئی اکائی طول کا وزن ہے اور $1 = 100$ اور $1 = 100$ اور $1 = 100$



۳۳۔ اگر نقطہ لہ، نقاط لہ اور لہ کی ہواری پر ہونے کی بجائے ان سے بالترتیب با اور ماہ طول نیچے ہو تو آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ تین معیارانوں میں رشتہ حسب ذیل ہے

م ۱ + م ۲ (و + ب) + م ۳ ب = $\frac{۲}{۳}$ (ا + ب) - ۱ م ۴ مج ($\frac{۱}{۳}$ + $\frac{۱}{۳}$)
 ۳۳۔ مشق ۱۔ فرض کرو کہ دفعہ ۳۲۹ کی مشق میں شہتیر کے سرے لہ اور لہ ہیں۔
 یعنی شہتیر سہاروں لہ، لہ، لہ پر قائم ہے جاں لہ لہ لہ اور لہ لہ لہ ب
 تب م ۱ = م ۲ = اور م ۳ = $\frac{۲}{۳}$ (و - و + ب + ب)
 جہاں و شہتیر کا فی اکائی طول وزن ہے۔

فرض کرو کہ لہ، لہ، لہ پر قتال سہا، سہا، سہا ہیں۔ لہ کے گرد معیار اڑ لینے سے

$$\begin{aligned} \text{م ۱} &= \frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳} = \text{سہا و} \\ \text{اور اس لئے سہا} &= \frac{۲}{۳} \left[\frac{۳ \text{ و} + ۲ \text{ و} - \text{ب}}{۴} \right] \\ \text{اور اسی طرح سے سہا} &= \frac{۲}{۳} \left[\frac{۳ \text{ ب} + ۲ \text{ و} - \text{و}}{\text{ب}} \right] \\ \text{اور سہا} &= \frac{۲}{۳} (و + ب) - \text{سہا} = \frac{۲}{۳} [و + ب] \left[\frac{۳ \text{ و} + ۲ \text{ و} + ۲ \text{ ب} + \text{ب}}{۴} \right] \end{aligned}$$

فرض کرو کہ و < ب، تب سہا منفی ہوگا اگر
 و - و < ۳ ب یعنی اگر و < $\frac{۳}{۴}$ (۱ + ۳)

یعنی اگر و < ۳ ب تقریباً ۲۳
 اس صورت میں سرے لہ کو سہارے کے ساتھ مس کرنا ہوا رکھنے کے لئے اس پر مزید وزن

رکھتا ہوں۔

نیز جھکاؤ کا معیار از م کسی نقطہ پر جو اسے حاصل ہو

$$= \frac{3\omega^2}{2} - \frac{\omega^2 + \omega^2 - \omega^2}{2} = \frac{3\omega^2}{2}$$

اس لئے یہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ $\frac{3\omega^2 + \omega^2 - \omega^2}{2} = \frac{3\omega^2}{2}$ اور اس مقام پر جھکاؤ کے معیار اثر کی قیمت

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{3\omega^2 + \omega^2 - \omega^2}{2} \right) \dots \dots (1)$$

نیز لم پر جھکاؤ کا معیار اثر = م (۲) = $\frac{3}{4} (\omega^2 - \omega^2 + \omega^2)$

پس لم پر کا معیار اثر (۱) سے بڑا ہوگا اگر

$$14 \omega^2 (\omega^2 - \omega^2 + \omega^2) < (3\omega^2 + \omega^2 - \omega^2)$$

$$\text{یعنی اگر } (11 \omega^2 + \omega^2 - \omega^2) > 12 \omega^2$$

$$\text{یعنی اگر } \omega^2 - \omega^2 > (11 - 12) \omega^2 > -\omega^2 \times (13131)$$

$$\text{یعنی اگر } (\omega^2 - \frac{1}{4}) + (1 - 0.66) \times \omega^2 < 0 \text{ جو امر صحیح ہے۔}$$

پس اگر شہتیر ٹوٹے تو اس مقام لم پر ٹوٹے گا۔

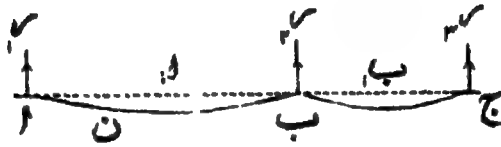
(مذکورہ بالا میں سہا، سہا، سہا کے لئے جو نتائج حاصل کئے گئے ہیں ان کی

تصدیق و ادرت کی مختلف قیمتوں کے لئے تجربہ سے ہوسکتی ہے۔ اس طرح ہم ۳۲۴ کے مفروضہ کی تصدیق کر سکتے ہیں)

مشق ۲۔ ایک یکساں سطح لم کو سولہ پر اوہ دو اور مقاموں لم لم پر جو شہتیر کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرے ہیں سہارا لگایا ہے۔ سہارے کے سب مقام ایک ہی ہوا سی پر واقع ہیں۔ ان پر دباؤ نیز ان پینڈن وکی ریم میں جھکاؤ کے معیار از م معلوم کرو۔

پس درمیانی حصہ میں دو انعطاف کے نقطہ ہیں جو سہاروں کے مقامات کو ملانے والے خط پر واقع ہیں۔

مشق نمبر — ایک یکساں سیدھی سلاخ ا ب ج کے سروں کو اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ ان پر کے ماس متوازی الافقی ہیں اور سلاخ کو ب پر سہارا کیا ہے۔ اگر ا، ب، ج تینوں ایک ہی افقی خط میں واقع ہوں اور $ا = ب = ج$ اور $ب = ج = ب = ج$ اور $ا = ب = ج$ پر کے قائل اور جھکاؤ کے معیار اثر دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ا، ب، ج پر جھکاؤ کے معیار اثر $م$ ، $م$ اور $م$ اور قائل $س$ ، $س$ ، $س$ ہیں۔

دفعہ ۳۲ کا مسئلہ اس سوال میں استعمال کیا جاسکتا ہے کیونکہ سلاخ کو ا پر افقی وضع میں ساکن کئے جانے کی بجائے ہم ا کے انتہا قریب کے دو نقطوں کو ثابت

تصور کر سکتے ہیں۔ اس لئے دفعہ ۳۲ کا ضابطہ درست رہیگا اگر ہم $ا = ب = ج$ اور $س = ا = ب = ج$ رکھیں اور اس سے حاصل ہوتا ہے

$$(1) \quad 0 + 2م - م = 0 \quad 0 + 2س - س = 0 \quad 0 + 2س - س = 0$$

اور سہارے کے نقطوں ا، ب، ج کے لئے

$$(2) \quad 0 + 2م - م = 0 \quad 0 + 2س - س = 0 \quad 0 + 2س - س = 0$$

اسی طرح سے ہم ج پر اس کے انتہا قریب دو نقطوں کو ثابت تصور کر سکتے ہیں۔ اس صورت میں ضابطہ بالا سے حاصل ہوگا

$$م_۱ ب_۱ + م_۲ ب_۲ + م_۳ ب_۳ = ۰ \quad (۳)$$

(۱) ، (۲) اور (۳) کو حل کرنے سے

$$م_۱ = \frac{۲}{۳} (۲ ب_۱ + ۱ ب_۲ - ۱ ب_۳) - \frac{۲}{۳} (۱ ب_۱ + ۲ ب_۲ - ۱ ب_۳)$$

$$م_۲ = \frac{۲}{۳} (۱ ب_۱ - ۲ ب_۲ + ۱ ب_۳)$$

$$م_۳ = \frac{۲}{۳} (۱ ب_۱ + ۱ ب_۲ - ۲ ب_۳) - \frac{۲}{۳} (۱ ب_۱ + ۲ ب_۲ - ۱ ب_۳)$$

یہ تین اب کے لئے ب کے گرد میار افر لینے سے

$$م_۱ = \frac{۲}{۳} (۱ ب_۱ + ۱ ب_۲ + ۱ ب_۳)$$

$$اس لئے \quad م_۱ = \frac{۲}{۳} [۱ ب_۱ + ۱ ب_۲ + ۱ ب_۳]$$

$$م_۲ = \frac{۲}{۳} [۱ ب_۱ - ۲ ب_۲ + ۱ ب_۳]$$

$$م_۳ = \frac{۲}{۳} (۱ ب_۱ + ۱ ب_۲ - ۲ ب_۳) - \frac{۲}{۳} (۱ ب_۱ + ۲ ب_۲ - ۱ ب_۳) = \frac{۲}{۳} (۱ ب_۱ + ۱ ب_۲ - ۲ ب_۳) - \frac{۲}{۳} (۱ ب_۱ + ۲ ب_۲ - ۱ ب_۳)$$

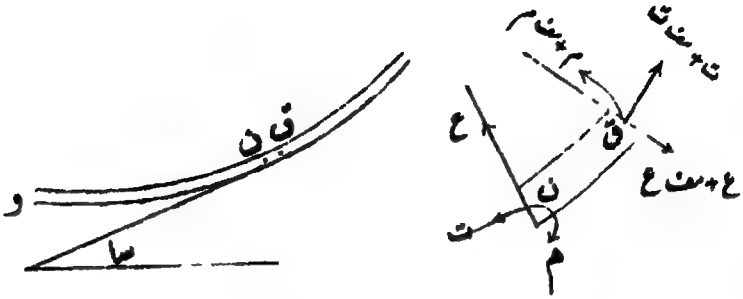
کل وزن۔

اگر ا کے محور کو انتصافاً نیچے کھینچا جائے تو اس سے فاصلہ لاپر کے نقطہ ن پر کی تراز

کے گرد میار افر لینے سے یہیں حد اب کے لئے حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{۲}{۳} م_۱ = م_۱$ ۔

یہ نقطہ ب پر منحنی کا میلان افق کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے۔

۲۔ ایک سلاخ کو ایک ہی سطح مستوی میں موڑا گیا ہے اس کے متبادل کی عام شرائط۔



فرض کرو کہ $ن$ $ق$ سلاخ کا کوئی جزو ہے اور $ون = س$ جہاں $و$ کوئی ثابت نقطہ ہے اور $ن$ $ق$ = $ع$ + $م$ نیز فرض کرو کہ $ن$ اور $ق$ پر کے ماس محور لا۔ کے ساتھ زاویہ $سا$ اور $سا + ع$ بنائے ہیں۔

فرض کرو کہ $ن$ پر تناؤ $ت$ اور $ق$ پر تناؤ $ت + ع$ ہے۔
فرض کرو کہ جزو $ن$ $ق$ کے نقطہ $ن$ پر کا جزوی زور $ع$ ہے جسے عادی اندرونی جانب کی سمت میں ناپا گیا ہے اور بناؤ علیہ $ق$ پر جزوی زور $ع + ع$ ہے جسے $ق$ پر کے عادی سمت میں باہر کی طرف ناپا گیا ہے۔
فرض کرو کہ جزو $ن$ $ق$ کے نقطہ $ن$ پر جھکاؤ کا معیار اثر $م$ ہے اور نقطہ $م$ پر $م + ع$ ہے اور ان کی سمتیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔
فرض کرو کہ جزو $ن$ $ق$ پر ماسی اور عادی قوتیں $نی$ اکائی طول $ف$ اور $گ$ ہیں۔ $ن$ پر کے ماس اور عادی سمت میں تحلیل کرنے سے

- $ت + (ت + ع) + (ع + ع) + ع + ع + ع + ع = 0$
اور $ع - (ع + ع) + (ع + ع) + (ت + ع) + ع + ع + ع + ع = 0$
انتہا میں جب $ع$ سا لا انتہا چھوٹا ہو تو ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ف}{ف + ع} + \frac{ع}{ع} = 0 \quad (1)$$

(جہاں $ف$ نصف قطر انحاد ہے)

$$\text{فرس} - \frac{\text{ت}}{\text{سر}} - \text{گ} = \dots \dots \dots (۲)$$

نیز جزدن ق کے لئے ن کے گرد معیار اثر لینے سے

$$\text{م} - (\text{م} + \text{م}) + (\text{ع} + \text{م} + \text{ع}) - \text{م} - \text{گ} - \text{م} - \text{س} = \frac{1}{4} \text{م} - \text{س} =$$

انتہا میں اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرس} - \frac{\text{ع}}{\text{سر}} = \dots \dots \dots (۳)$$

یہ مساوات اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ کسی نقطہ پر جزی زور قوس کے لحاظ سے
جسکا ڈکے معیار اثر کا تغیر سر ہے۔
اگر م سلاخ کا نقطہ ن پر نصف قطر انخا ہو جبکہ سلاخ پر کوئی دباؤ نہ ہو تو ہمیں
یہ مزید مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{م} - \text{ک} = \left[\frac{1}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر}} \right] \dots \dots \dots (۴)$$

جہاں ک سلاخ کے خاؤ کی استواریت ہے۔
ان چار مساواتوں سے ت، ع، م اور سلاخ کے منحنی کی مساوات
معلوم ہوتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک یکساں خفیف طور پر بکھرا سلاخ کا طول ۱ + ب ہے، یہ ایک متوازی الاضلاع
خط میں تین مہاروں پر قائم ہے یہ مہارے سلاخ کے سروں ۱ اور ب پر اور نیز ایک
نقطہ ج پر جس کا فاصلہ ۱ سے ۱ ہے واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ سلاخ کے انحناء کے نقطہ ٹر
اور سر حصوں ۱ ج اور ج ب میں واقع ہیں اور ایسے ہیں کہ

$$۱ + \text{ج} = \text{ب} = \text{ج} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \text{ب} \right)$$

۲۔ ایک شہتیر پر جس کا طول ۴۰ فٹ ہے ۲ ٹن فی فٹ طول کا وزن ہے اس شہتیر کو ایک سرے سے ۸ فٹ کے فاصلے پر ایک ستون پر سہارا گیا ہے اور اس کا دوسرا سر ایٹھوں کے ایک پستہ سہاروں پر جھکاؤ کے معیار اثر معلوم کرو اور پیمانہ کے مطابق جزئی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو۔
[۲۲۲ اور ۲۳ فٹ ٹن]

۳۔ ایک یکساں گھاڑا ب کا وزن و اور طول ل ہے۔ اس کا ایک سر ۱۱ ایک پستہ کے اندر اس طرح مدفون ہے کہ یہاں گھاڑی کی سمت متوازی الاتقی ہے اور دوسرا سر ب ۱ ل میں سے گزرنے والے افقی خط میں واقع ہے ثابت کرو کہ ۱ پر جھکاؤ کا معیار اثر اور

جزئی زور بالترتیب $\frac{1}{8}$ اور $\frac{5}{8}$ ہیں۔ تمام شہتیر کے لئے جزئی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو اور ثابت کرو کہ جن نقطوں پر جھکاؤ کا معیار اثر صفر یا بڑے سے بڑا ہے ان کے فاصلے ۱ سے $\frac{1}{4}$ اور $\frac{5}{8}$ ہیں۔

ثابت کرو کہ شہتیر جس شکل میں ساکن ہے اس کی مساوات ہے ۴۸ لمبج مال = ۵۵
[۱ - ل] (۵ - ل) (۳ - ل) (۷ - ل) -

۴۔ ایک سلاخ ا ب کا طول ل ہے۔ اس کے نقطہ فی (ا ق = ۱) پر وزن و رکھا گیا ہے اور شہتیر کے وزن کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اگر سروں کو متوازی الاتقی محصل میں ساکن رکھا جائے تو ثابت کرو کہ ا ق کی مساوات ہے

$$\text{لمبج مال} = \frac{و(۱-ل)}{۲ل} [۳ل-۱-۵-۷-ل]$$

اور بق کی مساوات ہے لمبج مال = $\frac{و}{۲ل} (۱-ل) [۳ل-۵-۷-۲-ل]$

۵۔ ایک خفیف طور پر مڑ سکنے والی سلاخ کا طول ۲.۵ ہے، اس کے ایک سرے کو متوازی الاتقی محل میں ثابت کیا گیا ہے۔ ایک سہارے کو سلاخ کے وسطی نقطہ کے نیچے اس طرح رکھا گیا ہے کہ آزاد سر ثابت سر سے کی ہمواری پر ہو ثابت کرو کہ وسطی نقطہ کی اونچائی سرے

کے اوپر $\frac{11}{14} \times \frac{3}{4}$ ہے جہاں ک جھکا مستقل ہے اور سلاخ کا وزن ہے۔
نیز ثابت کرو کہ سہارے پر دباؤ $\frac{3}{5}$ ہے

۷۔ ایک سلسل گاڈر کا طول ۲ فٹ ہے اور اسے تین مساوی انفصل ستونوں پر سہارا گیا ہے جن میں دوسروں پر واقع ہیں اور ایک وسطی نقطہ پر درمیانی ستون دھات کا بنا ہوا ہے اور اس لئے پیش کے تغیر سے اس میں انتہائی حرکت پیدا ہوتی ہے جس کی وسعت سروں کی ہمواری کے مقام سے اوپر اور نیچے دونوں طرف ۱ فٹ ہے۔ وسطی ستون کے عین اوپر گاڈر کی حرکات پر عمادی دباؤ کا تغیر اس تغیر کے اوپر اور نیچے معلوم کرو جو واقع ہوتا ہے جبکہ ستون ایک خط میں ہوں۔

۸۔ ایک یکساں خفیف سے لچکدار شہتیر کا وزن ۱ اور طول ۱ ہے۔ اس کے سروں کو اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ شہتیر کی سمت دونوں سروں پر متوازی الافق ہے۔ اس کے جھکاؤ کا معیار آخر کسی نقطہ پر معلوم کرو اور ثابت کرو کہ سروں پر اس کی جو خفیت ہے وہ وسطی نقطہ پر اس کی قیمت کی دو چند ہے اور ہر سرے سے $1.2 \times$ ل حاصل پراشتنا کے نقطے ہیں۔

۹۔ اگر ایک یکساں اور خفیف سے لچکدار سلاخ کے دونوں سروں کو افقاً ثابت کیا جائے اور وسطی نقطہ کو قوت کے ذریعے دونوں سروں کی ہمواری سے فاصلہ صد اوپر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ قوت کی مقدار

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

ہوگی اور سروں پر جھکاؤ کے معیار آخر $\frac{1}{4}$ سے $\frac{1}{4}$ ہو جائے جہاں ۲ سلاخ کا طول ہے، و اس کا وزن ہے اور ک اس کے خاؤ کی استواریت ہے۔

۱۰۔ ایک شہتیر کی تراش یکساں ہے اس کے سروں کو وہ دیواروں میں جن کا درمیانی فاصلہ ۱ ہے افقاً وزن کیا گیا ہے ایک دیوار فاصلہ صد میں سے اس طرح بیٹھ جائی ہے کہ سروں کے متوازی الافق رہنے میں کوئی فرق نہیں پڑتا تاہم بت کرو کہ بیٹھ جانے

کی وجہ سے بڑے سے بڑا دباؤ جو پیدا ہوتا ہے وہ $\frac{۲}{۳}$ حصے ہے جہاں دگاڑ کی گہرائی ہے اور دسب معمول نیگ کا معیار چک ہے۔

۱۰۔ ایک مسلسل شہیر کی تراش یکساں ہے اور یہ یکساں ہمواری کے چار سہاروں پر قائم ہے جن سے شہیر ۱۰۰ فٹ کے تین مساوی فصول میں منقسم ہو جاتا ہے۔ گلا ڈر کا وزن ۲ ٹن فی فٹ ہے تمام گلا ڈر کے لئے پیمانہ کے مطابق جھکاؤ کے معیار اثر کا مخفی کھینچو اور ہر ایک سہارے پر کا دباؤ محسوب کرو۔

(۸۰، ۲۲۰، ۲۲۰، ۸۰ ٹن وزن)

۱۱۔ ایک دزنی لچکدار سلاخ چار استوار سہاروں پر جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں سہاری ہوئی ہے۔ ان چار سہاروں میں سے دو سلاخ کے سروں پر واقع ہیں اور دو ان سروں سے متساوی الفاصل مقاموں پر۔ جب سلاخ اپنے وزن کے زیر عمل تحیف سی جھک جائے تو سہاروں پر کے دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ سلاخ کا دباؤ سروں پر کے سہاروں پر معدوم ہو جائے گا جبکہ کسی اندرونی سہارے کا قریب کے سرے سے فاصلہ سلاخ کے کل طول کے تقریباً $\frac{۲}{۳}$ و گنا سے کم ہو۔

۱۲۔ ایک یکساں شہیر ایک ہی افقی خط میں چار سہاروں (ا، ب، ج، د) پر قائم ہے۔ ب، ج میں فاصلہ ۵ فٹ ہے اور ا، ب، ج، د میں سے ہر ایک ۱۰ فٹ ہے۔ شہیر پر جو وزن ہے وہ فی فٹ ۲ پونڈ ہے جھکاؤ کے معیار اثر اور جڑی زور کے مخفی کھینچو اور نیز انفراف کا مخفی مرقسم کرو۔

۱۳۔ ایک یکساں سلاخ (جس کا طول ۶، ۱۵، ۱۵، ۶، ۱۵، ۶ اور غماؤ کی استواریت ک ہے) کو اس کے دو سروں ا اور ب پر اور نیز وہ نقاط تثلیث ب اور ج پر اس طرح سہارا گیا ہے کہ سب سہاروں پر دباؤ مساوی ہیں اور سلاخ کو ا اور ب پر اس طرح ساکن کیا گیا ہے کہ ان نقطوں پر کے ماس متوازی الافقی ہیں۔ ثابت کرو کہ ا اور د

کی بلندی ب اور ج کے اوپر $\frac{۲}{۳}$ ہے اور ا، ب اور ج، د کے وسطی نقطے انقطاع کے نقطے ہیں اور ب اور ج پر انما بغیر تبدیلی علامت معدوم ہو جاتا ہے۔

۱۴۔ ایک وزنی یکساں خفیف طور پر پکھلدار سلاخ پانچ سہاروں کے مقاموں پر جو سب کے سب ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں ساکن ہے۔ دو سہارے سلاخ کے سروں پر واقع ہیں ایک سہارا وسطی نقطہ پر ہے اور دو وسطی نقطہ اور سروں کے درمیانی فاصلہ کی تنصیف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ سہاروں کے نقاط پر کے دباؤ نسبت $۱۱:۲۶:۳۲$ میں ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ مرکز پر جھکاؤ کا معیار $\frac{۱}{۴}$ ڈی ہے اور اس کے قریب کے سہاروں کے مقاموں پر جھکاؤ کا معیار $\frac{۳}{۱۱۳}$ ڈی ہے جہاں سلاخ کا وزن ہے اور $\frac{۱}{۱۱۳}$ سلاخ کا طول ہے۔

۱۵۔ ایک تار جس کی تراش یکساں اور مستدیر ہے اور جو ابتداءً سیدھا تھا سروں پر کے دو سہاروں پر ساکن ہے ثابت کرو کہ اگر کسی تراش پر ریشوں کا بڑے سے بڑا تناؤ ت ہو تو جھکاؤ کا جنت $\frac{۱}{۱۱۳}$ ت ہوگا اور نیز اگر ۲ سہاروں کے مقاموں کا درمیانی فاصلہ ہو تو تار کے مرکز سے فاصلہ لا پرتناؤ

$$ت = \frac{۲۱ - ۲۱}{۱۱۳}$$

ہوگا جہاں و اسی کثافت کے ایسے تار کا وزن ہے جس کی تراش کا رقبہ اکائی ہے۔

۱۶۔ ایک یکساں خفیف سی پکھلدار سلاخ کا وزن و ہے یہ سلاخ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا وسطی نقطہ ایک سہارے کے مقام پر ہے۔ اس کے سروں کے ساتھ ایک سی وزنی و باندھی گئی ہے جو زنجیرو کی شکل میں ٹنگ رہی ہے ثابت کرو کہ سلاخ کے سروں پر

$$\text{انحراف نسبت } ۱ + \frac{۱}{۳} : \frac{۲}{۱۱۳}$$

میں بڑھ جائیگا۔

۱۷۔ ایک تین قبضوں والے محراب کے پاؤں اور چوٹی پر ایک ایک قبضہ ہے جس کی شکل نصف دائرہ کی ہے محراب کے پاؤں کا درمیانی فاصلہ ۲۵ فٹ اور چوٹی کی بلندی پاؤں سے ۲۵ فٹ ہے۔ اس محراب کے دائیں نصف پر اتفاقاً یکساں طور پر تقسیم کیا ہوا

۲۵ ٹن کا وزن ہے۔ بتاؤ کہ محراب کے دو نصف حصوں پر جھکاؤ کے معیار انٹر کے منحنی کس طرح کیے جانے چاہئیں۔

[illegible]

س - س_۱ - س_۲ + س_۳ = ۴۸ لکھ ج اور ۳ جہاں ج میخ کی موٹائی ہے اول
بنگ کا مقیاس بچک ہے اور مع سلاح کی عمودی تراش کے رقبہ کا تراض کے مرکز میں
سے گزرنے والے انتصابی خط کے گرد وجود کا معیار اثر ہے ۔

۹۔ ایک یکساں طور پر وزنی خفیف سی بچکدار سلاح ۱ ب کا طول ۲۲ انچ ہے یہ تین سہاروں پر ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ سلاح قوی ترین ہوگی یعنی اس کے ہر مقام پر ٹوٹنے کا امکان کم سے کم ہوگا اگر ایک سہارے کو مرکز پر رکھا جائے اور باقی دو سہاروں کو مرکز سے فاصلوں $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ ج پر رکھا جائے۔

۲۰۔ ایک آسانی سے ٹوٹ جانے والا ستدر حلقہ زمین پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کی سطح انتصابی ہے۔ ثابت کر دو کہ حلقہ کے وزن کی وجہ سے ٹوٹنے کا معیار آخر جس مقام پر بڑے سے بڑے اُس کا ناؤ فی فاصلہ راس سے ط ہے جہاں $s + ط = ۰$ ۔

۳۳۳۔ ایک سلاخ یا تار کو جھکانے میں دباؤ کے جھٹوں کا کام۔
فرض کرو کہ n سلاخ کی قوس مفت s ہے اور اسکے آخری جھکے ہوئے
محل میں مسروں پر کے مما سوں کے درمیان فاصلہ a ہے۔ لہذا n پر دباؤ
کا جھٹ = $\frac{L}{2} = \frac{L}{2} \times \frac{a}{s}$ جہاں s نصف قطر انحناء ہے۔

بتدائی سیدھی شکل اور آخری جمل ہوئی شکل کے درمیان کسی محل میں فرض کرو۔

کہ اس قوس مع س کے سروں پر کے ماسوں کے درمیان زاویہ ف بنتا ہے
لہذا متناظر دباؤ کا جفت $\frac{L}{\text{مع س}} \times \text{ف}$ ہوگا۔

اب اگر ف بڑھ کر ف + مع ف ہو جائے تو اس جفت کے خلافت جو کام

کیا گیا وہ = $\frac{L}{\text{مع س}} \times \text{ف} \times \text{مع ف}$ [دفعہ ۹]

پس کل کام جو اس قوس پر ہوا جبکہ ف صفر سے بڑھ کر سا ہو جائے

$$= \text{کل کام} = \frac{L}{\text{مع س}} \times \text{ف} \times \text{فرق} = \frac{L}{\text{مع س}} \times \frac{1}{4} = \text{سا}^2 = \frac{1}{4} \times \frac{L}{\text{مع س}}$$

پس سلاخ پر جو کل کام ہوا وہ = $\left[\frac{1}{4} \times \frac{L}{\text{مع س}} \right]$

جہاں عمل تکمیل پورے طول پر کرنا چاہیئے۔

اگر سلاخ ابتداؤ سیدی نہ ہوتی بلکہ اس کا انحنان پر $\frac{1}{4}$ ہوتا

$$\text{جہاں} = \frac{1}{\text{مع س}} = \frac{\text{سا}}{\text{مع س}}$$

تو دباؤ کا جفت = $\frac{L}{\text{مع س}} (\text{ف} - \text{سا})$

اور کل کام = $\left[\frac{L}{\text{مع س}} (\text{ف} - \text{سا}) \times \text{فرق} \right]$

$$= \text{کل کام} = \frac{L}{\text{مع س}} [\text{سا} - \text{سا}^2] = \frac{L}{\text{مع س}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{L}{\text{مع س}} \times \frac{3}{16}$$

مثالیں

۱۔ طول و کی ایک سلاخ کی شکل ذخیرہ کی ہے جس کا مہل و ہے اور سلاخ کا ایک سر

راس پر ہے اس سلاح کو موڑ کر نصف قطر کے ایک دائرے کے فوس کی شکل میں لایا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ دائرے کے جنت کے خلاف جو کام کرنا پڑا ہے وہ $\frac{ک}{۱۱۹} [۱۰ - \pi ۳]$ ہے جہاں ک سلاح کے ہر ایک نقطہ پر نماؤ کی اسنواریت کی قدر ہے۔

$$\text{زنجیرو کے لئے س} = \text{اس سا جس سے } \frac{۱}{۲} = \frac{\text{فوس}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{قطر سا}}{\frac{\text{س} + \frac{۱}{۲}}{۱}} \text{ نیز } \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\therefore \text{کام جو کرنا پڑوہ} = \frac{ک}{۲} \cdot \left[\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\text{س} + \frac{۱}{۲}} \right] \text{ فوس}$$

$$= \frac{ک}{۲} \cdot \left[\frac{\pi}{۲} \text{ قطر سا} - ۲ + \text{جم سا} \right] \text{ فرسا}$$

$$\text{س} = \text{اس سا رکھنے سے}$$

$$= \frac{ک}{۲} \left[\text{اس سا} - \frac{\text{سا}}{۲} + \frac{۱}{\pi} \text{ جب } ۲ \text{ سا} \right] \frac{\pi}{۲}$$

$$= \frac{ک}{۱۱۹} (۱۰ - \pi ۳)$$

۲۔ ایک یکساں سلاح جس کا طول ۱۰۲ اور وزن ۱۰۲ ہے ایک چکنے افقی میز پر پڑی ہے۔ سلاح کو اس کی وسطی تریش پر قوت لگا کر اٹھایا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ جب اس کے سرے میز پر سے عین اٹھنے کو ہوں تو اس کے مرکز کی اونچائی سردوں کے اوپر $\frac{۱۰۲}{۱۹}$ ہوگی۔ اور جو کام سر انجام پائیگا وہ $\frac{۱۰۲}{۲۰}$ ہوگا۔

۳۔ ایک یکساں وزنی سلاح جس کا طول ۱۰۲ اور وزن ۱۰۲ ہے ابتداء میں سیدھی ہے اور اس کو اس کے سردوں پر سہارا گیا ہے۔ سلاح اپنے وزن کے زیر عمل جھکا جاتی ہے۔ ثابت کر دو کہ اس کو جھکانے میں جاذبہ ارضی $\frac{۱۰۲}{۲۰}$ کام کیا ہے۔

۴۔ ایک سید ہے تار کو جس کا طول ۲ π ۱ ہے ایک پیہ کے کنارے کے گرد موڑا گیا ہے اگر پیہ کا نصف قطر ۱ ہو تو ثابت کرو کہ جھکانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ $\frac{1}{2}\pi$ ہے۔
 ۵۔ ایک تار کو جس کا طول ۲ ل ہے ایک ریخیرہ کی شکل میں موڑا گیا ہے۔ ریخیرہ کا سیدل ج ہے۔ ثابت کرو کہ موڑنے میں

$$\frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ کام کرنا پڑتا ہے}$$

۶۔ ایک وزنی خفیف طور پر پچکدا تار کے ایک سرے کو جو ایک ربع دائرہ کی شکل کا ہے ایک انتصابی دیوار میں اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ تار کی سطح مستوی انتصابی ہے اور ثابت سرے پر تار کا ماس افق کے متوازی ہے۔ یہ فرض کر کے کہ کسی نقطہ پر اسٹخا کی تبدیلی اس نقطہ پر جھکانے والے جنت کے معیار اثر کے تناسب سے ثابت کرو کہ آزاد سرے پر افقی انحراف $\frac{1}{2}\pi$ ہے جہاں ک غاؤ کی استواریت ہے، تار کے اکائی طول کا وزن ہے اور ۱ دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۷۔ ایک یکسان سخت تار کا وزن ۱ و ۱ اور غاؤ کی استواریت ک ہے۔ اس کی قدرتی شکل ایک نصف دائرہ کی ہے جس کا نصف قطر ۱ ہے۔ اس کو ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کے سرے ایک افقی میز پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ تار جو شکل اختیار کرتا ہے اس کی ذاتی مساوات تقریباً یہ ہے

$$s = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ جب } \frac{1}{2}\pi$$

جہاں s کو بلند ترین مقام سے ناپا گیا ہے۔

۸۔ ایک سخت تار کی ابتدائی شکل نصف دائرہ ہے جس کا نصف قطر ۱ ہے۔ اس کو انتصابی مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ سرے افقی میز پر ہیں ثابت کرو کہ منحنی کی ذاتی مساوات تقریباً یہ ہے

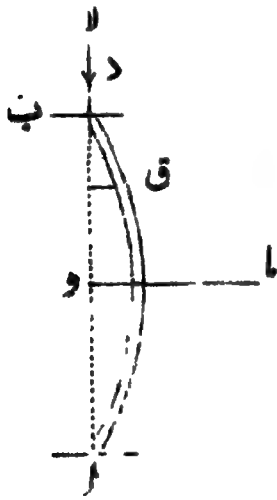
$$s = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ جب } \frac{1}{2}\pi$$

جہاں و نی اکائی قوس وزن ہے ک غاؤ کی استواریت اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ $\frac{W}{L}$ بہت چھوٹی مقدار ہے۔

۳۳۔ لمے ستونوں کا جھکاؤ۔

فرض کرو کہ ایک ستون یا فشار بند سلاخ ایسی ہے کہ اس کا طول اس کی تراش کے ابعاد کے مقابل میں بہت بڑا ہے۔ نیز ستون یکساں طاقت کا ہے اور ابتدا و سیدھا ہے۔

اس کو سیدھا کمر کیا گیا ہے اور اس کے اوپر کے سرے پر دباؤ د ڈالا گیا ہے یہ فرض کر کے کہ انصراف بہت چھوٹا



ہے ستون کی شکل معلوم کرنا مقصود ہے۔ ستون کے زمین والے سرے اور دباؤ کے نقطہ عمل کے درمیان وسطی نقطہ کو سیدھا فرض کرو اور و ما اور و لا کو بالترتیب افقی اور انتصابی محور فرض کرو۔

اگر ستون کا وزن دباؤ د کے متابل میں چھوٹا ہو تو تعادل کی مساوات ہے

$$- \text{لے بج} \frac{F}{L} = \frac{L}{S} = d \times a$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{F}{L} = - \frac{d}{a}$$

$$a = \text{اجم} \left[\frac{d}{L} \right] + b \text{ جب } \left[\frac{d}{L} \right] \quad (1)$$

جہاں 'ا' اور 'ب' اختیاری مستقل ہیں۔

تشکیل سے ظاہر ہے کہ $\frac{F}{L}$ جیسا کہ اس لئے ب = .

اب فرض کرو کہ ستون کے سرے گول کر دئے گئے ہیں تاکہ سروں پر کے
ماس کوئی سی سمت اختیار کر سکتے ہیں، لیکن چونکہ سروں پر کوئی جنت کام نہیں
کر رہا ہے اس لئے $\frac{L}{P}$ اور بناؤ علیہ $\frac{P}{L}$ ہر سرے پر صفر ہے یعنی $\frac{P}{L} = 0$ ۔

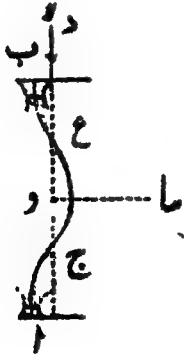
جبکہ $\frac{L}{P} = \pm$ چاہاں ل ستون کا طول ہے۔

$$\therefore \text{ا. جم} \left[\frac{L}{P} \right] = \left[\frac{D}{L} \right] = 0$$

$$\text{اس لئے } \frac{L}{P} = \frac{D}{L} = \frac{\pi}{4} \text{ جس سے } D = \frac{\pi L^2}{4}$$

اس سے ہمیں سرے پر کے اس وزن کی مقدار معلوم ہو جاتی ہے جو ایک دفعہ خم پیدا
ہو جانے کے بعد ستون کو جھکی ہوئی حالت میں رکھنے کے لئے کافی ہے۔
اگر د اس قیمت سے بڑا جائے تو ستون ٹوٹ جائے گا۔

چونکہ مستدیر ستون کی صورت میں جھکی کی قیمت قطر کی چوتھی قوت کے تناسب
ہوتی ہے اس لئے (۲) کی مدد سے نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک ہی مادہ سے بنے ہوئے
ستون کے لئے سرے پر کا بڑے سے بڑا ممکن دباؤ قطر کی چوتھی قوت کے بالابست
اور ستون کے طول کے مربع کے بالعکس بدلتا ہے سببے ستون یا فشار بند سلاخ کے
جھکاؤ کے بارے میں اس کلیہ کو یاد رکھنا چاہیے کہ



۱۔ د قوت یا قبل میں اگر سرے A اور B
ثابت ہوں اور بناؤ علیہ ان پر کے ماس یا متعابلی
ہوں تو عمل مختلف ہوگا۔ سرے B پر ایک جنت
گ لہ عمل کریگا اس جنت اور B پر عمل کرنے
والے دباؤ D کا حاصل ایک متوازی قوت
D ہوگی جو شکل میں دکھائی گئی ہے۔ اگر اس کے خط
عمل کو محور لا مانا جائے تو تھادل کی مساوات

دفعہ قبل کی مانند حاصل ہوتی ہے اور ان کا حل بھی ویسا ہی ہے یعنی مساوات (۱)۔

$$\text{اس صورت میں فرض کرو کہ } \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} = 0 \quad \text{جبکہ } 0 = 0 \quad \text{یا } \pm \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}}$$

$$\text{اس لئے ب۔۔۔ اور } \dots \text{ جب } \left[\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} \right] \text{ یا } \left[\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} \right]$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} \quad \text{اس لئے } \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}}$$

اس ستون کا تعدیلی خط جھکاؤ کے بعد جس منحنی کی شکل اختیار کرتا ہے اس کی مساوات یہ ہے

$$\text{یا } \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}}$$

$$\text{اس لئے نقاط انعطاف ہیں جہاں } \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} = 0 \quad \text{یعنی جہاں } 0 = \pm \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}}$$

یہ نقطے ج اور ع ہیں اور اس خط پر واقع ہیں جو ب پر کے جفت اور دباؤ کی حاصل قوت کا خطا عمل ہے۔

۳۳۔ دھروں کی محوری گردش۔ فرض کرو کہ ایک پتلا اسطوانی انتصابی دھرا اپنی چولوں میں محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ اگر گھاؤ کی زاویہ رفتار کافی زیادہ ہو تو یہ پہلو کی جانب جھکنے کا میلان رکھے گا۔



فرض کرو کہ جھکاؤ کا سمیٹا اثر گڑ ہے

اور نیچے کی چول و پرافتی دباؤ اس ہے۔ نیز

چونکہ کسی نقطہ (لا، نا) پر مرکز گزرنے قوت

۲ لاہر سے نا فرلا ہے، جہاں دھرے کا

نصف قطر اور کثافت ہرے اور چونکہ یہ فرض

کر لیا گیا ہے کہ انحراف بہت تھوڑا ہے اور

فرلا اور فرس تقریباً مساوی ہیں اس لئے

تبادل کی مساوات ہے

$$ل = ج \frac{فرا}{فلا} = گ - س = لا + \pi \text{ و } مر سہ ل \text{ م } آ فرا (لا - لا) - (۱)$$

لا کے لحاظ سے دو دفعہ تفرق کرنے سے

$$ل = ج \frac{فرا}{فلا} = \pi \text{ و } مر سہ ل \text{ م } آ فرا - س$$

$$\text{اور } ل = ج \frac{فرا}{فلا} = \pi \text{ و } مر سہ م$$

$$۱ = \frac{فرا}{فلا} = \frac{\pi \text{ و } مر سہ ل}{\pi \text{ و } مر سہ م} = \frac{۴ مر سہ ل}{۴ مر سہ م} = \frac{۴}{۴} = ۱ \text{ فرض کرو۔ (۲)}$$

اس مساوات کا حل ہے

$$۱ = ل = ج \frac{فرا}{فلا} + ب جب \frac{فرا}{فلا} + ج جب \frac{فرا}{فلا} + د جب \frac{فرا}{فلا} - (۳)$$

فرض کرو کہ دھرا و اد ۱ پر اس طرح سہارا ہوا ہے کہ سرے اس جگہ پر انتصابی ہیں
یعنی جب لا = ۰ تو م = ۰ اور فرا = ۰

$$۱ = ل = [جم \frac{فرا}{فلا} - جب \frac{فرا}{فلا}] + ب [جب \frac{فرا}{فلا} - جب \frac{فرا}{فلا}] - (۴)$$

نیز جب لا = ۰ تو م اور فرا دونوں صفر ہوتے ہیں

$$۰ = ل = [جم - جب] + ب [جب - جب]$$

$$\text{اور } ۰ = ل = [جب - جب] + ب [جم - جب]$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\text{جم مہ - جزم مہ}}{\text{جب مہ + جزم مہ}} &= \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \quad \text{.. (۵)} \\ \text{جب مہ - جزم مہ} &= \text{جم مہ} - \text{جزم مہ} \\ \text{(جم مہ - جزم مہ)} &+ \text{جب مہ} - \text{جزم مہ} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{جم مہ - جزم مہ} = 1 \quad \text{.. (۶)}$$

اس مساوات سے م کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور اس لئے (۵) سے $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور بنیاد علیہ مخنی (۴) کی شکل معلوم ہوتی ہے۔

$$\text{لیکن (۲) سے } \frac{۳}{۲۱} = \frac{۳}{۱۲} \text{ اس لئے } \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴} \text{ اور } \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴} \text{ جس سے مطلوبہ}$$

راوی رفتار معلوم ہوتی ہے۔ اگر سے اس قیمت سے بڑا ہو تو دھرا اور زیادہ جھکنا چلا جائیگا۔ جم مہ اور قطر مہ کے منحنیوں کو مرتسم کرنے سے ہم آسانی سے دیکھ سکتے

ہیں کہ (۶) کا حل تقریباً $\frac{۳۳}{۲}$ ہے، اب اگر $\frac{۳۳}{۲} + \text{صد رکھا جائے جہاں صد}$

چھوٹے (۶) سے دوسرے درجہ کا تقریبی حل حسب ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\text{صد} = \frac{۱}{۵۵۵۶} = \frac{۱}{۳۳} \quad \text{جزم مہ} \quad ۵۰۱۸ = \text{جدولوں سے}$$

$$\therefore \text{مہ} = ۵۰۱۸ + \frac{۳۳}{۲} = ۴۵۳ \quad \text{دوسرا تقریبی حل}$$

$$\text{(۵) میں درج کرنے سے } \frac{\text{ب}}{\text{ا}} = ۰.۹۸ \quad \text{تقریباً}$$

اب (۴) سے اس مخنی کی مساوات حاصل ہوتی ہے جس شکل دھرا اختیار کرتا ہے

فولاد کے لئے ۰.۳ تقریباً ۰.۳ پونڈ وزن فی مربع انچ ہے اور ہر تقریباً ۳۸۰ پونڈ فی کعب فٹ ہے۔

۷۳۳۔ دفعہ قبل میں فرٹن کر دکھائی تھی کہ سرور کو انتصابی سمت میں رکھنے کے لئے کوئی پابندی نہیں ہے بلکہ دھروں کے سرور کو صرف آزادانہ طور پر نکال دیا گیا ہے لہذا $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$ سرور پر صفر ہوگا لیکن $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$ صفر ہوگا کیونکہ جبکہ وہ کامعیار اثر ہر دو سرور پر صفر ہے۔

اس صورت میں جبکہ وہ کامعیار اثر گ صفر ہے۔ مساوات (۲) حسب سابق ہے اور اس کا حل ہے

$$۱ = \frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}} + \frac{\text{د}}{\text{د}} + \frac{\text{ه}}{\text{ه}}$$

بیکہ لا۔ لا۔ تو ا۔۔ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = ۰$

$$۰ = \frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}} + \frac{\text{د}}{\text{د}} + \frac{\text{ه}}{\text{ه}} - \frac{\text{ا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{ج}} - \frac{\text{د}}{\text{د}} - \frac{\text{ه}}{\text{ه}} = ۰$$

$$\text{اسی طرح بیکہ لا۔ لا۔ تو ا۔۔ اور } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = ۰$$

$$۰ = \frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}} + \frac{\text{د}}{\text{د}} + \frac{\text{ه}}{\text{ه}}$$

$$۰ = - \frac{\text{ا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{ج}} - \frac{\text{د}}{\text{د}} - \frac{\text{ه}}{\text{ه}}$$

$$۰ = \frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}} + \frac{\text{د}}{\text{د}} + \frac{\text{ه}}{\text{ه}}$$

$$۰ = \frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}} + \frac{\text{د}}{\text{د}} + \frac{\text{ه}}{\text{ه}}$$

$$۰ = \frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}} + \frac{\text{د}}{\text{د}} + \frac{\text{ه}}{\text{ه}}$$

جس سے کہہ سکتے ہیں کہ کم قیمت حاصل ہوتی ہے

$$۰ = \frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}} + \frac{\text{د}}{\text{د}} + \frac{\text{ه}}{\text{ه}}$$

نیز مغنی کی شکل اس صورت میں ہے $a = b$ جب $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ ۔

۸۳۳۔ ایک پتلے یکساں ستون کو انتصاباً کھڑا کیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ اس کی بلندی زیادہ سے زیادہ کتنی ہو سکتی ہے کہ یہ اپنے ہی وزن کے زیر عمل شکست نہ ہو جائے۔ اگر مبداؤ کو ستون کے بالائی سرے پر لیا جائے اور لا کو انتصاباً نیچے کی طرف کھینچا جائے اور و ما کو متوازی الافق تو تعادل کی مساوات ہے

۱۔ حج فرض $\frac{1}{10}$ = فرض (۱۔ عا) جہاں وزن ہے ستون کے اکائی طول کا اور حصکا ڈک بہت چھوٹا فرض کیا گیا ہے۔

تفریق کرنے اور $\frac{P}{M} = \frac{P}{\frac{P}{C}}$ اور $\frac{P}{C} = C$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرض}}{\frac{\text{فرض}}{100}} = \text{م} \div \text{ع فرضا} = \text{م ع}$$

اگر $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ رکھیں تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$= \left[\frac{1}{r_{eq}} - \frac{r}{q} \right] t + \frac{1}{\frac{r}{q}} \frac{r}{q} t + \frac{r^2}{r_{eq}^2} t$$

فرض کرو کہ $Q = \frac{M}{4} - \frac{K}{9} = \frac{P}{2}$ اور $Q = E = 0$

$$\text{تب} = \frac{\text{فرت}}{\text{فرو}} + \frac{1}{\text{و}} + \frac{\text{فرت}}{\text{فرو}} + \text{ت} \left[-1 - \frac{1}{\text{و}} \right]$$

ت = ا ج پ (و) + ب ج پ (و)

جہاں جی (و) بیسل کان^۳ میں رتبہ کا تفاعل ہے۔

$$: \text{ع} = \frac{1}{2} [\text{ا ح ج } + (\text{ق لا}) + \text{ب ج } + (\text{ق لا})]$$

اب $\frac{فرع}{ولا} =$ جبکہ لا = کیونکہ بالاترین نقطہ پر جمکاؤ کا سیمارا انصر ہے ۔

فی مربع انچ ہے اسلئے مندرجہ بالا مضابطہ سے حاصل ہوگا $ل = ۲۶۰$ فٹ تقریباً۔

مثالیں

۱۔ ایک سیدھی فولادی سلاخ کو جس کا طول ۲۰ فٹ اور قطر ایک انچ ہے انتصاباً کھڑا کیا گیا ہے اور اس کے سروں کو اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ ان پر کے ٹاس انتصابی ہیں۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو سلاخ برداشت کر سکتی ہے تقریباً ۱۰۰ پونڈ ہے۔

۲۔ ایک سیدھی یکساں فولادی سلاخ جس کی تراش دائرہ ہے ۵ فٹ لمبی ہے۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ اگر سلاخ کو سروں پر سادہ طرح ٹیکا جائے اور وسط میں ۲۰ پونڈ کا وزن سہارا جائے تو سلاخ ایک انچ جھک جاتی ہے اس سلاخ کو گول سرے والی انتصابی فضا بند سلاخ کی طرح استعمال کیا جائے تو زیادہ سے زیادہ کتنا وزن رکھا جاسکتا ہے

(جواب تقریباً ۲۴۷ پونڈ)

۳۔ ایک فولادی ٹیکے کو جس کا قطر ۱/۲ انچ ہے دو ایسی چوبوں کے اندر سہارا گیا ہے جس کی نشستیں کروی ہیں اور یہ فی منٹ تین ہزار جکر لگاتا ہے۔ بتاؤ کہ چوبوں کے مرکروں کے درمیان زیادہ سے زیادہ کتنا فاصلہ ہونا چاہیے کہ ٹیکہ گھومنے نہ پائے۔

(۱۶۲۱ فٹ تقریباً)

۴۔ ایک لمبی تیلی سلاخ (ب کو انتصاباً نصب کیا گیا ہے اور اس کے سرے دب پر وزن رکھا گیا ہے اور نیچے کے سرے کو انتصاباً قائم کر دیا گیا ہے اگر سلاخ ذرا سی لچکدار ہو اور اس کا طول ۱۰ فٹ ثابت کرو کہ یہ سلاخ جس سختی کی شکل اختیار کرتی ہے اس کی سادات ہے

$$l = \left[\frac{1}{2} \frac{E I}{W} \right]^{1/2}$$

جہاں l سدا ہے اور W دب کا افقی ہٹاؤ ہے اور $\frac{E I}{W} = \frac{l^2}{2}$

نیز ثابت کرو کہ شہتیر نہیں جھکیگا اگر $\frac{1}{2} \frac{E I}{W} > \frac{l^2}{2}$

اس سے اور دفعہ ۳۳۵ سے نتیجہ نکلتا ہے کہ سلاخ جس کے دونوں سرے اس طرح

ثابت ہوں کہ ان پر کے ماس انتصابی ہوں تو سلاخ اس وزن کا ۱۶ گنا سہار سکے گی جو وہ اس صورت میں سہارتی جبکہ صرف نیچے کا سہرا انتصاباً ثابت ہے اور اوپر کا سہرا گول ہو اور بناؤ علیہ جانبی حرکت اختیار کرنے کے قابل]

۵۔ اگر دفعہ ۳۳ کے سوال میں پچھلے سرے کو اس طرح ثابت رکھا جائے کہ ہنر کا ماس انتصابی ہے اور اوپر کے سرے پر ایسی قوت لگائی جائے کہ یہ ثابت پچھلے سرے میں سے گزرنے والے انتصابی خط میں ہمیشہ رہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{3}{2} \text{ ل} = \text{مس} \left[\frac{3}{2} \text{ ل} \right] \text{ پس } \left[\frac{3}{2} \text{ ل} \right] \times \text{ل} = ۳ \times ۴۹۳ = ۱۲۳۹$$

اور اس لئے ثابت کرو کہ $\frac{3}{2} \text{ ل} = ۵ = ۲.۵ \times ۱۸۷ = \frac{۱۸۷}{۲} \times ۲.۵ = ۲۱۰.۲۵ \times \frac{۱۸۷}{۲} \text{ تقریباً}$

۶۔ دفعہ ۳۳ کے سوال میں اگر دوسرے کے ایک سرے کو انتصابی رکھا جائے اور دوسرے سرے کو آزادانہ طور پر سہارا جائے تو ثابت کرو کہ مہ کی قیمت مساوات مسس مہ = مسز مہ سے حاصل ہوتی ہے اور بناؤ علیہ یہ تقریباً ۳۵۹۳ کے مساوی ہے۔

اگر دوسرا سہرا بالکل آزاد ہو تو ثابت کرو کہ مہ کی قیمت مساوات جم مہ جزمہ = ۱ سے حاصل ہوتی ہے اور بناؤ علیہ یہ تقریباً ۸۷۵ کے مساوی ہے۔ اس صورت میں جزی زور

اور نیز جھکاؤ کا معیار اثر دوسرے سرے پر صفر ہے، لہذا $\frac{۳}{۲} \text{ ل}$ اور $\frac{۳}{۲} \text{ ل}$ دونوں صفر ہیں]

۷۔ اگر ایک یکساں مادہ کی ایک کمان بنائی جائے تو ثابت کرو کہ رسی کو کھینچنے سے اس

کی ذاتی مساوات یہ ہوتی ہے $\frac{۳}{۲} \text{ ل} = \text{مس} \left[\frac{۳}{۲} \text{ ل} \right] \text{ جب } \frac{۳}{۲} \text{ ل} = ۱ \text{ جب } \frac{۳}{۲} \text{ ل}$

اگر کمان صرف خفیف طور پر بھگد اور اگر اس کا طول ۲ ل اور رسی کا طول ۱۲ ہو جہاں ل اور ۱ تقریباً مساوی ہیں تو ثابت کرو کہ یہ جس منحنی کی شکل اختیار کرتی ہے اس کی مساوات

$$\text{ہے } \frac{۳}{۲} \text{ ل} = \text{مس} \left[\frac{۳}{۲} \text{ ل} \right] \text{ جب } \frac{۳}{۲} \text{ ل} = ۱ \text{ ہے اور رسی کا تناؤ } \frac{۳}{۲} \text{ ل} = ۱ \text{ ہے}$$

۸۔ ایک افقی بریکٹ جس کا طول ۱ ہے ایک انتصابی ستون کے اوپر کے سرے

پر لگایا گیا ہے ستون کی بلندی l ہے اور ستون کا پچلا سراز میں کے اندر مد فون ہے۔ جب شنگہ کے سرے پر وزن w ہو تو ستون تھوڑا سا جھک جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ستون کے خاکہ کی وجہ سے (خواہ برسیکٹ کا طول کچھ ہی ہو) قاعدہ پر جھکاؤ کا معیار اثر نسبت قط $(\frac{w}{l} \times l)$ میں بڑھ جاتا ہے جہاں l ٹیگ کا متیاس ہے اور جب تراش کا جمود کا معیار اثر اس خط کے گرد ہے جو تراش کے مرکز میں سے جھکاؤ کی سطح مستوی پر عمود وار کھینچا جائے۔

۹۔ ایک سیدھا شہتیر جس کی تراش یکساں ہے پچک جانے والے مادہ کی ایک افقی تہ پر رکھا گیا ہے شہتیر کے اس نقطہ پر جہاں گہراؤ a ایچ ہے یہ دیکھا گیا ہے کہ شہتیر اور تہ کے درمیان دباؤ (رک) $\frac{1}{2} \pi$ فی اینچ طول ہے۔

اگر شہتیر کے اس نقطہ پر جس کا فاصلہ شہتیر کے دونوں سروں سے مساوی ہے $\frac{1}{2} \pi$ وزن رکھا جائے تو ثابت کرو کہ دباؤ کی تقسیم $\frac{1}{2} \pi$ و $\frac{1}{2} \pi$ [جمہ لا + جب $\frac{1}{2} \pi$]

$\frac{1}{2} \pi$ فی اینچ طول ہے جہاں $\frac{1}{2} \pi$ وزن کے نقطہ سے ناپا گیا ہے اور $\frac{1}{2} \pi$ ک۔ اور تعدیلی محور کے گرد شہتیر کی تراش کا جمود کا معیار اثر $\frac{1}{2} \pi$ ہے اور شہتیر کے مادہ کے لئے پچک کا متیاس ہے۔

— ق —

اصطلاحات

سکونیات اعلیٰ

Angle of repose	شہر او کا زاویہ
Astatic equilibrium	اچل توازن
Attraction	کشش
Ball and socket	گولہ گرد انگ
Bending moment	جھکاؤ کا معیار اثر
Binormal	ثنائی عماد
Brake	بریک
Breaking tension	ٹوڑنے والا تناؤ
Cardiod	خط صنبوری، قلب
Catenary	ذنجیرہ
Central axis	مرکزی محور
Centrifugal	مرکز گزیز
Chain wheel	ذنجیر پہیہ
Circle of inflexions	انعطافوں کا دائرہ
Circle of stability	قامتیت کا دائرہ
Coefficient of friction	رگڑ کی قدر

Composition	ترکیب
Compression	پچکاؤ
Concentric	ہم مرکز
Configuration	روپ تشکیل
Constrained bodies	مقید اجسام
Couple	جفت
Curvature	انحناء
Cyclical order	مسند بر ترتیب
Cycloid	خط مدیر
Cylindroid	اسطوانہ نما
Deflection	انحراف
Differential pulley	فرقی چرخ
Displacement	ہٹاؤ
Dyname	حرکمہ
Dynamics	حرکیات
Eccentric	خارج المركز
Eccentricity	خروج المركز
Effort	طاقت
Element	عنصر
Equilibrium	تبادل - توازن
Equipotential surfaces	مساوی قوتہ سطحیں
Extension	کھینچاؤ
Flexural rigidity	خمناؤ کی استواریت
Frame work	قالب - ڈھانچہ
Friction	رحرر

Fulcrum	نصاب
Funicular polygon	رسمیاتی کثیر الاضلاع
Generator	کون
Groove	ناہی
Helix	مرغولہ
Hinges	قبضے
Horse-power	اسبی طاقت
Hypocycloid	درتدویر
Inclined plane	سطح مائل
Indicator Diagram	مظہار نقشہ
Invariants	غیر متغیرہ
Keel	پیندا
Lamina	پترا
Lemniscate	اٹیرن ، ختمہ منحنی
Like (forces)	موافق (قوتیں)
Limiting friction	انتہائی رگڑ
Lines of force	قوت کے خط
Mechanical advantage	جیلی فائدہ
Modulus	مقیاس
Moment	معیار اثر
Neutral line	تقدیمی خط
Normal	عماد
Null lines	صفری خطوط
Osculating plane	پوسندہ مستوی
Parallelopiped	متوازی السطوح

Pedal	پدال
Potential	قوة
Pulley	چرخي
Reaction	تفاعل
Reciprocal	متكافئ
Resistance	مقاومت
Resolution	تحليل
Rigid	استوار
Roulette	گردنبسه
Sag	جھوک
Screw-press	پنج‌شکسته
Shear	جزي
Shearing stress	جزي‌زور
Shell	خول
Slope	دھال
Smooth	چکنا
Spherical Excess	کردي اضافه
Spherical triangle	مثلث کردي
Stable	قائم
Steam Engine	بھاپ انجن
Steel yard	تيزک
Strut	فشاربند
Suspension bridge	جھولاپل
Tension	تناؤ
Tie	بندھن

Tube of force	قوت کی نلی
Unlike (forces)	مخالفت (قوتیں)
Unstable	غیر قائم
Virial	سکت
Virtual work	مہم کام
Wedge	فانہ
Wheel & axle	چرخ اور محور
Work function	قوتی-تفاعل
Wrench	ریچ



